

400GeV/c pp 碰撞自仿射多重分形分析*

吴冲 王韶舜

(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230027)

摘要 利用分形来研究高能碰撞多粒子产生机制是新兴的交叉科学,而获取多粒子产生的多重分形谱对了解高能碰撞机制很重要. 本文将改进的连续阶数阶乘矩方法应用于400GeV/c pp碰撞多重产生的自仿射分析中,首次得到了自仿射多重分形谱.

关键词 间歇 自仿射分形 连续阶数阶乘矩 多重分形谱

1 引言

在 高能碰撞多粒子产生中,所谓间歇现象是研究归一化阶乘矩^[1,2]:

$$F_q(M) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\langle n_m(n_m-1)\cdots(n_m-q+1) \rangle}{\langle n_m \rangle^q} \quad (1)$$

随所研究的相空间原胞大小的变化存在标度不变性,即

$$F_q(M) \propto (\delta y)^{-\phi_q}, \quad (2)$$

其中, M 是将相空间分割的原胞的数目, n_m 是第 m 个子间隔的粒子数, $\langle \cdots \rangle$ 表示对事件样本的平均, ϕ_q 是间歇指数, δy 是原胞的大小. 可以证明归一化阶乘矩抑制了统计噪声.

实验发现,随着相空间的分割越来越细,一维阶乘矩不再具有标度不变性,而是出现了饱和. Ochs 指出,这可能是间歇存在于高维相空间中,将它投影到一维而出现饱和现象^[3]. 但实验发现,即使是三维, $\ln F_q - \ln M$ 也不满足反常标度性所要求的直线,而是向上弯^[4].

吴元芳、刘连寿^[5]认识到这种情况可能与高能碰撞多粒子产生的末态相空间的各向异性有关. 我们知道,高能碰撞多粒子末态相空间高度各向异性:当碰撞质心系能量从几个 GeV 提高到几个 TeV 时,末态粒子的纵向动量相应提高,但横向动量却变化不大,平均横动量始终保持在 0.3—0.5 GeV/c,这表明末态相空间是高度各向异性的. 由于相空间各向异性,其中的动力学起伏应是在不同方向有不同标度的自仿射分形. 也就是说,只有将相空间在纵横方向上按特定的不同比例收缩时,才能观察到它的反常标度性, $\ln F_q -$

1999-08-16 收稿.

* 国家自然科学基金资助(19975045)

$\ln M$ 才是线性的.

NA22^[6] 和 NA27^[7] 的初步的自仿射分析结果都支持了这种假设, 但分析结果只给出了 $q=2$ 的间歇指数, 这对于真正研究高能碰撞的多重产生的自仿射分形是远远不够的.

对各向异性的自仿射分形, 用各向同性的箱覆盖无法得到确定的分形维数. 但如果我们用所求得的哈斯特(Hurst)指数对相空间进行各向异性分割, 我们可以得到体系的各阶 Renyi 维数, 进而得到系统的分形谱.

为了对高能碰撞的多粒子产生有更深刻的了解, 为了得到自仿射多重分形谱, 为理论发展提供实验依据, 不仅需要得到 q 是整数的阶乘矩, 而且还要将阶乘矩的矩阶数连续化.

2 连续阶数阶乘矩

R. C. Hwa 提出了连续阶数阶乘矩的方法^[8], 该方法是将多重数分布按负二项式分布来展开, 展开式系数 a_j 的个数为 $N+1$, 其中 N 为多重数分布的最大多重数. 但 M. C. 模拟显示出该方法还不能很好地消除统计噪声, 因而还不能应用于实际的实验数据. 其原因是该方法要求展开式完全准确地穿过所有的实验点, 使得展开系数 a_j 中包含了非常大的噪声信号, 从而所得到的是一组数值非常大的正、负号交替出现的 a_j , 导致 F_q 的计算结果很不稳定.

为此, 张杰、王韶舜^[9] 提出了用较少参数 a_j 的负二项式分布的最大似然法来拟合实验数据.

$$\tilde{P}_n = \sum_{j=0}^J a_j P_n^{\text{NB}}(k_j, x_j) \quad (J < N),$$

其中

$$P_n^{\text{NB}}(k_j, x_j) = \frac{\Gamma(n+k_j)}{\Gamma(n+1)\Gamma(k_j)} \left(\frac{k_j}{k_j+x_j}\right)^{k_j} \left(\frac{x_j}{k_j+x_j}\right)^n$$

$$x_j = x(1+\Delta_j), \quad k_j = K(1+\Delta_j),$$

$$x = \langle n \rangle = \sum_{n=0}^N n P_n, \quad K = (F_2 - 1)^{-1}, \quad F_2 = \langle n(n-1) \rangle / x^2$$

$$\Delta_j = \Delta \left(-\frac{1}{2} + \frac{j}{J} \right) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, J)$$

Δ 定为 0.5, Δ_j 在 $-\Delta/2$ 到 $\Delta/2$ 之间等间隔分布. 拟合对 $N+1$ 个 P_n 点进行, 并采用最大似然法, 即选择 a_j 以使下列似然函数取最大值:

$$L = \frac{N_{\text{ev}}!}{N!} \prod_{n=0}^N (N_{\text{ev}} \tilde{P}_n)^{N_n},$$

其中 N_{ev} 为总的事例数, N_n 为多重数为 n 的事例数.

得到 a_j 后, 可按以下公式求得

$$F(q) = f(q)/(f(1))^q, \quad (6)$$

其中

$$f(q) = \sum_{j=0}^J a_j f(q, j), \quad (7)$$

$$f(q, j) = \left(\frac{x_j}{k_j}\right)^q \frac{\Gamma(q + k_j)}{\Gamma(k_j)}. \quad (8)$$

3 自仿射分析

本文利用 CERN NA27 合作组提供的 LEBC 泡室照片测量了 400GeV/c pp 碰撞产生的带电粒子赝快度分布和方位角分布. 共测量了 3730 个多重数分布 $N_{ch} \geq 4$ 的事例, 其测量方法详见文献[10]. 对于 η 空间, $\Delta\eta = 4$ ($-2 \leq \eta \leq 2$), 对于 ϕ 空间, $\Delta\phi = 2\pi$.

在实验数据分析中, 为了消除赝快度和方位角分布起伏的影响, 采用了归一化变量^[11]:

$$x(y) = \int_{y_{\min}}^y \rho(y') dy' / \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \rho(y') dy'. \quad (9)$$

对赝快度, y 取 $[-2, 2]$, 对方位角, y 取 $[0, 2\pi]$. x 在 $[0, 1]$ 区间是均匀分布.

3.1 NA27 的连续阶数阶乘矩

我们曾对 NA27 的实验数据进行了自仿射分析^[7], 得到哈斯特指数是 $H_{\eta, \phi} = 0.74$. 对相空间进行分割时, $M_\eta = M_\phi^{t_\eta}$, 其中 M_ϕ 是整数, 从 1 到 20, M_η 为非整数, 即从 1 到 9.18. 采用(9)式定义累积变量时, 可以得到相空间尺度连续变化时的阶乘矩^[12]. 也就是在阶乘矩的定义式中移动划分原胞的起点或改变进行平均的原胞数目 M , 都不会影响阶乘矩的反常标度性质. 取 M 个原胞来平均, 和少取几个原胞来平均, 最终得到的反常标度率都一样. 这样, 对 η 空间的分割我们只需取分割的整数部分. 例如对 $M_\phi = 20$, 根据自仿射分析 $M_\eta = 20^{0.74} \approx 9.18$, 即可取 $M_\eta = 9$ 个原胞来平均将不影响自仿射分析的标度行为.

将 η, ϕ 空间按自仿射分析要求划分成 $M = M_\phi \times M_\eta$ 个子区间, 在子区间 m 内统计出实验的多重数分布 $P_{n,m}$. 由(4)式计算出 $P_{n,m}^{NB}(k_{j,m}, x_{j,m})$. 根据(3)式和(5)式用最大似然函数法确定 $a_{j,m}$ ($j=0, 1, \dots, J$). 当 $M_\phi = 1$ 时, 取 $J = 4$; 当 M_ϕ 为其它值时, 取 $J = 2$, a_j 的拟合步长为 0.0001. 然后由(7)式计算出区间 m 内的矩 $f_m(q)$, 最后对各子区间求平均

$$F(q, M) = \frac{1}{M_t} \sum_{m=1}^{M_t} \frac{f_m(q)}{[f_m(1)]^q}, \quad (10)$$

其中 $M_t = M_\phi \times \text{int}(M_\eta)$. 最后, 得到 q 从 -1 到 4, 间隔为 0.2 的自仿射阶乘矩. 图 1 是 $q = 2$ 和 3 时用连续阶数阶乘矩方法得到的自仿射阶乘矩. 图 2 是用普通自仿射方法得到的结果. 我们对这两种方法得到 $\ln F(q) - \ln M$ 进行了拟合, 拟合得到的间歇指数见表 1, 可以看到两者的结果基本上是完全一致的 (最大相对误差为 3.2%), 说明采用最大似

然法是完全可行的.

表 1 采用连续阶数阶乘矩和普通自仿射分析得到的间歇指数

q	连续阶数阶乘矩 ϕ_q	普通自仿射 ϕ_q
2	0.0496 ± 0.0056	0.0483 ± 0.0020
3	0.1270 ± 0.0140	0.1310 ± 0.0180

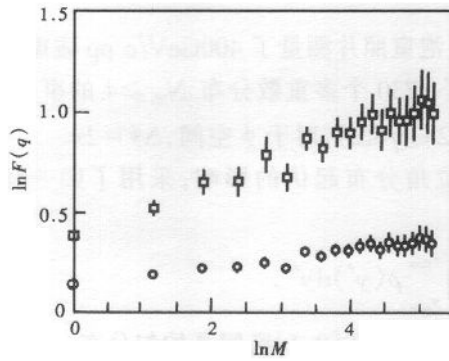


图 1 连续阶数阶乘矩方法得到的 $F(q)$
 $\circ q=2, \square q=3.$

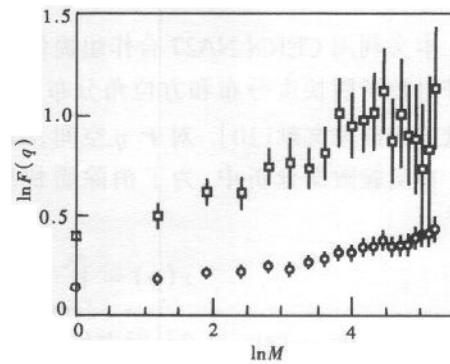


图 2 普通自仿射方法得到的 $F(q)$
 $\circ q=2, \square q=3.$

3.2 自仿射分析的分形维数

通过拟合,得到了连续阶数阶乘矩的不同 q 值下的间歇指数 ϕ_q . 利用关系式 $\tau(q) = q - 1 - \phi_q$ 和 $D(q) = \tau(q)/(q - 1)$ 可计算出广义分形维数. 图 3 是广义分形维数随 q 的变化, $D(q)$ 随 q 的增加而减小说明 NA27 实验的多粒子产生过程是自仿射多重分形.

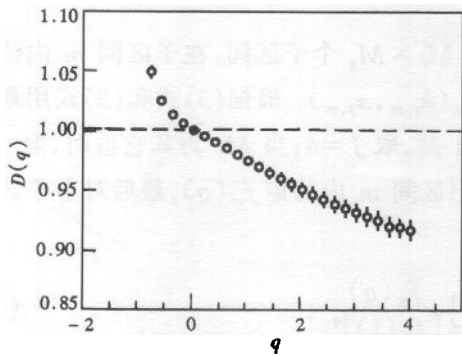


图 3 广义分形维数 $D(q)$ 与 q 的关系

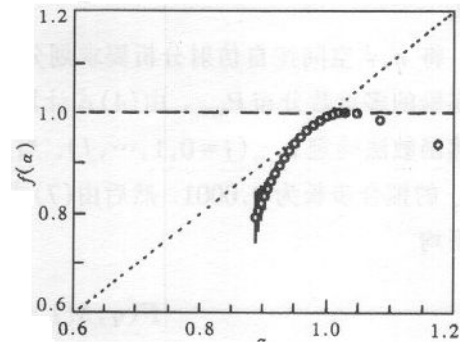


图 4 多重分形谱 $f(\alpha)$ 与 α 的关系

3.3 多重分形谱

通过关系式 $\tau(q) = q - 1 - \phi_q$, $\alpha = d\tau(q)/dq$, $f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$, 可以计算出 $f(\alpha)$, 进而得到多重分形谱, 见图4. 从多重分形谱来看, 400GeV/c pp碰撞的多粒子产生过程是复杂的自仿射多重分形过程.

4 结论

利用改进的连续阶数阶乘矩的方法对 400GeV/c pp碰撞多重产生的实验数据进行了自仿射分析, 得到了自仿射的广义分形维数和多重分形谱, 显示出 400GeV/c pp碰撞过程是自仿射多重分形.

作者对 CERN NA27 合作组提供 LEBC 泡室照片和测量设备深表感谢.

参考文献(References)

- 1 Bialas A, Peschanski R. Nucl. Phys., 1986, **B273**:703
- 2 Bialas A, Peschanski R. Nucl. Phys., 1988, **B308**:857
- 3 Ochs W. Phys. Lett., 1990, **B247**:101
- 4 Agababyan N M et al (NA22). Z. Phys., 1993, **C59**:405
- 5 WU YuanFang, LIU LianShou. Phys. Rev. Lett., 1993, **70**:3197
- 6 Agababyan N M et al (NA22). Phys. Lett., 1996, **B382**:305
- 7 WANG ShaoShun, WANG ZhaoMin, WU Chong. Phys. Lett., 1997, **B410**:323
- 8 HIWA R C. Phys. Rev., 1995, **D51**:3323
- 9 ZHANG Jie, WANG ShaoShun. Phys. Rev., 1997, **D55**:1257
WANG Shao Shun et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1997, **21**:769
(王韶舜等. 高能物理与核物理, 1997, **21**:769)
- 10 WANG ShaoShun et al., Phys. Rev., 1994, **D49**:5785
WANG ShaoShun et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1991, **15**:1057
(王韶舜等. 高能物理与核物理, 1991, **15**:1057)
- 11 Ochs W. Z. Phys., 1991, **C50**:339
- 12 ZHANG Yang, WU YuanFang, LIU LianShou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, **20**:715
(张阳, 吴元芳, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1996, **20**:715)

Self-affine Multifractal Analysis in 400GeV/c pp Collisions*

WU Chong WANG ShaoShun

(*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China*)

Abstract The investigation of the multiparticle production mechanism in high energy collisions by fractal is a new crossing science. It is very important to get the multiparticle multifractal spectrum to understand the collision mechanism. An improved factorial moments of continuous order method has been applied in selfaffine analysis of multiplicity production in 400GeV/c pp collisions. A self-affine multifractal spectrum has been obtained for the first time.

Key words intermittency, self-affine fractal, factorial moments of continuous order, multifractal spectrum

Received 16 August 1999

* Supported by National Natural Science Foundation of China(19975045)