第24卷 第9期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol.24, No.9
2000年9月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Sep., 2000

# 整数自旋协变波函数*

王清海[1]　阮图南[2,1]

1(中国科学技术大学近代物理系　合肥　230027)

2(中国高等科学技术中心　北京　100080)

**摘要**　对高自旋态的Bargmann-Wigner方程的解进行了改造,给出了一套系统地构造高自旋态(整数自旋)协变波函数的新方法. 利用这种方法,分别构造了任意整数自旋粒子的协变波函数.

**关键词**　高自旋态　正则态　螺旋度态　协变波函数

## 1　引言

对于高能物理过程的振幅分析来说,一套好的相对论协变波函数是重要的. 有了波函数的显示,就可以通过运动学的分析对Feynman振幅进行限制,减少自由度数目. 这种分析是不依赖于具体的动力学模型的,因而更具普遍意义. S. U. Chung在这方面做了大量系统而权威的工作[1]. 任意自旋的相对论波动方程最早由Dirac和Fierz等人进行过讨论[2—4],后来,Bargmann和Wigner给出一个系统的表述[5]. 我们的方法是对Bargmann和Wigner方案的改进,并且分别给出任意整数自旋粒子的静止态和运动态波函数的显示. 其中运动态包括正则态和螺度旋态两种. 前者的自旋是沿固定轴投影的,后者是沿运动方向投影,即螺旋度[6].

## 2　Bargmann-Wigner方程

质量为$M$、自旋为$s\geq\frac{1}{2}$的场用秩为$2s$的全对称多重旋量来表示

$$\phi_{\underbrace{\alpha\beta\gamma\cdots\tau}_{2s}}(x).$$

它对于所有指标均满足Dirac方程. 构造正能量平面波解,令

$$\phi_{\alpha\beta\gamma\cdots\tau}(x)=\psi_{\alpha\beta\gamma\cdots\tau}(\boldsymbol{p},E)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}-\mathrm{i}Et}$$

$M\neq0$,可以过渡到静止系$\boldsymbol{p}=0$. 此时对于粒子解($E=M$),可以构造线性独立完备

1999-07-12 收稿

* 国家自然科学基金(19677102和19775044),高等学校博士学科点专项科研基金(97035807),北京正负电子对撞机国家实验室和兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心资助

解如下:

$$\psi^{(0)}_{\alpha\beta\gamma\cdots\tau}(\boldsymbol{0},M) = \chi_+\chi_+\cdots\chi_+,$$

$$\psi^{(1)}_{\alpha\beta\gamma\cdots\tau}(\boldsymbol{0},M) = \frac{1}{\sqrt{2s}}\{\chi_-\chi_+\chi_+\cdots\chi_+ + \chi_+\chi_-\chi_+\cdots\chi_+ + \cdots + \chi_+\cdots\chi_+\chi_-\},$$

$$\vdots$$

$$\psi^{(2s)}_{\alpha\beta\gamma\cdots\tau}(\boldsymbol{0},M) = \chi_-\chi_-\chi_-\cdots\chi_-. \tag{3}$$

式中

$$\chi_+ \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ \chi_- \equiv \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \tag{4}$$

引进 Pauli-Lubanski 协变自旋算符

$$(\Sigma_\rho)_{\alpha\alpha',\beta\beta',\gamma\gamma',\cdots,\tau\tau'} \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_{\rho\mu\nu\lambda}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\alpha',\beta\beta',\gamma\gamma',\cdots,\tau\tau'}\partial_\lambda, \tag{5}$$

式中$\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$为动量表象的自旋算符,定义为

$$(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\alpha',\beta\beta',\cdots,\tau\tau'} \equiv$$

$$\frac{1}{2i}\{(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\alpha\alpha'} + (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\beta\beta'} + \cdots + (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)_{\tau\tau'}\} \tag{6}$$

易见

$$\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\psi^{(i)} = (s-i)\psi^{(i)},\ (i = 0,1,\cdots,2s). \tag{7}$$

可见,这样构造的解确实构成自旋为 $s$ 的极化张量.

## 3 自旋为1粒子的波函数

构造自旋为1的静止粒子波函数为

$$\psi^{(1)}_{+1}(\boldsymbol{0},M) = \chi_+\tilde{\chi}_+,$$

$$\psi^{(1)}_{0}(\boldsymbol{0},M) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+\tilde{\chi}_- + \chi_-\tilde{\chi}_+), \tag{8}$$

$$\psi^{(1)}_{-1}(\boldsymbol{0},M) = \chi_-\tilde{\chi}_-.$$

计算得

$$\psi^{(1)}_{+1}(\boldsymbol{0},M) = \frac{1+\beta}{2}\cdot\frac{1+\sigma_3}{2},$$

$$\psi^{(1)}_{0}(\boldsymbol{0},M) = \frac{1+\beta}{2}\cdot\frac{\sigma_1}{\sqrt{2}}, \tag{9}$$

$$\psi^{(1)}_{-1}(\boldsymbol{0},M) = \frac{1+\beta}{2}\cdot\frac{1-\sigma_3}{2}.$$

运动粒子波函数由 Lorentz 变换得到

$$\psi^{(1)}_m(\boldsymbol{p},E) \equiv \frac{M}{E}\Lambda\psi^{(1)}_m\tilde{\Lambda}, \tag{10}$$

定义式中前面的因子是由 $\Lambda$ 变换引起的归一化系数．这个变换 $\Lambda$ 是把粒子从静止态动量 $\boldsymbol{0}$ 推动到运动态 $\boldsymbol{p}$．不同 $\Lambda$ 的选取对应着不同的运动态的定义．当 $\Lambda$ 选为沿粒子运动方向的推动 $B$ 时，对应的运动波函数为正则态，即

$$\Lambda = B \equiv e^{\frac{\xi}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}}.$$

如果取 $\Lambda$ 为先把 $z$ 轴转到动量 $\boldsymbol{p}$ 方向，再沿运动方向推动使动量由 $\boldsymbol{0}$ 变成 $\boldsymbol{p}$，即

$$\Lambda = BR\ . \tag{12}$$

其中

$$R = e^{-\frac{i\phi}{2}\sigma_3}e^{-\frac{i\theta}{2}\sigma_2}.$$

则可定义螺旋度态．

先考虑正则态．引进电荷共轭算符 $C \equiv \gamma_2\gamma_4$，

$$\because \widetilde{\Lambda} = C^{-1}\Lambda^{-1}C, \tag{14}$$

$$\therefore \psi_m^{(1)}(\boldsymbol{p},E) = \frac{M}{E}\Lambda\psi_m^{(1)}C^{-1}\Lambda^{-1}C.$$

所以运动波函数为

$$\psi_m^{(1)}(\boldsymbol{p},E) = \frac{\not{p} + iM}{4E}\sqrt{2}f_\mu^m\gamma_\mu C. \tag{16}$$

其中 $f_\mu^m$ 的定义为

$$f_\mu^{+1} \equiv \frac{-a_{\mu1} - ia_{\mu2}}{\sqrt{2}},\ f_\mu^0 \equiv a_{\mu3},\ f_\mu^{-1} \equiv \frac{a_{\mu1} - ia_{\mu2}}{\sqrt{2}}$$

$a_{\mu\nu}$ 为 $\gamma_\mu$ 的 Lorentz 变换系数

$$\Lambda\gamma_\mu\Lambda^{-1} = a_{\nu\mu}\gamma_\nu. \tag{18}$$

$\therefore f_\mu^m$ 的显示为

$$\left.\begin{aligned}
(f_\mu^{+1}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{-e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e_1(\cosh\xi - 1)\\e_2(\cosh\xi - 1)\\e\ (\cosh\xi - 1)\\ i\sinh\xi\end{pmatrix},\\
(f_\mu^{0}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + e_3\begin{pmatrix}e_1(\cosh\xi - 1)\\e_2(\cosh\xi - 1)\\e_3(\cosh\xi - 1)\\ i\sinh\xi\end{pmatrix}\\
(f_\mu^{-1}) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{e_1 - ie_2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}e_1(\cosh\xi - 1)\\e_2(\cosh\xi - 1)\\e_3(\cosh\xi - 1)\\ i\sinh\xi\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

再来看螺旋度态，此时 Lorentz 变换取为(12)，同样有

$$\widetilde{\Lambda} = C^{-1}\Lambda^{-1}C\ . \tag{20}$$

所以螺旋度态为

$$\psi_\lambda^{(1)}(\boldsymbol{p},E)=\frac{M}{E}\Lambda\psi_\lambda^{(1)}C^{-1}\Lambda^{-1}C=\frac{\not{p}+\mathrm{i}M}{4E}\sqrt{2}e_\mu^\lambda\gamma_\mu C\ ,\tag{21}$$

其中 $e_\mu^\lambda$ 定义为

$$e_\mu^{+1}\equiv\frac{-e_\mu^1-\mathrm{i}e_\mu^2}{\sqrt{2}},\quad e_\mu^0\equiv e_\mu^3,\quad e_\mu^{-1}\equiv\frac{e_\mu^1-\mathrm{i}e_\mu^2}{\sqrt{2}}.\tag{22}$$

式中的 $e_\mu^i$ 又由下式决定 $BR\gamma_i(BR)^{-1}=e_\mu^i\gamma_\mu$,

$e_\mu^\lambda$ 的表达式为

$$e_\mu^{+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\cos\theta\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\\-\cos\theta\sin\varphi-\mathrm{i}\cos\varphi\\\sin\theta\\0\end{pmatrix},\ e_\mu^0=\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi\cosh\xi\\\sin\theta\sin\varphi\cosh\xi\\\cos\theta\cosh\xi\\\mathrm{i}\sinh\xi\end{pmatrix},$$

$$e_\mu^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\\\cos\theta\sin\varphi-\mathrm{i}\cos\varphi\\-\sin\theta\\0\end{pmatrix}\tag{24}$$

## 4 高自旋波函数

为书写方便,下面简记:

$$\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0})\equiv\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0},M),\quad \psi_m^{(n)}(\boldsymbol{p})\equiv\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{p},E)\ .\tag{25}$$

自旋为2粒子静止波函数可以这样构造:

$$\psi_{+2}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\chi_+\tilde{\chi}_+\chi_+\tilde{\chi}_+,$$

$$\psi_{+1}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{2}(\chi_+\tilde{\chi}_+\chi_+\tilde{\chi}_-+\chi_+\tilde{\chi}_+\chi_-\tilde{\chi}_++\chi_+\tilde{\chi}_-\chi_+\tilde{\chi}_++\chi_-\tilde{\chi}_+\chi_+\tilde{\chi}_+),$$

$$\psi_0^{(2)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{6}}(\chi_+\tilde{\chi}_+\chi_-\tilde{\chi}_-+\chi_+\tilde{\chi}_-\chi_+\tilde{\chi}_-+\chi_-\tilde{\chi}_+\chi_+\tilde{\chi}_-+\chi_+\tilde{\chi}_-\chi_-\tilde{\chi}_++\chi_-\tilde{\chi}_+\chi_-\tilde{\chi}_++\chi_-\tilde{\chi}_-\chi_+\tilde{\chi}_+),$$

$$\psi_{-1}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{2}(\chi_+\tilde{\chi}_-\chi_-\tilde{\chi}_-+\chi_-\tilde{\chi}_+\chi_-\tilde{\chi}_-+\chi_-\tilde{\chi}_-\chi_+\tilde{\chi}_-+\chi_-\tilde{\chi}_-\chi_-\tilde{\chi}_+),$$

$$\psi_{-2}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\chi_-\tilde{\chi}_-\chi_-\tilde{\chi}_-\cdot$$

简单计算得

$$\psi_{+2}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\ \psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0}),$$

$$\psi_{+1}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0})+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0}),$$

$$\psi_0^{(2)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{6}}\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{0})+\sqrt{\frac{2}{3}}\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0})+\frac{1}{\sqrt{6}}\psi_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0})$$

$$\psi_{-1}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{0})+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0}),$$

$$\psi_{-2}^{(2)}(\boldsymbol{0})=\psi_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\ \psi_{-1}^{(1)}(\boldsymbol{0}).$$

各项的系数正是角动量耦合 $\boldsymbol{1}+\boldsymbol{1}\to\boldsymbol{2}$ 的 Clebsch-Gordan 系数，这说明用全对称化来构造的波函数确实描述了自旋为 2 的粒子. 可以类似地构造自旋为 $n$ 的粒子波函数为

$$\begin{aligned}
\psi_n^{(n)}(\boldsymbol{0}) &= \underbrace{\chi_+\widetilde{\chi}_+\cdots\chi_+\widetilde{\chi}_+}_{n\text{对}},\\
\psi_{n-1}^{(n)}(\boldsymbol{0}) &= \frac{1}{\sqrt{2n}}\Big\{\underbrace{\chi_+\widetilde{\chi}_+\cdots\chi_+\widetilde{\chi}_+}_{(n-1)\text{对}}\ \chi_+\widetilde{\chi}_- + \underbrace{\chi_+\widetilde{\chi}_+\cdots\chi_+\widetilde{\chi}_+}_{(n-1)\text{对}}\ \chi_-\widetilde{\chi}_+ + \cdots +\\
&\qquad \chi_-\widetilde{\chi}_+\underbrace{\chi_+\widetilde{\chi}_+\cdots\chi_+\widetilde{\chi}_+}_{(n-1)\text{对}}\Big\},\\
&\ \ \vdots\\
\psi_{-n}^{(n)}(\boldsymbol{0}) &= \underbrace{\chi_-\widetilde{\chi}_-\cdots\chi_-\widetilde{\chi}_-}_{n\text{对}}.
\end{aligned} \tag{28}$$

用数学归纳法可以证明(参见文献[7]或附录 B)

$$\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0}) = \sum_{\lambda=-1}^{1}\langle n-1, m-\lambda;\ 1,\ \lambda \mid n,\ m\rangle \psi_{m-\lambda}^{(n-1)}(\boldsymbol{0})\psi_\lambda^{(1)}(\boldsymbol{0}), \tag{29}$$

式中系数 $\langle n-1, m-\lambda;\ 1,\ \lambda | n,\ m\rangle$ 是角动量态 $|n-1, m-\lambda\rangle$ 和 $|1,\lambda\rangle$ 耦合成 $|n, m\rangle$ 的 Clebsch-Gordan 系数，所以这样构造的 $\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0})$ 确实是角动量态 $|n, m\rangle$. 因此构造的任意整数自旋粒子波函数都是合适的.

还可以把式(29)迭代下去，可以证明(参见文献[7]或附录 B)

$$\begin{aligned}
\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0}) = &\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n=-1}^{1}\left\{\frac{2^n(n+m)!(n-m)!}{(2n)!\prod_{i=1}^{n}[(1+\lambda_i)!(1-\lambda_i)!]}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\,m}\times\\
&\psi_{\lambda_1}^{(1)}(\boldsymbol{0})\psi_{\lambda_2}^{(1)}(\boldsymbol{0})\cdots\psi_{\lambda_n}^{(1)}(\boldsymbol{0}).
\end{aligned} \tag{30}$$

这种形式的波函数 $\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0})$ 中各个的 $\psi_\lambda^{(1)}(\boldsymbol{0})$ 是完全对称的.

运动粒子波函数只要把静止波函数作 Lorentz 变换就能得到

$$\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{p}) \equiv \left(\frac{M}{E}\right)^n \Lambda_n\cdots\Lambda_2\Lambda_1\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0})\widetilde{\Lambda}_1\widetilde{\Lambda}_2\cdots\widetilde{\Lambda}_n, \tag{31}$$

对于正则态，$\Lambda = B$，

$$\begin{aligned}
\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{p}) = &\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n=-1}^{1}\left\{\frac{2^n(n+m)!(n-m)!}{(2n)!\prod_{i=1}^{n}[(1+\lambda_i)!(1-\lambda_i)!]}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\,m}\times\\
&\prod_{j=1}^{n}\frac{\not{p}_j+\mathrm{i}M}{2\sqrt{2E}}f_{\mu_j}^{\lambda_j}\gamma_{\mu_j}^{(j)}C_j
\end{aligned}$$

式中

$$\not{p}_j \equiv p_\mu\gamma_\mu^{(j)}, \tag{33}$$

$$C_j \equiv \gamma_2^{(j)}\gamma_4^{(j)}, \tag{34}$$

对于螺旋度态，$\Lambda = BR$，则有

$$\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{p}) = \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n=-1}^{1}\left\{\frac{2^n(n+m)!(n-m)!}{(2n)!\prod_{i=1}^{n}[(1+\lambda_i)!(1-\lambda_i)!]}\right\}^{\frac{1}{2}}\delta_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n,\,m}\times$$

$$\prod_{j=1}^{n}\frac{\not p_j+\mathrm{i}M}{2\sqrt{2}E}e_{\mu_j}^{\lambda_j}\gamma_{\mu_j}^{(j)}C_j. \tag{35}$$

本工作是应高能所J/ψ物理组分析高能物理实验的要求而进行的,感谢祝玉灿教授的指导和邹冰松教授的富有启发性的讨论. 还要感谢S. U. Chung教授提供系统的资料和文献.

## 参考文献(References)


1 Chung S U. CERN Report, CERN, 1971, 71—8
2 Dirac P A M. Proc. Roy. Soc., 1936, **A155**:447
3 Fierz M. Helv. Phys. Acta, 1939, **12**:3
4 Fierz M, Pauli W. Proc. Roy. Soc., 1939, **A173**:211
5 Bargmann V, Wigner E P. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), 1948, **34**:211
6 Jacob M, Wick G C. Ann. Phys. (U S A), 1959, **404**
7 WANG QingHai. Master Degree Dissertation of the University of Science and Technology of China (in Chinese), 1999, **43**
(王清海. 中国科学技术大学硕士学位论文,1999,43)


## 附录A 高自旋波函数的证明

采用数学归纳法:

(1) 已知(8)式那样的 $\psi_m^{(1)}(\boldsymbol{0})$是自旋为1的静止粒子波函数,自旋第三分量为 $m$.

(2) 还已知(26)式那样的 $\psi_m^{(2)}(\boldsymbol{0})$是自旋为2的静止粒子波函数,自旋第三分量为 $m$.

(3) 假设(28)式那样的波函数 $\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0})$描述了一个静止的自旋为 $n$ 的粒子,自旋第三分量为 $m$.

(4) 我们来证明下述用同样方法构造的 $\psi_m^{(n+1)}(\boldsymbol{0})$描述了自旋为$(n+1)$的静止粒子,自旋第三分量为 $m$.

$$\psi_{n+1}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\underbrace{\chi_+\tilde{\chi}_+\cdots\chi_+\tilde{\chi}_+}_{n},$$

$$\psi_{n}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}}\Big\{\underbrace{\chi_+\tilde{\chi}_+\cdots\chi_+\tilde{\chi}_+}_{n\text{对}}\chi_+\tilde{\chi}_-+(\text{第一项的全排列})\Big\},$$

$$\psi_{n-2m}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{C_{2n+2}^{2m+1}}}$$

$$\Big\{\underbrace{\chi_+\tilde{\chi}_+\cdots\chi_+\tilde{\chi}_+}_{(n-m)\text{对}}\chi_+\tilde{\chi}_-\underbrace{\chi_-\tilde{\chi}_-\cdots\chi_-\tilde{\chi}_-}_{m\text{对}}+(\text{第一项的全排列})\Big\},$$

$$\psi_{n-2m-1}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\frac{1}{\sqrt{C_{2n+2}^{2m+2}}}\times$$

$$\Big\{\underbrace{\chi_+\tilde{\chi}_+\cdots\chi_+\tilde{\chi}_+}_{(n-m)\text{对}}\underbrace{\chi_-\tilde{\chi}_-\cdots\chi_-\tilde{\chi}_-}_{(m+1)\text{对}}+(\text{第一项的全排列})\Big\},$$

$$\psi_{-n-1}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\underbrace{\chi_-\tilde{\chi}_-\cdots\chi_-\tilde{\chi}_-}_{(n+1)\text{对}}. \tag{36}$$

式中 $C_n^m$ 为组合数. 化简并与 $\psi_m^{(n)}(\boldsymbol{0})$比较得:

$$\psi_{n+1}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\psi_n^{(n)}(\boldsymbol{0})\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0}),$$

$$\psi_{n}^{(n+1)}(\boldsymbol{0})=\sqrt{\frac{1}{n+1}}\psi_n^{(n)}(\boldsymbol{0})\psi_0^{(1)}(\boldsymbol{0})+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\psi_{n-1}^{(n)}(\boldsymbol{0})\psi_{+1}^{(1)}(\boldsymbol{0}),$$

$$\psi^{(n+1)}_{n-2m}(0)=\sqrt{\frac{2m(2m+1)}{(2n+1)(2n+2)}}\psi^{(n)}_{n-2m+1}(0)\psi^{(1)}_{-1}(0)+$$
$$\sqrt{\frac{(2m+1)(2n-2m+1)}{(n+1)(2n+2)}}\psi^{(n)}_{n-2m}(0)\psi^{(1)}_{0}(0)+$$
$$\sqrt{\frac{(2n-2m)(2n-2m+1)}{(2n+1)(2n+2)}}\psi^{(n)}_{n-2m-1}(0)\psi^{(1)}_{+1}(0),$$
$$\psi^{(n+1)}_{n-2m-1}(0)=\sqrt{\frac{(2m+1)(2m+2)}{(2n+1)(2n+2)}}\psi^{(n)}_{n-2m}(0)\psi^{(1)}_{-1}(0)+$$
$$\sqrt{\frac{(2m+1)(2n-2m)}{(n+1)(2n+1)}}\psi^{(n)}_{n-2m-1}(0)\psi^{(1)}_{0}(0)+$$
$$\sqrt{\frac{(2n-2m)(2n-2m-1)}{(2n+1)(2n+2)}}\psi^{(n)}_{n-2m-2}(0)\psi^{(1)}_{+1}(0),$$
$$\psi^{(n+1)}_{-n-1}(0)=\psi^{(n)}_{-n}(0)\psi^{(1)}_{-1}(0). \tag{37}$$

各项前面的系数正是角动量耦合 $n+l\to n'$，$(n'=n+1)$的 C－G 系数．即：

$$\psi^{(n+1)}_{m}(0)=\sum_{\lambda=-1}\langle n,m-\lambda;1,\lambda\mid n+1,m\rangle\psi^{(n+1)}_{m-\lambda}(0)\psi^{(1)}_{\lambda}(0). \tag{38}$$

所以 $\psi^{(n+1)}_{m}(0)$确实是自旋为 $n+1$，自旋第三分量为 $m$ 的静止粒子波函数．这样由数学归纳法，就证明了我们构造的 $\psi^{(n)}_{m}(0)$对任意整数自旋的粒子波函数都是合适的．

## 附录 B 迭代 C－G 系数的证明

把式(29)迭代下去：

$$\psi^{(n)}_{m}(0)=\sum_{\lambda_n=-1}^{+1}\langle n-1,m-\lambda_n;1,\lambda_n\mid n,m\rangle\psi^{(n-1)}_{m-\lambda_n}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_n}(0)=$$

$$\sum_{\lambda_n,\lambda_{n-1}=1}^{+1}\langle n-1,m-\lambda_n;1,\lambda_n\mid n,m\rangle\langle n-2,m-\lambda_n-\lambda_{n-1};1,\lambda_{n-1}\mid n-1,m-\lambda_n\rangle\times$$
$$\psi^{(n-2)}_{m-\lambda_n-\lambda_{n-1}}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_{n-1}}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_n}(0)$$

$$=$$

$$\sum_{\lambda_n,\lambda_{n-1},\cdots,\lambda_2=1}^{+1}\langle n-1,m-\lambda_n;1,\lambda_n\mid n,m\rangle\langle n-2,m-\lambda_n-\lambda_{n-1};1,\lambda_{n-1}\mid n-1,m-\lambda_n\rangle\cdots\times$$
$$\langle 1,m-\lambda_n-\lambda_{n-1}-\cdots-\lambda_2;1,\lambda_2\mid 2,m-\lambda_n-\lambda_{n-1}-\cdots-\lambda_3\rangle\times \tag{39}$$
$$\psi^{(1)}_{m-\lambda_n-\lambda_{n-1}-\cdots-\lambda_2}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_3}(0)\cdots\psi^{(1)}_{\lambda_{n-1}}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_n}(0)=$$
$$\sum_{\lambda_n,\lambda_{n-1},\cdots,\lambda_1=-1}^{+1}\langle n-1,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1};1,\lambda_n\mid n,m\rangle\times$$
$$\langle n-2,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-2};1,\lambda_{n-1}\mid n-1,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}\rangle\cdots\times$$
$$\langle 1,\lambda_1;1,\lambda_2\mid 2,\lambda_1+\lambda_2\rangle\delta_{m,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$
$$\psi^{(1)}_{\lambda_1}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_3}(0)\cdots\psi^{(1)}_{\lambda_{n-1}}(0)\psi^{(1)}_{\lambda_n}(0).$$

C－G 系数的显示为：

$$\langle j_1,m_1;j_2,m_2\mid j_1+j_2,m_1+m_2\rangle=$$
$$\sqrt{\frac{(2j_1)!}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!}\frac{(2j_2)!}{(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!}}\times$$

$$\sqrt{\frac{(j_1+j_2+m_1+m_2)!(j_1+j_2-m_1-m_2)!}{[2(j_1+j_2)]!}},$$

$$\therefore \langle 1,\lambda_1;1,\lambda_2 \mid 2,\lambda_1+\lambda_2\rangle\langle 2,\lambda_1+\lambda_2;1,\lambda_3 \mid 3,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\rangle =$$

$$\sqrt{\frac{2!\times 2!}{4!}}\sqrt{\frac{(2+\lambda_1+\lambda_2)!(2-\lambda_1-\lambda_2)!}{(1+\lambda_1)!(1-\lambda_1)!(1+\lambda_2)!(1-\lambda_2)!}}\times$$

$$\sqrt{\frac{2!\times 4!}{6!}}\sqrt{\frac{(3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)!(3-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)!}{(2+\lambda_1+\lambda_2)!(2-\lambda_1-\lambda_2)!(1+\lambda_3)!(1-\lambda_3)!}}=$$

$$\sqrt{\frac{2^3}{(2\times 3)!}}\sqrt{\frac{(3+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)!(3-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)!}{(1+\lambda_1)!(1-\lambda_1)!(1+\lambda_2)!(1-\lambda_2)!(1+\lambda_3)!(1-\lambda_3)!}}$$

以此类推可得:

$$\langle 1,\lambda_1;1,\lambda_2 \mid 2,\lambda_1+\lambda_2\rangle\langle 2,\lambda_1+\lambda_2;1,\lambda_3 \mid 2,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\rangle\cdots\times$$

$$\langle n-1,\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1};1,\lambda_n \mid n,m\rangle = \sqrt{\frac{2^n(n+m)!(n-m)!}{(2n)!\prod_{i=1}^{n}[(1+\lambda_i)!(1-\lambda_i)!]}} \tag{40}$$

把(40)带入(39)即可得到式(30).

## Covariant Wave Functions of Integral Spin Particles*

WANG QingHai[1] RUAN TuNan[2,1]

1 (*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei*, 230027, *China*)

2 (*CCAST (World Lab.), Beijing*, 100080, *China*)

**Abstract** It is important to give a set of wave functions of arbitrary spin particles for the analysis of amplitudes in high energy processes. We enhanced the method of Bargmann-Wigner about high-spin states and created a new method. In this way, we wrote the covariant states of any integral spin, including canonical states and helicity states.

**Key words** high-spin state, canonical state, helicity state, covariant wave function

Received 12 July 1999

* Supported by NSFC(19677102, 19775044), Doctoral Program Foundation of the Institution of Higher Education of China (97035807), BEPC National Lab. of China, and Center for Theoretical Nuclear Physics of Lanzhou Heavy Ion Accelerator National Lab. of China