第24卷 第6期 高能物理与核物理 Vol.24, No.6
2000年6月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS June, 2000

相对论类空方程*

王安民[1,2,3,1)] 阮图南[2,3]
1(中国科学技术大学量子通讯和量子计算开放研究实验室 合肥 四号信箱 230027)
2(中国高等科学技术中心(CCAST) 北京 100080)
3(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230027)

摘要 根据Dirac类空自洽性条件的思想,通过引入类空因子定义了类空波函数. 它的物理部分与Bethe-Salpeter波函数相一致. 利用普适的相互作用核的重排技术,导出了对于束缚态和散射态的相对论类空方程,并且将它们推广到多粒子的情形. 也得到了束缚态类空波函数的归一化条件和散射态类空方程的非齐次项的解. 因此,建立起了相对论类空方程体系.

关键词 Bether-Salpeter方程 量子场论 束缚态 散射态 复合粒子

1 引言

多粒子体系的量子理论在低温物理、核物理、固态物理、原子物理和分子物理等几乎所有量子物理能够涉及到的领域都有广泛的应用. 本文从量子场论的观点,将所关心的焦点集中在多粒子体系的束缚态和散射态的相对论量子理论中. 因为其在研究基本粒子的结构、相互作用和建立复合粒子量子场论方面非常重要. 众所周知,最为著名的工作之一是Bethe-Salpeter(BS)在Feymann场论的基础上导出的相对论束缚态和散射态方程[1]:

$$\chi_k(x_1,x_2) = \chi_0(x_1,x_2) - \int d^4x_3 d^4x_4 d^4x_5 d^4x_6 S'^A_F(x_1,x_3) S'^B_F(x_2,x_4)\overline{G}(x_3x_4,x_5x_6)\chi_k(x_5x_6). \tag{1}$$

对于束缚态 $\chi_0(x_1,x_2)$取为零. 在此,S'_F是重整化后的严格的费米子传播子,$\overline{G}$ 是Bethe-Salpeter相互作用不可约核,而 χ_k 称为Bethe-Salpeter波函数,其定义为

$$\chi_{BS}(x_1,x_2) = \langle 0|T\psi_A(x_1)\psi_B(x_2)|k\rangle, \tag{2}$$

其中 T 为编时乘积算子,$\psi(x)$是费米旋量场,$|k\rangle$是包括体系四动量、自旋以及其他被需要的算子以形成的力学量完全集合的本征态. 在研究束缚态问题中BS方程被广泛地应用,由BS方程导出的结果在量子电动力学中与实验较好的相符. 但也发现由于相对时间等非物理自由度的存在导致了BS方程具有负模解,以及鬼态的出现破坏了相对论量子

1999-06-17 收稿
* 国家自然科学基金资助(69773052)
1) E-mail: anmwang@ustc.edu.cn

理论的基本表述[2]. 为了克服这些困难,物理学家已经作出了许多的努力. 他们的工作大致可以分为两类. 一类是试图寻找改进的 Bethe-Salpeter 方程或新的方程取代 Bethe-Salpeter 方程[3]. 另一类是研究 Bethe-Salpeter 方程的三维约化[4,5]. 后者已经被更为充分地研究,并且在夸克和强子束缚态研究中有更多的应用. 对此,可参见简洁的评论[6]以及最近的进展[7]. 这些物理学家已经取得了一系列有价值的成果. 明显地,在相对论理论中,具有明显 Lorentz 不变形式的 Bethe-Salpeter 方程才是更为令人满意的. 而且,尽管消去相对时间(或动量)在物理思想上是清楚的,但似乎其背后应当存在更为深刻和内在的物理原理. 在我们看来,这个原理可以认为就是 Dirac 在 1947 年就提出的原则[8],我们称之为 Dirac 类空自洽性条件.

基于 Dirac 这一类空自洽性条件的思想,我们想要导出自动克服鬼态困难和具有明显 Lorentz 协变形式的 Bethe-Salpeter 方程的类空推广,并且称之为相对论类空方程. 它的一个优点是能够协变地丢掉高阶相互作用的贡献,这在量子场论的微扰展开和重整化中非常重要. 实际上类空方程和三维 Bethe-Salpeter 方程有着非常紧密的关系,因为它是后者最直接和可能的协变推广. 我们也将表明它的确是一个有用的推广.

2 类空波函数

为克服 BS 方程存在的困难,我们遵循 Dirac 类空条件,引入如下定义的类空波函数[5]:

$$\phi(x) = \theta(x^2)\chi_{BS}(x) = \theta(x^2)\langle 0|\psi_A(x_1)\psi_B(x_2)|\kappa\rangle, \tag{3}$$

其中 $\chi_{BS}(x)$是两个费米子 BS 波函数的相对运动部分. 而类空因子为 $\theta(x^2)$是通常的阶跃函数,其中 $x^2 = \boldsymbol{x}^2 - t^2$. 显然在类空区域之内类空波函数与 BS 波函数一致,但在其他区域它为零. 特别是类空因子的存在导致编时算子失去作用. 在计算中,它能够带来方便. 事实上,类空因子的作用之一正是如此,它限制了由于 Feymann 场论协变化所导致的过于扩大的时间积分区域. 再与两粒子的 Schrödinger 波函数相比较,能够看到类空波函数在相对论协变的意义上与之等价,换言之类空波函数是 Schrödinger 波函数的相对论推广. 所以人们能够找到一个恰当的坐标系,以使得类空波函数能够被变换到等时波函数或其他约化的三维波函数. 而且,由于类空波函数与 BS 波函数有着直接和确定的关系,我们能够在 Feymann 相对论场论的体系中研究它. 这意味着我们能够更为方便地应用已知的关于量子化和重整化的理论,从而建立起复合粒子量子场论.

基于类空因子的定义,我们能够认为它是高度为 1 和宽度为 $2(|\boldsymbol{x}| - \eta)$的矩形脉冲,其中 η 是任意趋近于零的非零正数. 在研究束缚态中人们常常用到动量表象. 所以我们有必要给出类空因子的 Fourier 变换 $\Theta(p)$

$$\Theta(p) = -8\pi\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|p_0|\eta}\frac{1}{(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 + \mathrm{i}\epsilon)^2} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}|p_0|\eta}\frac{1}{(p_0^2 - \boldsymbol{p}^2 - \mathrm{i}\epsilon)^2}\right]. \tag{4}$$

根据卷积定理,易得类空波函数的动量表象中的形式为

$$\phi(p) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int\Theta(p - q)\chi_{BS}(q)\mathrm{d}^4 q. \tag{5}$$

利用类空因子 Fourier 变换的性质 $\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}p_0\Theta(p) = \delta(\boldsymbol{p})$ 以及 Bethe-Salpeter 波函数 χ_{BS} 和一类 Schrödinger 波函数 $\chi_{SC}(\boldsymbol{p})$[9] 之间的关系 $\frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p_0\chi_{BS}(p) = \chi_{SC}(\boldsymbol{p})$,可以得到

$$\int \mathrm{d}p_0\phi(p) = \chi_{SC}(\boldsymbol{p}). \tag{6}$$

十分清楚的是这一结论表明 Bethe-Salpeter 波函数的物理内容与类空波函数的物理内容在通常的意义下是一致的. 这亦是我们要引入类空波函数的理由之一.

3 束缚态类空方程

已知两体(费米子)的 Green 函数满足

$$K = K_0 - K_0\overline{G}K = K_0 - K\overline{G}K_0, K_0(x_1x_2;x_3x_4) = S_F'^A(x_1,x_3)S_F'^B(x_2,x_4), \tag{7}$$

其中 S_F' 是精确的费米子传播子,$\overline{G}$ 是所有不可约图之和,并且在 K 中所有的物理量应当是已重整化了的. 在上述方程中已经使用了用矩阵表述以简化表达式. 如果引入不变散射振幅 $T=\overline{G}-\overline{G}K_0T=\overline{G}-TK_0\overline{G}$,则能够重写上式为 $K=K_0-K_0TK_0$. 然后,假定通过一个新的传播子 K'_0 传递相互作用,即 $T=\overline{G}'-\overline{G}'K'_0T=\overline{G}'-TK'_0\overline{G}'$. 那么我们容易证明经过重排,给出了确定的不可约核 $\overline{G}'=\overline{G}-\overline{G}'(K_0-K'_0)\overline{G}=\overline{G}-\overline{G}(K_0-K'_0)\overline{G}'$. 显然不同的 K'_0 会得出不同的结果,但新的不可约核解的存在是必须的.

为了得到类空两体 Green 函数,假定 $K'_0=U_l\theta K_0$ 和 $K''_0=K_0\theta U_r$. 注意算符记号中 θ 仅是一个数. 至于 U_l,U_r 的定义将在以下给出. 那么能够导出

$$\begin{aligned} K &= K_0[1-\overline{G}'(K_0-U_l\theta K_0)]-K_0\overline{G}'U_l\theta K = \\ &\quad [1-(K_0-K_0\theta U_r)\overline{G}'']K_0-K\theta U_r\overline{G}''K_0, \end{aligned} \tag{8}$$

其中重排核 $\overline{G}',\overline{G}''$ 满足

$$\overline{G}' = \overline{G}-\overline{G}(K_0-U_l\theta K_0)\overline{G}' = \overline{G}-\overline{G}'(K_0-U_l\theta K_0)\overline{G}, \tag{9}$$

$$\overline{G}'' = \overline{G}-\overline{G}(K_0-K_0\theta U_r)\overline{G}'' = \overline{G}-\overline{G}''(K_0-K_0\theta U_r)\overline{G}. \tag{10}$$

式中因子 U_l,U_r 被独立地和一定程度上任意地选择,但必须保证式(9)和(10)的解存在. 通常,这由积分方程的理论提供保证.

利用相互作用核的重排方程能够直接得到类空方程及其共轭方程

$$\phi = -\theta K_0\overline{G}'U_l\phi, \qquad \overline{\phi} = -\overline{\phi}U_r\overline{G}''K_0\theta. \tag{11}$$

设在束缚态能量处,U_l,U_r 是非奇异的,能够证明对于不同的 U_l 或 U_r 的选择,所对应的类空方程的解相同. 这意味着我们的积分方程的有效核在物理上是确定的,或粗略地说,是唯一的. 对于新的重排核,我们认为有两个要求. 一个是它有清楚的物理意义,另一个是它使得方程的形式尽可能地简单. 所以选择

$$U_l = K_0\theta K_0^{-1}, \qquad U_r = K_0^{-1}\theta K_0. \tag{12}$$

由此得知

$$\phi = -K_0 V\phi, \qquad \bar{\phi} = -\bar{\phi} V K_0,$$

其中 V 对应于 Bethe-Salpeter 方程中的 $\overline{G}$,而且它在类空方程以及它的共轭方程中是相同的.

$$= K_0^{-1}\theta K_0 I K_0 \theta K_0^{-1} \qquad I = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - K_0\theta K_0^{-1}\theta K_0)I. \tag{14}$$

容易得出方程(13)的微分积分形式的方程

$$[(m_1 + \hat{\partial}_1)(m_2 + \hat{\partial}_2) - V]\phi = 0, \quad \bar{\phi}[(m_1 - \overleftarrow{\hat{\partial}_1})(m_2 - \overleftarrow{\hat{\partial}_2}) - V] = 0, \tag{15}$$

因而 V 可以被视为类空方程的相对论位势.

为了实际使用的方便,也能够径取 $U_l = U_r = 1$,那么类空方程有如下最为简单的形式

$$\phi = -K_0'\overline{G}'\phi, \qquad \bar{\phi} = -\bar{\phi}\overline{G}''K_0''. \tag{16}$$

在此,$K_0' = \theta K_0, K_0'' = K_0\theta, \overline{G}' = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - \theta K_0)\overline{G}', \overline{G}'' = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - K_0\theta)\overline{G}''$. 形式上它们类似与 Bethe-Salpeter 方程. 显然重排核减除了来自于传播子的非类空部分的贡献,即 $K_0 - \theta K_0$ 或 $K_0 - K_0\theta$ 的贡献. 值得指出的是,能够定义“bar”厄密的位势 U

$$U = \frac{1}{2}(V + \overline{V}) = \frac{1}{2}(V + \beta^A\beta^B V^{\dagger}\beta^B\beta^A), \tag{17}$$

使得类空方程成为

$$\phi = -K_0 U\phi, \qquad \bar{\phi} = -\bar{\phi} U K_0. \tag{18}$$

在如下的选择之下,能够看到更为深刻的物理意义. 考虑 $U_l = U_r = \lambda K_0$,其中 λ 是具有动量量纲负二次幂的实常数,从而保证量纲的正确性. 那么类空方程成为

$$\phi = \lambda A\phi, \qquad \bar{\phi} = \bar{\phi} A\lambda, \tag{19}$$

其中,$A = -\frac{1}{2}(\theta K_0 J K_0 \theta + \overline{\theta K_0 J K_0 \theta}), J = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - \lambda K_0\theta K_0)J$. 如果认为 λ 就是束缚态质量 M_B 的负二次方,则

$$(A - M_B^2)\phi = 0, \qquad \bar{\phi}(A - M_B^2) = 0. \tag{20}$$

假定 ϕ 和 $\bar{\phi}$ 满足 Klein-Gordon 方程

$$(\Box_x - M_B^2)\phi = 0, \qquad \bar{\phi}(\overleftarrow{\Box}_x - M_B^2) = 0. \tag{21}$$

积分算子 A 对应于相对于质心坐标系坐标 x 的微分算子 $\Box_x$.

4 散射态类空方程

利用(8)式和 Gell-Mann 和 Low 技术[10],可得到

$$\phi = \theta[1 - K_0\overline{G}'(1 - U_l\theta)]\chi_0 - \theta K_0\overline{G}'U_l\phi, \tag{22}$$

$$\bar{\phi} = \bar{\chi}_0[1 - (1 - \theta U_r)\overline{G}''K_0]\theta - \bar{\phi}U_r\overline{G}''K_0\theta. \tag{23}$$

显然它具有过于复杂的,与相互作用有关的非齐次项. 而且这一非齐次项不是恰当的自由散射态. 因此有必要修正类空波函数的定义,使得它对于束缚态和散射态都是合适的. 对于重排相互作用核和位势的考察启发我们定义类空波函数为

$$\phi_{SC} = \phi - \theta\chi_0 + \chi_0. \tag{24}$$

容易看到,在类空区域它与在第 2 节中通常定义的形式相同. 而在非类空区域它就是自由散射态波函数. 那么,利用 Gell-Mann 和 Low 技术[10]. 从方程(8)可得到关于散射态的类空方程

$$\phi_{SC} = \chi_0 - K_0 V\phi_{SC}, \qquad \overline{\phi}_{SC} = \overline{\chi}_0 - \overline{\phi}_{SC} VK_0. \tag{25}$$

于是它与束缚态方程有相同的微分形式:

$$[(m_1 + \hat{\partial}_1)(m_2 + \hat{\partial}_2) - V]\phi_{SC} = 0, \quad \overline{\phi}_{SC}[(m_1 - \overleftarrow{\hat{\partial}}_1)(m_2 - \overleftarrow{\hat{\partial}}_2) - V] = 0. \tag{26}$$

所以 V 再一次被认为是类空方程的相对论位势. 实际上,基于我们已经证明的对于算子 U_l 和 U_r,不同选择之间的等价性,也能够简单地取 $U_l = U_r = 1$,于是

$$\phi_{SC} = \chi_0 - K'_0\overline{G}'\phi_{SC}, \qquad \overline{\phi}_{SC} = \chi_0 - \overline{\phi}_{SC}\overline{G}'' K''_0, \tag{27}$$

其中 $K'_0 = \theta K_0$, $K''_0 = K_0\theta$, $\overline{G}' = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - \theta K_0)\overline{G}'$, $\overline{G}'' = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - K_0\theta)\overline{G}''$. 如同在第 3 节中已经做过的那样,能够定义"bar"厄密的位势 U,使得散射态的类空方程成为

$$\phi_{SC} = \chi_0 - K_0 U\phi_{SC}, \qquad \overline{\phi}_{SC} = \overline{\chi}_0 - \overline{\phi}_{SC} UK_0. \tag{28}$$

5 N 体类空方程

对于 N 个粒子体系,能够进一步定义束缚态类空波函数为

$$\phi(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \prod_{i<j}^{N}\theta(x_i - x_j)\langle 0|\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_N)|k\rangle = \prod_{i<j}^{N}\theta(x_i - x_j)\chi_{BS}(x_1, x_2, \cdots, x_N), \tag{29}$$

其中有 $N(N-1)/2$ 个类空因子,而 χ_{BS}是 N 体 Bethe-Salpeter 波函数

$$\chi_{BS} = \langle 0|T\psi(x_1)\psi(x_2)\cdots\psi(x_N)|k\rangle. \tag{30}$$

并且在 x_i 之间的间隔两两类空的要求已经被使用. 而散射态的类空波函数则被推广为

$$\phi_{SC}(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \phi(x_1, x_2, \cdots, x_N) - \phi_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) + \chi_0(x_1, x_2, \cdots, x_N). \tag{31}$$

如同两体情形一样,N 体 BS 方程是通过 N 体 Gell-Mann 和 Low 技术从 N 体 Green 函数中推导出来的. 类似地,N 体类空方程是通过选择恰当的新传播子,重排相互作用核,再使用 Gell-Mann 和 Low 技术从 N 体 Green 函数导出. 为此,首先导出经过重排后 Green 函数

$$K \quad K_0[1 - \overline{G}'(K_0 - U_l\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0)] - K_0\overline{G}'U_l\prod_{i>j}^{N}\theta_{ij}K,$$

$$K \quad [1 - (K_0 - K_0\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0)U_r\overline{G}'']K_0 - K\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}U_r\overline{G}''K_0,$$

其中 $\theta_{ij} = \theta[(x_i - x_j)^2]$,且

$$\overline{G}' = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - U_l\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0)\overline{G}'$$

$$\overline{G}'' = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - K_0\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}U_r)\overline{G}''. \tag{35}$$

能够证明 N 个费米子的 Green 函数有如下极点表达式

$$K_k(x_1^c, x_2^c, \cdots, x_N^c; y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c) = (-i)^{N-1}\sum_{r,M}\frac{1}{2E_p}\frac{1}{k_0 - E_p + i\epsilon}$$

$$\chi_{kr}(x_1^c, x_2^c, \cdots, x_N^c)\overline{\chi}_{kr}(y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c) + \Omega_{N-1}(x_1^c, x_2^c, \cdots, x_N^c; y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c) +$$

$$R(x_1^c, x_2^c, \cdots, x_N^c : y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c), \tag{36}$$

其中 Ω_{N-1} 表示总粒子数目为 N,束缚态粒子数目最大为 $N-1$ 时所有可能形成的移动极点项之和. R 是 E_p 处于束缚态能量区域时的正则项. 求和指标 r, M 分别代表稳定束缚态粒子的自旋和质量的可能取值,而束缚态能量 $E_p = \sqrt{M^2 + k^2}$. 并且在此采用了如下定义的质心和相对坐标 $X = \sum_{i=1}^{N}\eta_i x_i$, $x_i^c = x_i - X$,其中存在如下限制关系 $\sum_{i=1}^{N}\eta_i x_i^c = 0$, $\eta_i = m_i/\sum_{i=1}^{N}m_i$. 显然,我们有 $x_j^c = -\frac{1}{\eta_j}\sum_{i\neq j}^{N}\eta_i x_i$. 并且从 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 到 $(X, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_N)$ 的 Jacobi 形式为 $1/\eta_j$. 所以

$$\mathrm{d}^4(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \delta^{(4)}(\sum_{i=1}^{N}\eta_i x_1^c)\mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4(x_1^c, x_2^c, \cdots, x_N^c).$$

于是,利用 Gell-Mann 和 Low 技术[10],能够得到

$$L_{t\to-\infty}\int\mathrm{d}^3(y_1, y_2, \cdots, y_N)K(x_1, x_2, \cdots, x_N; \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_N, t)$$

$$\prod_{i=1}^{N}\beta_i\chi_k(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_N, t) = \chi_k(x_1, x_2, \cdots, x_N)\mathscr{P}_k, \tag{37}$$

$$\mathscr{P}_k = \frac{1}{2k_0}\int\mathrm{d}^3(\boldsymbol{y}_1^c, \boldsymbol{y}_2^c, \cdots, \boldsymbol{y}_N^c)\delta^{(3)}(\sum_{i=1}^{N}\eta_i\boldsymbol{y}_i^c)$$

$$(-i)^N\chi_k^{\dagger}(\boldsymbol{y}_1^c, \boldsymbol{y}_2^c, \cdots, \boldsymbol{y}_N^c, 0)\chi_k(\boldsymbol{y}_1^c, \boldsymbol{y}_2^c, \cdots, \boldsymbol{y}_N^c, 0). \tag{38}$$

至此,根据(36)式,对(32)和(33)式取极点项得到 N 体束缚态的类空方程

$$\phi = -\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0\overline{G}'U_l\phi, \qquad \overline{\phi} = -\overline{\phi}U_r\overline{G}''K_0\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}. \tag{39}$$

能够证明对于不同的 U_l 和 U_r 的选择,导致上述方程相同的解,只要它们在 $k_0 = E_p$ 处是正则的. 这一结论与两个粒子的情形相同.

类空方程和其共轭方程的势相同将是一个较好的选择,所以令

$$U_l = K_0\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0^{-1}, \qquad U_r = K_0^{-1}\prod_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0. \tag{40}$$

于是(39)式具有形式

$$\phi = -K_0V\phi, \quad \overline{\phi} = -\overline{\phi}VK_0, \tag{41}$$

其中

$$V = K_0^{-1}\prod\nolimits_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0IK_0\prod\nolimits_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0^{-1}, I = \overline{G} - \overline{G}(K_0 - K_0\prod\nolimits_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0^{-1}\prod\nolimits_{i<j}^{N}\theta_{ij}K_0)I.$$

对于 N 体散射态的情形,从散射态的类空波函数出发,再次利用 Gell-Mann 和 Low 技术[10],立即可得

$$\phi_{SC} = \chi_0 - K_0 V \phi_{SC}, \qquad \overline{\phi}_{SC} = \overline{\chi}_0 - \overline{\phi}_{SC} V K_0, \tag{42}$$

其中 V 的定义如上. 与束缚态方程相比较,区别仅仅在于相差一个非齐次项利用 χ_0 的谱表示,可见非齐次项满足

$$\prod_{i=1}^{N}(m_i + \partial_i)\chi_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) = 0, \quad \sum_{i=1}^{N}\beta(m_i + \partial_i)\chi_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \tag{43}$$

6 归一化条件和非齐次项

已知 Bethe-Salpeter 波函数的归一化条件为

$$-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 q \mathrm{d}^4 q' \overline{\chi}_k(q') \frac{\partial}{\partial k_0}[K_{0k}^{-1}(q', q) + \overline{G}_k(q', q)]\chi_k(q) = 2k_0. \tag{44}$$

由此得出类空波函数可以被归一化为

$$-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 q \mathrm{d}^4 q' \overline{\phi}_k(q') Q_k(q', q)\phi_k(q) = 2k_0, \tag{45}$$

其中已经引入了辅助量 Q_k

$$Q_k(q, q') = U_{rk}\overline{G}'' K_{0k}\left[\frac{\partial}{\partial k_0}(K_{0k}^{-1} + \overline{G}_k)\right]K_{0k}\overline{G}' U_{lk}(q, q'). \tag{46}$$

它被在 $k_0 \neq w_k$ 以及质壳 $k_0 = w_k = (\boldsymbol{k}^2 + M_B)^{1/2}$ 上定义. 然而,此 Q_k 过于复杂而缺乏清楚的物理意义. 故设法在相对动量表象中定义一个新的辅助量 W_k:

$$W_k(q, q') = (k_0 - w_k)\{\Theta * [(K_k * \Theta) - (K_{0k} * \Theta) + K_{0k}]\frac{\partial}{\partial k_0}(K_{0k}^{-1} + V_k)\}(q, q'). \tag{47}$$

在此 $*$ 表明卷积. 当 $k_0 = w_k$ 时,利用关系式 $(K_{0k}^{-1} + V_k)\phi_k = 0$ 和 $\Theta * [(K_k * \Theta) - (K_{0k} * \Theta) + K_{ok}](K_{0k}^{-1} + V_k)(q, q') = \Theta(q - q')$,以及当 $k_0 \to w_k$ 时, $\lim\limits_{k_0 \to w_k}(k_0 - w_k)\Theta * [(K_k * \Theta) - (K_{0k} * \Theta) + K_{ok}] = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{2k_0}\phi_k\overline{\phi}_k$,能够得到简单的方程 $W_k\phi_k = \phi_k(k_0 = w_k)$. 在另一方面,如果用 W_k 的定义式作用在类空波函数上,对于 $k_0 = w_k$,利用上述条件,得到 $W_k\phi_k = -\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\frac{1}{2k_0}\phi_k\overline{\phi}k\frac{\partial}{\partial k_0}(K_{0k}^{-1} + V_k)\phi_k$. 比较两个结果,我们得到类空波函数的归一化条件

$$-\frac{\mathrm{i}}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4 q \mathrm{d}^4 q' \overline{\phi}_k(q') \frac{\partial}{\partial k_0}[K_{0k}^{-1}](q', q) + V_k(q', q)]\phi_k(q) = 2k_0. \tag{48}$$

它类似与 BS 波函数的归一化条件,而且 V 可以用 U 取代.

对于 N 体束缚态 Bethe-Salpeter 波函数有归一化条件

$$(-\mathrm{i})^{N-1}\frac{1}{2k_0}\int \mathrm{d}^4(y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c)\mathrm{d}^4(z_1^c, z_2^c, \cdots, z_N^c)\delta(\sum_{i=1}^{N}\eta_i y_i^c)\delta[\sum_{i=1}^{N}\eta_i z_i^c)$$

$$\overline{\chi}_{kr}(y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c)\frac{\partial}{\partial k_0}[K_k^{(0)-1}(y_1^c, y_2^c, \cdots, y_N^c; z_1^c, z_2^c, \cdots, z_N^c)] +$$

$$\overline{G}_k(y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c;z_1^c,z_2^c,\cdots,z_N^c)]\overline{\chi}_{kr'}(x_1^c,x_2^c,\cdots,x_N^c)=\delta_{rr'}. \tag{49}$$

所以能够推广所引入辅助量 Q_k

$$Q_k(x_1^c,x_2^c,\cdots,x_N^c;y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c)=\frac{\partial}{\partial k_0}(K_k^{(0)-1}(x_1^c,x_2^c,\cdots,x_N^c;y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c)+V_k(x_1^c,x_2^c,\cdots,x_N^c;y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c)), \tag{50}$$

使得类空波函数被归一化为

$$(-\mathrm{i})^{N-1}\frac{1}{2k_0}\int \mathrm{d}^4(y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c)\mathrm{d}^4(z_1^c,z_2^c,\cdots,z_N^c)\delta(\sum_{i=1}^N\eta_i y_i^c)\delta(\sum_{i=1}^N\eta_i z_i^c)$$
$$\overline{\phi}_{kr}(y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c)Q_k(y_1^c,y_2^c,\cdots,y_N^c;z_1^c,z_2^c,\cdots,z_N^c)\overline{\phi}_{kr'}(x_1^c,x_2^c,\cdots,x_N^c)=\delta_{rr'}. \tag{51}$$

为了建立复合粒子量子场论,值得研究和讨论怎样表述出现在非齐次类空方程以及BS方程中,也包含在一般类空波函数中的 χ_0. 它作为自由BS方程的解,曾经被系统地研究过,但仅仅对于无自旋的粒子[11]. 因为已知夸克是费米子,研究自旋为1/2的粒子更为重要. 把 χ_0 写为Lehmann-Källan的谱表示:

$$\chi_0(x_1x_2)\mathscr{P}_k=-\int\frac{\mathrm{d}^4(p_1p_2)}{(2\pi)^5}\frac{1}{\sqrt{2k_0V}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_1x_1+\mathrm{i}p_2x_2}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)$$
$$\delta_{k_0,p_{10}+p_{20}}S'^A_+(p_1)S'^B_+(p_2)\beta^A\beta^B\int\mathrm{d}^3x'\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{p}_1-\boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{x}'/2}\chi(\boldsymbol{x}',0). \tag{52}$$

$$\left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_1}-H_1(-\mathrm{i}\nabla_1)+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t_2}-H_2(-\mathrm{i}\nabla_2)\right]\chi_0(x_1x_2)$$
$$(m_1+\hat{\partial}_1)(m_2+\hat{\partial}_2)\chi_0(x_1x_2)=0.$$

在此 $H_j(-\mathrm{i}\nabla_j)=-\alpha_j\cdot\nabla_j+\beta_j m_j;(j=1,2)$.

子的Bethe-Salpeter方程. 因此我们认为 χ_0 是相加Dirac算子方程(53)和相乘Dirac算子方程(54)的解集之交.

考虑方程(53),根据 χ_0 的定义,没有失去一般性我们能够认为它能够被写为每个费米子的4个分量的直积. 那么此波函数是具有16个分量的矩阵,且在哈密顿量中16×16 Dirac矩阵被定义为 $\alpha_1=\alpha\otimes I,\beta_1=\beta\otimes I;\alpha_2=I\otimes\alpha,\beta_2=I\otimes\beta$,其中 α 和 β 是通常的Dirac矩阵,而 I 是4×4单位矩阵. 回到方程(52)并注意到其中存在因子 $\delta^{(4)}(k-p_1-p_2)$,它能够保证 χ_0 具有与质心坐标 $X=\xi_1x_1+\xi_2x_2$ 或动量 $P=p_1+p_2$ 之间正确的依赖关系,即在坐标和动量表象下分别为 $\chi_0(x_1x_2)\sim\mathrm{e}^{\mathrm{i}kX}\chi_k^{(0)}(x)$ 和 $\chi_0(p_1p_2)\sim\delta^{(4)}(k-P)\chi_k^{(0)}(p)$. 于是在分离了质心运动和相对运动之后,必须丢掉不能正确地包含因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}PX}$ 的项,那么可求得

$$\chi_0(x_1x_2) \tag{55}$$

其中 $1/N$ 是归一化因子. 利用归一化条

$$\int\mathrm{d}^3x_1\mathrm{d}^3x_2\chi_0^\dagger(x_1x_2)\chi_0(x_1x_2)=\frac{V^2}{N^2}\sum_{rr'}^{2}|C_k^{rr'}|^2>0. \tag{56}$$

对于 N 个粒子体系,通过将 χ_0 分解为如下的直积形式

$$\chi_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \otimes_{i=1}^{N} \zeta^i, \tag{57}$$

并且将之代入上述方程则得出

$$\begin{aligned}\chi_0(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \mathrm{e}^{ikX} \sum_{p_1, p_2, \cdots, p_N} \{ & A_0(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes_{i=1}^{N} u_i(p_i) + \\ & \sum_{i=1}^{N} A_i(p_1, p_2, \cdots, p_N) \zeta^1(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes \cdots \otimes \\ & \zeta^{i-1}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes u_i(p_i) \otimes \zeta^{i+1}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes \cdots \otimes \\ & \zeta^N(p_1, p_2, \cdots, p_N) + \sum_{i,j=1; i<j}^{N} A_{ij}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \zeta^1(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes \cdots \otimes \\ & \zeta^{i-1}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes u_i(p_i) \otimes \zeta^{i+1}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes \cdots \otimes \\ & \zeta^{j-1}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes u_j(p_j) \otimes \zeta^{j+1}(p_1, p_2, \cdots, p_N) \otimes \cdots \otimes \\ & \zeta^N(p_1, p_2, \cdots, p_N) + \cdots \} \mathrm{e}^{ip_1 x_1^c + ip_2 x_2^c + \cdots + ip_N x_N^c}. \end{aligned} \tag{58}$$

这表明 χ_0 是包括从一个到 N 个 Dirac 自由平面波 u 与任意函数直积的所有可能排列的项的任意叠加.

总之,我们已经建立了相对论类空方程体系,研究了它在复合场论和矩阵元计算中的一些应用(见另文). 但是进一步的应用仍然是值得研究的问题.

参考文献(References)

1 Salpeter E E, Bethe H E. Phys. Rev., 1951, **84**: 1232—1242

2 Nakanishi N. Prog. Theor. Phys., 1969, Suppl, **43**: 1—80

3 Surra H. Phys. Rev Lett., 1977, **38**: 636—639; Phys. Rev., 1979, **D20**: 1412—1419; Ishikawa D. Phys. Rev., 1979, **D20**: 731—735

4 Salpeter E E. Phys. Rev., 1952, **87**: 328—343; Karplus R, Klein A. Phys. Rev., 1952, **87**: 848—858; Blankenbecler R, Sugar R. Phys. Rev., 1966, **142**: 1051—1059; Lepage G P. Phys. Rev., 1977, **A16**: 863—876; Caswell W E, Lepage G P. Phys. Rev., 1978, **A18**: 810—819; Bodwin G T, Yennie D R, Gregorio M A. Rev. Mod. Phys., 1985, **57**: 723—782; Sazdjian H. Phys. Rev., 1986, **D33**: 3401—3424; 3425—3434 and 3435—3440; Crater H W, Alstin P van. Phys. Rev., 1986, **D36**: 3007—3030; Phys. Rev., 1987, **D37**: 1982—2000; Mandelzweig V B, Wallace S J. Phys. Lett., 1987, **B197**: 469—473; Cooper E D, Jennings B K. Nucl. Phys., 1988, **A483**: 601—618; Murata T. Prog. Theor. Phys., 1988, Suppl. **45**, 46—111; Cross F. Phys. Rev., **C41**, R1909—191

5 Ruan TuNan, HE ZuoXiu, HUANG Tau. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1979, **3**: 272—276; RUAN TuNan, CHU XiQuan, HE ZuoXiu et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1981, **5**: 537—545; WEI Hua, Master Thesis (in Chinese), University of Science and Technology of China, 1981; WANG AnMin. Master Thesis (in Chinese), University of Science and Technology of China, 1984; WEI Hua. Ph. D Thesis (in Chinese), University of Science and Technology of China, 1987.

(阮图南,何祚庥,黄涛. 高能物理与核物理,1979,**3**:272—276;阮图南,朱熙泉,何祚庥等. 高能物理与核物理,1981,**5**:537—545;魏华. 中国科学技术大学硕士学位论文,1981;王安民. 中国科学技术大学硕士论文,1984;魏华. 中国科学技术大学博士论文,1987)

6 Connell J H. Phys. Rev., 1991, **D43**: 1393—1402

7 Bijitebier J, Broekaert J. J. Phys., 1996, **G22**: 559—580

8 Dirac P A M. The Principle of Quantum Mechanics, 3rd edition, Oxford, 1947, Chapter Ⅺ, 289—300

9 Fulton T, Martin P. Phys. Rev., 1954, **95**: 811—822

10 Gell-Mann M, Low F E. Phys. Rev., 1951, **84**: 350—354

11 Kershaw D, Snodgrass H, Zemach C. Phys. Rev., 1970, **D2**: 2806—2818; 2819—2840

Relativistic Space-Like Equation*

WANG AnMin[1,2,3,1)] RUAN TuNan[2,3]

1 (*Laboratory of Quantum Communication and Quantum Computation, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027, *China*)

2 (*CCAST (World Laboratory), Beijing* 100080, *China*)

3 (*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230027, *China*)

Abstract According to Dirac's idea of the space-like consistency conditions, we define the space-like wave functions through introducing the space-like factor, which is equivalent to Bethe-Salpeter wave function in physical content. The space-like form of Bethe-Salpeter equation of both bound state and scatter state are derived in terms of the universal rearranging technology of interaction kernel. Moreover, they are extended to many particles case. We also obtain the normalization condition of the space-like function for bound state and the solution of non-homogeneous term in the space-like form of Bethe-Salpeter equation for scatter state.

Consequently the formalism of the relativistic space-like equation is finally built.

Key words Bethe-Salpeter equation, quantum field theory, bound state, scatter state, composite particle

---

Received 17 June 1999

* Supported by National Natural Science Foundation of China (69773052

1) Mailing Address: P. O. Box 4, Hefei 230027

E-mail: anmwang@ustc.edu.cn