

# 单核子在具有八极形变的平均 势场中的混沌运动\*

## (II) 初始相干态空时演化中正则变量的 期望值和测不准度的特征

刘芳 李君清 李希国 罗亦孝

(兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心 兰州 730000)

(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

**摘要** 研究了二维不对称谐振子的相干态在附加八极形变势作用下传播时,量子正则变量的期望值和测不准度的变化,发现量子混沌与相应的经典混沌完全对应地表现了多种性质.量子混沌的特征也与势能面的几何对称性,即势能面上负曲率的存在及负曲率的大小有关系.

**关键词** 形变核 量子混沌 相干态

## 1 引言

在文献[1]中,给出了二维不对称谐振子势的相干态在附加八极形变势中传播的一系列公式(初始态为相干态的量子系统状态的正则变量的期望值及测不准度的公式等).本文将利用这些公式来计算和图示相干态在八极形变势中的动力学传播特征.

经典混沌现象是由相空间中相邻两粒子轨道间的距离随时间指数式上升来表征的.由于量子力学的表述方法完全不同于经典的方法,迄今研究量子混沌的普遍途径是寻找其经典对应显示出混沌运动的量子系统运动的类属表现,如能谱涨落的统计规律、波包的不稳定性以及与局域化联系着的量子抑制等<sup>[2-5]</sup>. 大多数的的工作集中于对能谱涨落的统计规律性的研究.近年来对量子系统状态的动力学演化特征有一些研究. M. Toda<sup>[6]</sup>提出了与经典李亚谱诺夫指数对应的量子物理量来判断经典上混沌的量子系统的特征. 顾雁<sup>[7]</sup>从系综运动的观点出发,引入系综分布的不均匀度,用不均匀度随时间增长的指数特征来表征量子混沌. 徐躬耦先生研究了波包演化过程中与动力学对称性相联系的拓扑结构不断被破坏的过程的特征<sup>[8]</sup>,特别是他最近用动力学对称性的代数方法推导出了

1999-02-12 收稿

\* 国家自然科学基金(19575057, 19775057, 19847992), 中国科学院重大项目及中国科学院院长特别支持经费资助

与经典可积性条件对应的量子可积性条件,建立了经典动力学的完全量子对应<sup>[9]</sup>.

相干态是一种量子力学态,它在相空间满足最小测不准关系,在给定的势场中沿经典轨道运行<sup>[10,11]</sup>. 本文利用相干态在非线性哈密顿系统中的传播特性来研究量子系统的正则变量的期望值及测不准度随时间变化的表现,研究怎样在与相轨道相类比的基础上来表征这些量,以及这些量与势场的几何对称性,即势场形变的关系.

## 2 相干态在八极形变势中的动力学演化性质

位置、动量在系统状态中的期望值和测不准度分别为

$$\langle x \rangle = \langle \alpha(t) | x | \alpha(t) \rangle, \langle z \rangle = \langle \alpha(t) | z | \alpha(t) \rangle, \quad (1)$$

$$\langle p_x \rangle = \langle \alpha(t) | p_x | \alpha(t) \rangle, \langle p_z \rangle = \langle \alpha(t) | p_z | \alpha(t) \rangle; \quad (2)$$

$$(\Delta x)^2 = \langle \alpha(t) | x^2 | \alpha(t) \rangle - \langle x \rangle^2, (\Delta z)^2 = \langle \alpha(t) | z^2 | \alpha(t) \rangle - \langle z \rangle^2, \quad (3)$$

$$(\Delta p_x)^2 = \langle \alpha(t) | p_x^2 | \alpha(t) \rangle - \langle p_x \rangle^2, (\Delta p_z)^2 = \langle \alpha(t) | p_z^2 | \alpha(t) \rangle - \langle p_z \rangle^2. \quad (4)$$

上式中 $|\alpha(t)\rangle$ 是 $t$ 时刻系统的状态,以上各值的具体表达式已在文献[1]中给出. 通常,期望值是由系统动力学决定的,因此带有动力学信息. 测不准度可以表征动力学系统的混沌属性.

经典上已详尽地研究了文献[1]中所表示的哈密顿系统的混沌特征<sup>[12]</sup>. 本文将尽量与经典的条件和结果相类比. 初始态选择起始于相空间不同位置的两个相干态:相干态 $|\alpha_1\rangle$ 的波包中心的位置为 $\{x, p_x; z, p_z\} = \{0.0, 2.67; 2.0, 0.0\}$ ;相干态 $|\alpha_2\rangle$ 的波包中心的位置为 $\{0.01, 0.0; 1.0, 2.67\}$ . 这里考虑了形变强度 $\lambda/\lambda_c = 0.1, 0.5, 0.95$ 三种情况.

首先,在没有八极形变项,即 $\lambda=0$ 时,系统在经典上是完全规则的. 我们的计算结果显示:处于相空间不同位置的波包在谐振子势场中传播时,位置和动量的期望值 $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle p_x \rangle, \langle p_z \rangle$ 都随时间作规则的正弦运动,测不准度 $\Delta x, \Delta z, \Delta p_x, \Delta p_z$ 皆为确定值. 这里由相干态所描述的四维波包是二维不对称谐振子系统本征态的协同性的线性叠加,波包具有一定的内部结构. 在二维谐振子势中,各本征态间始终保持着协同性,波包的中心如经典谐振子般的振动,波包始终具有最小测不准度. 整个系统显示非常规则的行为. 因为篇幅有限,这里不作图示.

在八极形变势的作用下,由于 $x, z$ 两个自由度之间的耦合,波包中各成份产生非线性共振,各成份之间的协同关系受到破坏,波包的内部结构相应变化,表现为测不准度随时间的增长,或波包的扩散. 相干态波包可相应于一个 $\delta$ 函数型的相点集合,则波包的扩散相应于一束相轨道的扩散. 波包的扩散速度相应于一束相轨道相互分离的速度,混沌行为则由这束相轨道随时间的指数型分离行为来表征.

对 $\lambda/\lambda_c = 0.1$ 的扁八极形变,势能面无负曲率出现,经典系统是规则的(见文献[12]中图1和图2(a)). 相干态在此势场作用下的演化特征见图1,初始态为 $|\alpha_1\rangle$ . 从图中可见,相干态在传播过程中, $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle p_x \rangle, \langle p_z \rangle$ 诸量仍随时间作规则正弦运动. 测不准度 $(\Delta x)^2, (\Delta z)^2, (\Delta p_x)^2, (\Delta p_z)^2$ 诸值随时间振荡,其振荡振幅随时间呈上升和下降趋势,之所以呈振荡形式是形变势场的不均匀性所致. 说明波包在一段时间里扩散,但到一定

时间后又会收敛. 只是宽度发生了很微小的变化, 波包中各成份之间基本保持着协同关系. 在经典情况下, 由于小的非线性扰动不足以破坏 KAM 环面, 所以运动是规则的, 但 KAM 环面有变形, KAM 环面对抗非线性扰动显示了一定的刚度. 这里波包的扩散和恢复表明在量子情况下对抗形变扰动的刚度状况.

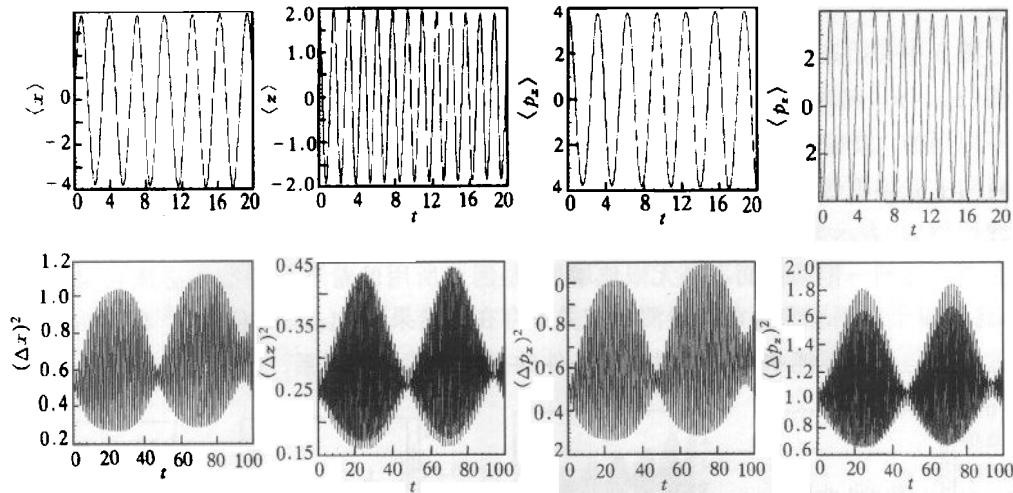


图 1 初始态为二维不对称谐振子相干态的状态在二维不对称谐振子势加八极形变势场中传播时, 位置和动量的期望值  $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle p_x \rangle, \langle p_z \rangle$  及测不准度  $(\Delta x)^2, (\Delta z)^2, (\Delta p_x)^2, (\Delta p_z)^2$

随时间  $t$  的演化关系

初始相干态为  $|\alpha_1\rangle$ , 形变强度  $\lambda/\lambda_c = 0.1$ .

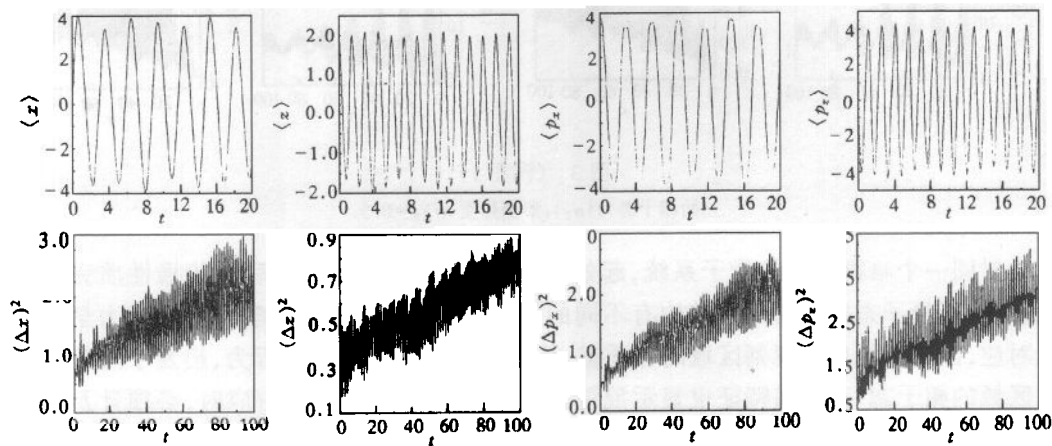


图 2 (同图 1)

初始相干态为  $|\alpha_1\rangle$ , 形变强度  $\lambda/\lambda_c = 0.5$ .

对  $\lambda/\lambda_c = 0.5$  情况, 势能面上出现负曲率. 经典系统在相空间的庞加莱截面上的很大区域出现混沌随机点(见文献[12]中的图 1、图 2). 相应的量子相干态演化特征在图 2

(初始态为 $|\alpha_1\rangle$ )和图3(初始态为 $|\alpha_2\rangle$ )中给出. 图2中,初始态 $|\alpha_1\rangle$ 位于经典相空间中的规则区域,系统状态关于位置和动量的期望值 $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle p_x \rangle, \langle p_z \rangle$ 仍基本随时间作正弦振荡. 波包测不准度 $(\Delta x)^2, (\Delta z)^2, (\Delta p_x)^2, (\Delta p_z)^2$ 随时间振荡式地线性增加,与图3对比可以看到增加得比较慢,增加的幅度也比较小,且没有达到饱和值. 这说明波包扩散不多.

图3中初始态 $|\alpha_2\rangle$ 位于经典相空间中的混沌区域. 虽然系统状态关于正则变量的期望值 $\langle z \rangle, \langle p_z \rangle$ 随时间的振荡振幅总的形状大致规则,但 $\langle x \rangle, \langle p_x \rangle$ 随时间振荡的振幅则是不规则的. 波包测不准度 $(\Delta x)^2, (\Delta z)^2, (\Delta p_x)^2, (\Delta p_z)^2$ 与初始态为 $|\alpha_1\rangle$ 的情况相比随时间上升得更快,振荡振幅也更大. 特别是 $(\Delta x)^2, (\Delta p_x)^2$ 一开始就冲到很高的值,呈非线性增加,表示波包迅速扩散,内部结构受到破坏. 当 $t \approx 100$ 时,诸量已达到饱和值. 波包宽度达到一饱和值而不是无限地增加,是因为所用的希耳伯特空间必须在某一值截断,这种量子抑制现象是海森堡测不准关系存在的结果<sup>[7]</sup>.  $(\Delta x)^2, (\Delta p_x)^2$ 在初始阶段的迅速上升与经典混沌中相轨道对初始条件的指数敏感性相联系.

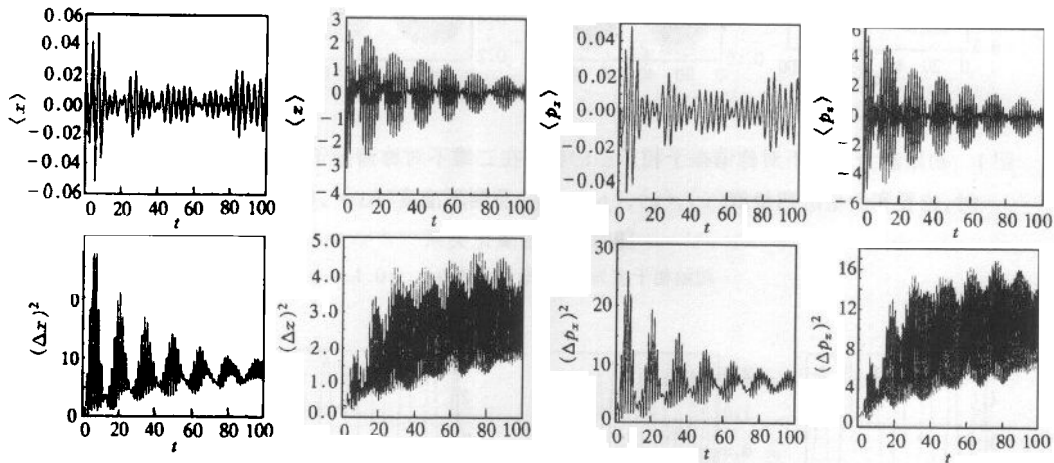


图3 (同图1)

初始相干态为 $|\alpha_2\rangle$ ,形变强度 $\lambda/\lambda_c=0.5$ .

对同一个哈密顿量的量子系统,起始于不同区域的相干态,其后的传播性质完全不同,反映了量子态空间的拓扑结构有不同的性质<sup>[8]</sup>. 由于量子动力学与经典动力学的完全对应,出发于经典上规则区域的相干态,其传播特征也显示规则行为,出发于经典上混沌区域的相干态,其传播特征也显示混沌行为. 当然,在考虑这种对应时,必须计及量子效应所导致的量子抑制.

当形变继续增加到 $\lambda/\lambda_c=0.95$ 时,对应经典系统的相空间已丧失可积系统的相空间的那种拓扑结构. 此时无论对初始态 $|\alpha_1\rangle$ 或 $|\alpha_2\rangle$ 其演化特征都差不多. 所以在图4中仅给出 $|\alpha_1\rangle$ 相干态的演化特征. 由图可见, $\langle x \rangle, \langle z \rangle, \langle p_x \rangle, \langle p_z \rangle$ 在 $t$ 增大到一定值后,都在定值附近不规则地振荡与遍历理论一致.  $(\Delta x)^2, (\Delta z)^2, (\Delta p_x)^2, (\Delta p_z)^2$ 都随时间振荡式地指数上升,然后维持到一个平衡值附近振荡,显示了完全的混沌特征.

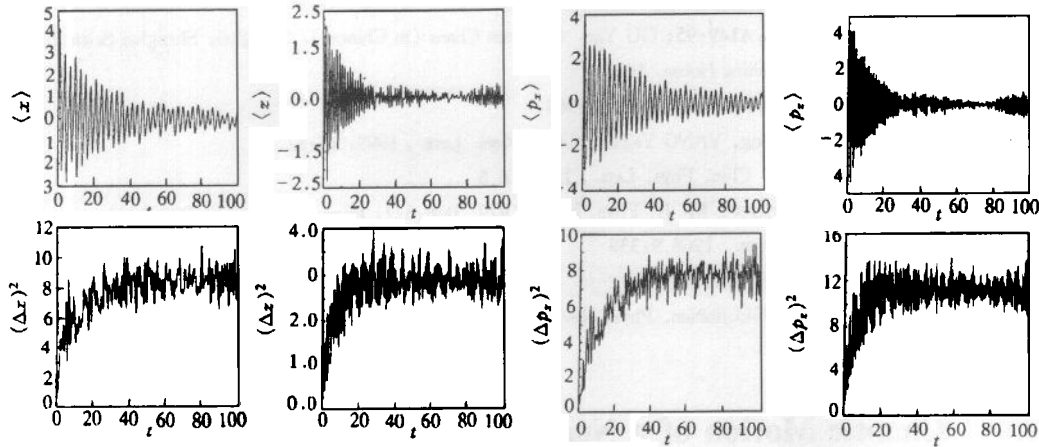


图4 (同图1)

初始相干态为  $|a_1\rangle$ , 形变强度  $\lambda/\lambda_c = 0.95$ .

### 3 结果与讨论

为了使研究量子混沌与研究经典混沌的思路完全一致,我们研究相干态在保持相应的动力学对称性和破坏这种对称性情况下的空时演化特征. 二维谐振子的相干态在二维谐振子势中完全保持着它的波包形式,且波包中心与经典粒子一样作简谐运动,在加了八极形变势以后,由于两自由度间耦合而导致不可积性,组成波包的各成份因非线性共振使各成份间的协同性受到了破坏,波包因此扩散. 利用相干态在不同扰动强度势中的传播,发现其传播特征与相应的经典系统——相应. 由于扰动强度的变化和初始状态的不同,量子系统也和经典系统一样表现了多种性质. 在同一扰动强度下,相应于经典上混沌和规则并存的情况,起始于经典上规则的相空间区域的相干态的传播特征与起始于经典上混沌的相空间区域的相干态的传播特征不同,表明经典系统的相空间的拓扑结构与相应的量子系统的态空间的拓扑结构有对应的特征,因此体现了相同的对初始条件的敏感性. 由于混沌运动的出现与系统势能面的几何对称性,即势能面中负曲率的存在及负曲率的大小有关<sup>[12,13]</sup>,量子系统态空间的拓扑结构也必于势能面的曲率相关.

#### 参考文献(References)

- 1 LIU Fang et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, 23(11):1108—1114  
(刘芳等. 高能物理与核物理, 1999, 23(11):1108—1114)
- 2 XU GongOu. Chaotic Motions in Quantum Systems (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1995  
(徐躬耦. 量子混沌运动. 上海:上海科学技术出版社, 1995)
- 3 Gutzwiller M C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990
- 4 Lichtenberg A J, Leiberman M A. Regular and Stochastic Motion. New York: Springer, 1983
- 5 Fritz Haake. Quantum Signatures of Chaos. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1991

- 6 Toda M, Ikeda K. Phys. Lett. , 1987, **A124**:165
- 7 GU Yan. Phys. Lett. , 1990, **A149**:95; GU Yan. Quantum Chaos (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1996  
(顾雁. 量子混沌. 上海:上海科技教育出版社,1996)
- 8 XU GongOu, XING YongZhong, YANG YaTian. Chin. Phys. Lett. , 1999, **16**:82
- 9 XU GongOu, YANG YaTian. Chin. Phys. Lett. , 1999, **16**:6
- 10 Michael Martin Nieto, Simmons L M. Jr. Phys. Rev. , 1979, **D20**:321; Phys. Rev. , 1979, **D20**:1323
- 11 Roman Jockiw. J. Math. Phys. , 1968, **9**:339
- 12 LI JunQing. J. Phys. , 1998, **G24**:1021
- 13 LI JunQing, ZHU JieDing, GU JinNan. Phys. Rev. , 1995, **B52**:6458

## Chaotic Motion of a Nucleon in Mean Field Potential With Octupole Deformation \*

### ( II ) Characteristics of Expectation Values and Uncertainty Measures of Canonical Variables in Space-Temporal Variation of Initial Coherent States

LIU Fang LI JunQing LI XiGuo LUO YiXiao

( *Research Center of Nuclear Theory of National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou 730000, China* )

( *Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China* )

**Abstract** Coherent states of two dimensional asymmetrical harmonic oscillator, which propagate in additional octupole deformation potentials, are used to investigate the characteristics of expectation values and uncertainty measures of canonical variables in space-temporal variations. The quantum chaotic system shows varying behaviors as the corresponding classical chaotic system does. Thus the characteristics of quantum chaos are associated with the geometric symmetry of the potential surface, specifically, the existence of the negative curvature and the magnitude of the curvature in the potential surface.

**Key words** deformed nucleus, quantum chaos, coherent state

---

Received 12 February 1999

\* Supported by National Natural Science Foundation of China (19575057, 19775057, 19847992), Major Project of The Chinese Academy of Science and Director of The Chinese Academy of Science