

# 2+1 维 $SU(3)0^{++}$ 胶球质量\*

惠萍<sup>1,1)</sup> 陈启洲<sup>2</sup>

1 (广东教育学院物理系 广州 510303)

2 (中山大学物理系 广州 510275)

**摘要** 提出变形集团展开法研究 2+1 维  $SU(3)$  格点规范场的胶球质量. 这种方法采用相连空心图的线性组合作为试探波函数, 并引入了 Wilson 圈图的平均值. 计算结果表明, 变形集团展开法的真空能量比普通集团展开法方法的真空能量低,  $0^{++}$  胶球质量  $m/e^2$  的二阶和三阶结果在耦合常数  $\beta=4.5-8.0$  区间, 表现出较好的标度行为和良好的收敛性.

**关键词** 格点规范理论 胶球质量 波函数

## 1 引言

量子色动力学(QCD)预言了胶球的存在, 目前无论从理论上还是实验上, 胶球质量都没有确定, 胶球质量的计算将对实验有重要的指导作用. 人们在这方面已经作了大量的十分有意义的工作. 格点规范理论(LGT)已成为人们研究规范场非微扰效应确定胶球质量的一种重要方法, 1980年 J.P. GREENSITE<sup>[1]</sup> 导出格点规范理论真空态的薛定谔本征值方程之后, 人们试图直接从此方程求解胶球质量和波函数, 引入了各种近似方法, 并取得了很大成就<sup>[2-11]</sup>, 但计算结果的收敛性仍不能令人满意. 因此, 应该将普通集展开法进行改进. 我们注意到固体物理中用 Hubbard 模型计算横向磁化率

$$\chi^{+-}(q, \omega) = \frac{1}{N} \sum_k \ll \theta_k(q, \omega); S^+(-q) \gg_{\omega+i\eta} \quad (1)$$

时, 所采用的无规相近似(RPA)方法, 该方法的具体计算如下: 在动量空间, Hubbard 模型的哈密顿量  $H = H_T + H_I$ ,

$$H_T = \sum_{K, \sigma} E_K C_{K\sigma}^+ C_{K\sigma}, \quad (\sigma = \uparrow, \downarrow), \quad H_I = \frac{U}{N} \sum_{K, K', q} C_{K+q\uparrow}^+ C_{K'-q\downarrow}^+ C_{K'\downarrow} C_{K\uparrow} \quad (2)$$
$$\theta_k(q, \omega) = C_{k+q\downarrow}^+ C_{k\uparrow}, \quad S^+(q) = \sum_K C_{K\uparrow}^+ C_{K+q\downarrow}$$

含时格林函数及其运动方程为

$$G(t, 0) \equiv \ll \theta_k(q, t); S^+(-q) \gg = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \ll \theta_k(q, \omega); S^+(-q) \gg d\omega,$$

1999-06-18 收稿

\*教育部博士点基金资助

1) E-mail: Huiping 519@163.net.cn

$$i \frac{d}{dt} G(t, 0) = -\delta(t) \langle [\theta_k(q, t), S^+(-q)] \rangle + \ll [\theta_k(q, t), H]; S^+(-q) \gg, \quad (3)$$

其中  $\langle \rangle$  表示平均值. (3)式第二项中的对易子中

$$[\theta_k(q, t), H_I] = \frac{U}{N} \sum_{K, q'} [C_{K+q}^+ C_{k+q-q'}^+ C_{k+q} C_{K+q} - C_{k+q}^+ C_{K-q'}^+ C_{K+q} C_{k-q}], \quad (4)$$

由于这一项不能表示为  $\theta_k(q, t)$  的线性组合, (3)式无法求解. 通常采用无规相近似方法将一对费米子算符取平均值, (4)式变为

$$[\theta_k(q, t), H_I] \approx \frac{U}{N} \sum_K [(\langle C_{K+q}^+ C_{K+q} \rangle + \langle C_{K+q}^+ C_{K+q} \rangle) \theta_k(q, t) - (\langle C_{k+q}^+ C_{k+q} \rangle + \langle C_{k+q}^+ C_{k+q} \rangle) \theta_K(q, t)]. \quad (5)$$

其中  $\langle C_{K\sigma}^+ C_{K\sigma} \rangle$  为费米子分布函数. 经过这种解链截断后得到封闭的  $\chi^{-+}$  表示式. 用这种方法求得的磁化率与实验结果一致. 这种事先定义含时格林函数, 然后通过海森堡方程作近似处理的方法对我们求解格点规范理论的真空中和胶球波函数的 GREENSITE 的方程有很大启发. 我们选连接空心图的线性组合作为试探波函数, 然后将这些试探波函数代入 GREENSITE 的方程, 计算对易子后会产生许多不连接图相乘的非线性组态, 这些非线性组态的存在使方程无法求解. 按照 RPA 方法, 将这些不相连图相乘的非线性组态中小面积的 Wilson 圈图取平均值, 从而得到一组封闭的方程组. 具体计算将在下面介绍.

## 2 本征值方程、真空波函数和胶球质量

设真空波函数为

$$|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle \quad (6)$$

$SU(3)$  LGT 哈密顿量是

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_l E_l^a E_l^a - \frac{1}{ag^2} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^* - 2).$$

真空波函数满足  $H$  的本征值方程是

$$\sum_l \{ [E_l^a, [E_l^a, R]] + [E_l^a, R][E_l^a, R] \} - \frac{2}{g^4} \sum_p \text{Tr}(U_p + U_p^*) = w_0, \quad (8)$$

其中  $E_l |0\rangle = 0$ ,  $g$  为无量纲的耦合常数. 设  $a$  是格距,  $g$  与不变荷  $e$  的关系为  $g^2 = e^2 a$ . 在  $g^2 \rightarrow 0$  的弱耦合区,  $a \rightarrow 0$ .

胶球波函数的形式为

$$|F\rangle = \left[ F(U) - \frac{\langle \Omega | F(U) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right] | \Omega \rangle.$$

胶球波函数满足的薛定谔本征值方程是

$$H |F\rangle = \epsilon_F |F\rangle.$$

由上式导出

$$\sum_l \{ [E_l^a, [E_l^a, F(U)]] + 2[E_l^a, F(U)][E_l^a, R(U)] \} - \Delta m \frac{2a}{g^2} F(U) = \text{const},$$

其中  $\Delta m$  为胶球质量隙,

$$\Delta m = \epsilon_F - \omega_0,$$

胶球质量  $m/e^2 = a\Delta m/g^2$   $R(U)$  和  $F(U)$  由 Wilson 圈图组成,  $R(U)$  和  $F(U)$  按照相连空心图的阶数展开为

$$R(U) = \sum_i R_i(U), F(U) = \sum_i F_i(U). \quad (12)$$

对于三阶计算,  $R(U)$  和  $F(U)$  由图 1 各阶图线性组合而成.

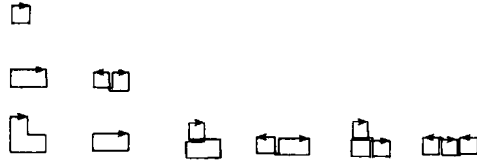


图 1  $R(U)$  和  $F(U)$  的一至三阶连接空心图

图 1 中的  $i+j$  阶图  $R_{i+j}$  是由方程(3)中的  $[E_i, R_i][E_j, R_j]$  项产生, 例如:

设  $R_1 = C_0 \square + \text{h.c.}$ , 将  $R_1$  代入方程(8),  $[E_1, R_1][E_1, R_1]$  的计算如下:

$$[E, \square][E, \square] = -2[\square - \square\square/3] + 2[\square\square - \square\square/3] \approx -2\square\square + 2\langle\square\square\rangle - 4\square,$$

其中

$$\langle\square\square\rangle = (\langle\square\square\rangle + \langle\square\square\rangle) / 2, \quad \langle\square\square\rangle = \langle\square\square\rangle,$$

$$[E, \square][E, \square] = \square\square + \square\square - 6.$$

$R(U)$  中的一阶到三阶图的系数分别为  $c_0, c_1, c_2, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$  和  $b_6$ .  $F(U)$  的一阶到三阶图的系数分别为  $f_0 = 1, f_1, f_2, b_{01}, b_{02}, b_{03}, b_{04}, b_{05}$  和  $b_{06}$ . 在上述计算中出现许多不相连图相乘的非线性组态, 我们考虑到大图占据大的空间, 因此大图对波函数和胶球质量的贡献较大. 为了保持方程组的封闭性, 按照 RPA 方法, 对计算过程中出现的不相连图相乘的非线性组态中较小的图取平均值, 而保留较大的图. 例如:

$$\square\square \approx \langle\square\square\rangle.$$

采用这种方法的另一个原因是用它计算出的真空能量相对普通集团展开法方法的真空能量低. 另外, 我们发现在以前的这种计算方法中, 非重叠图如  $\square\square$  的系数对计算胶球质量的方程没有直接的贡献, 而事实上这类大图是非常重要的. 将  $R(U)$  和  $F(U)$  所有的图代入方程(8)和方程(11)可得到计算三阶真空波函数的方程如下:

$$[32b_1/2 - 4c_0c_1] = 0, \quad (13)$$

$$[32b_2 - 2c_0c_2] = 0, \quad (14)$$

$$[13b_3 + 4c_0(c_1 - c_2)] = 0, \quad (15)$$

$$[13b_4 + 2c_0(c_1 - c_2)] = 0, \quad (16)$$

$$[46b_5/3 + 4c_0c_2] = 0, \quad (17)$$

$$[46b_6/3 + 2c_0c_2] = 0, \quad (18)$$

$$[8c_1 - 2c_0^2 + 2c_0(3c_1\langle\Box\rangle + 5c_2) + 2\langle\Box\rangle(b_3 + b_4)] = 0, \quad (19)$$

$$[31c_2/3 + 2c_0^2 + 2c_0(3c_1 + 5c_2\langle\Box\rangle) + 2\langle\Box\rangle(b_5 + b_6)] = 0, \quad (20)$$

$$[16c_0/3 - 2/g^4 + 2c_0^2(\langle\Box\rangle - 2) - c_0(1 + \langle\Box\rangle)(6c_1 + 10c_2) + c_2\langle\Box\rangle] = 0, \quad (21)$$

$$w_0 = -12c_0^2 \quad (22)$$

(有关  $f_1, f_2, b_{01}, b_{02}, b_{03}, b_{04}, b_{05}, b_{06}$  和  $m/e^2$  的方程从略)

从方程中看到,现在的非重叠空心图的系数  $c_2, b_3, b_4, b_5$  和  $b_6$  对与胶球质量有关的方程(19)–(21)有直接贡献. 为了求解以上方程组,根据 SMITH<sup>[2]</sup>的方法,我们重写哈密顿量

$$H' = H + c'_0(\Box + \text{h.c.}),$$

于是得到

$$w'_0 = w_0 = -12c_0^2.$$

方程(22)重写为

$$[16c_0/3 - 2/g^4 + 2c_0^2(\langle\Box\rangle - 2) - c_0(1 + \langle\Box\rangle)(6c_1 + 10c_2) + c_2\langle\Box\rangle + c'_0] = 0, \quad (22a)$$

再由 Feynman 定理得到

$$2\langle\Box\rangle = \left. \frac{\partial w_0}{\partial c'_0} \right|_{c'_0=0} = -24c_0 \left. \frac{\partial c_0}{\partial c'_0} \right|_{c'_0=0} \quad (23)$$

这样方程(13)–(23)组成封闭的代数方程组.

### 3 计算结果

从图2看到,实线明显比虚线低. 2+1维  $SU(3)$  LGT 的二阶和三阶  $0^{++}$  胶球质量随着  $\beta = 6/g^2$  的变化曲线如图3所示. 在  $\beta = 4.5\text{--}8.0$  区间,  $m/e^2 \approx 2.00 \pm 0.09$ , 与文献[7]的结果十分接近,表现出较好的标度行为. 更重要的是二阶和三阶胶球质量在  $\beta = 2.5\text{--}8.0$  区间完全重合,表现出很好的收敛性,是前所未有的收敛结果. 以上结果表明这种方法对解决收敛性问题十分有效,可以推广到更高阶图的2+1维  $SU(3)$  QCD 的计算和3+1维  $SU(3)$  QCD 的计算,更深入的研究将在以后的文章中介绍.

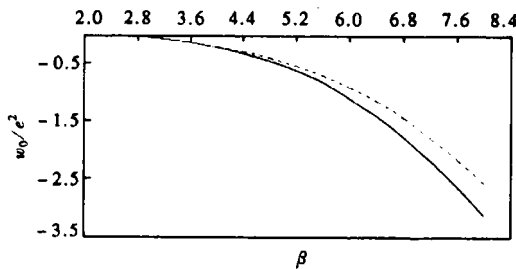


图2 是真空能量三阶结果的比较

---普通集团展开法<sup>[6]</sup>的结果,  
—变形集团展开法的结果.

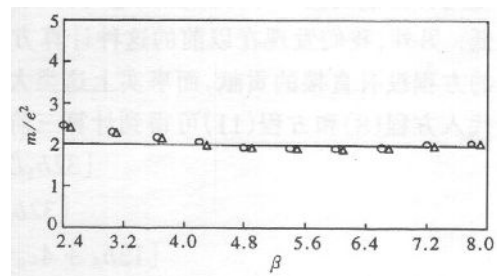


图3 二阶(○○○)和三阶(△△△)

胶球质量随着  $\beta$  的变化曲线

**参考文献 (References)**

- 1 Greensite J P. Nucl. Phys. ,1980, **B166**:113—124
- 2 Llewellyn Smith C. H, Watson N. J. Phys. Lett. , (1993) **B302**:463—471
- 3 GUO S H, CHEN Q Z, LI L. Phys. Rev. ,1994, **D49**(1):507—510
- 4 CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev. ,1994, **D50**(5):3564—3565
- 5 CHEN Q Z, CAI P F, Fang X Y, et al. Commun. Theor. Phys. ,1997, **27**:337—342
- 6 CHEN Q Z, LUO X Q, GUO S H. Phys. Lett. ,1995, **B348**:560—564
- 8 HUI Ping, CHEN QiZhou High Energy Phys. and Nucl. Phys(in Chinese),1995, **19**(9):820—825  
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理,1995, **19**(9):820—825)
- 9 HUI Ping, High Energy Phys. and Nucl. Phys(in Chinese),1998, **22**(4):322—325  
(惠萍. 高能物理与核物理,1998, **22**(4):322—325)
- 10 HU Lian, LUO XiangQian, CHEN QiZhou et al. Commun. Theor. Phys. ,1997, **28**:327—332
- 11 LUO XiangQian, CHEN QiZhou, CAI PengFei et al. Commun. Theor. Phys. ,1998, **29**:595—600

 **$0^{++}$  Glueball Mass in 2 + 1-D  $SU(3)$  LGT\***HUI Ping<sup>1,1)</sup> CHEN QiZhou<sup>2</sup>

1 (Department of Physics, Guangdong Education College, Guangzhou 510303, China)

2 (Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract** The coupled cluster method is improved to calculate  $0^{++}$  glueball mass  $m/e^2$  in 2 + 1 - D  $SU(3)$  lattice gauge theory. In this method, we take the linear combination of connected hollow graphs as trial wavefunction and introduce the average for small wilson loop. The second order and the third order  $0^{++}$  glueball masses ( $m/e^2$ ) as the function of the coupling constant  $\beta = 6/g^2$  show good scaling behavior and good convergent behavior. The vacuum energy  $W_0$  obtained by this method is lower than that by common method.

**Key words** lattice gauge theory, glueball mass, wave function

---

Received 21 June 1999

\* Supported by Doctoral Program Foundation of the Institute of Higher Education, China

1) E-mail: Hui ping 519@163. net. cn