

2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场真空态的研究*

江俊勤

(广东教育学院物理系 广州 510303)

(中国高等科学技术中心 北京 100080)

摘要 对 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场论真空态进行研究, 推导出连续极限下真空波函数中参数 μ_0 和 μ_2 的普适表达式. 并用基于改进的哈密顿量的截断本征方程进行数值计算, 结果在深度弱耦合区内显示出良好的标度行为.

关键词 格点规范 改进哈密顿量 真空态

1 引言

非阿贝尔规范理论具有非平庸的真空态, 这导致夸克禁闭. 为了研究强子的低能物理, 例如: 胶球质量、胶球产生与衰变, 必须了解真空结构. 格点规范理论从第一原理出发, 是研究规范场非微扰性质的可靠方法. 多年来, 人们用哈密顿量形式的格点规范理论对规范场真空态进行了许多研究^[1-7].

由于实际计算中, 格距 a 是一个有限大小的值 (而不是 $a \rightarrow 0$), 所以原始的格点哈密顿量与连续理论哈密顿量之间的有限格距误差比较大, 严重影响计算结果, 这正是过去格点 QCD 进展缓慢的主要原因之一. 近年来, 我们对格点哈密顿量进行了改进, 加入了定域、近邻或次近邻作用项, 使有限格距误差变为 a 的高次幂. 对于带 Wilson 费米子的哈密顿量, 改进后使有限格距误差由原来的 $O(a)$ 减小为 $O(a^2)$ ^[8], 并通过 1 + 1 维 QCD 中夸克凝聚 $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ 和矢量介子质量谱 M_V 的具体计算, 明确地肯定了理论的预言^[9]; 对于纯规范场的 Kogut-Susskind 哈密顿量, 改进后可使有限格距误差由原来的 $O(a^2)$ 减小为 $O(a^4)$ ^[10], 并用改进的哈密顿量计算了 2 + 1 维 $U(1)$ 规范场真空波函数^[7].

本文用改进的格点哈密顿量计算 2 + 1 维 $SU(2)$ 规范场真空波函数. 由于低能谱主要起源于长波激发, 因此我们用格点方法研究规范场真空态的长波行为. 对于 2 + 1 维 $SU(2)$ 规范场真空波函数, 在连续极限下 ($a \rightarrow 0$) 可写成^[2]:

$$|\Omega\rangle = \exp \left\{ -\mu_0 \iint \text{Tr} F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - \mu_2 \iint \text{Tr} [D_i F_{12}(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0 + \text{高阶项} \right\}, \quad (1)$$

1999-09-20 收稿

* 广东省自然科学基金资助(990212)

式中, $F_{12}(x_0, y_0)$ 为场强张量, $D_i (i=1, 2)$ 为协变导数, 展开系数 μ_0 和 μ_2 表达式可以通过研究 Wilson 圈图的连续极限行为求得.

由于正确的 μ_0 和 μ_2 表达式是计算真空波函数的关键, 本文在由改进的格点哈密顿量导出截断本征方程之后, 仔细地推导出 μ_0 和 μ_2 的普适表达式, 并进行了数值计算.

2 改进的格点哈密顿量和截断本征方程

对于 SU(2) 纯规范场, $\text{Tr}U_p^* = \text{Tr}U_p$, 改进的格点哈密顿量^[10]可写成

$$H = \frac{g^2}{2a} \text{Tr} \sum_{x,i} \left\{ \frac{1+C'}{(1-C')^2} E_i(x) E_i(x) - \frac{2C'}{(1-C')^2} U_i^*(x) E_i(x) U_i(x) E_i(x+i) \right\} - \frac{2}{g^2 a} (C'_1 \square + 2C'_2 \square\square), \quad (2)$$

式中, E_i 为规范场色电场强, a 为格距, g 为无量纲的耦合常数, 它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$, $C'_1 = 5/3$, $C'_2 = -1/12$, $C' = -5 + 2\sqrt{6}$.

当取 $C' = 0, C'_1 = 1, C'_2 = 0$ 时, (2) 式回到原始的 Kogut-Susskind 哈密顿量.

取真空波函数为^[2,7]

$$|\Omega\rangle = e^R |0\rangle. \quad (3)$$

$|0\rangle$ 为裸真空波函数, 定义为 $E_i(x)|0\rangle = 0$, R 由 Wilson 圈组成, 可按圈图的阶展开

$$R = \sum_i R_i. \quad (4)$$

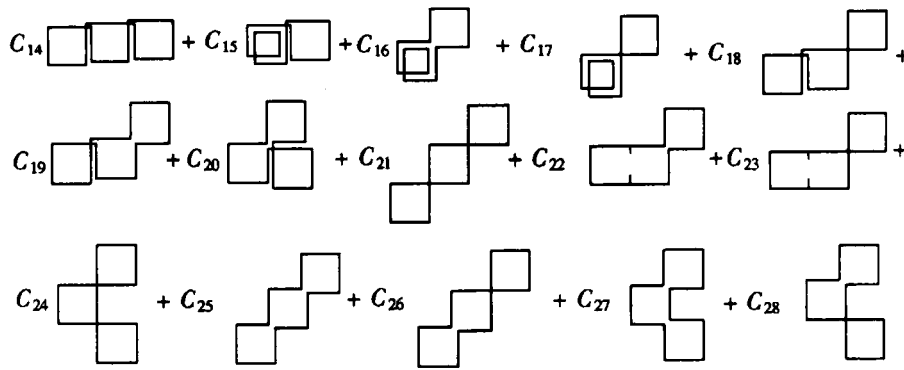
将 H 代入本征方程 $H|\Omega\rangle = \epsilon_0 |\Omega\rangle$, 求得 N 阶截断本征方程为

$$B'_1 \left\{ \sum_{x,i} [E_i^a(x), [E_i^a(x), R]] + \sum_{n_1+n_2 \leq N} [E_i^a(x), R_{n_1}] [E_i^a(x), R_{n_2}] \right\} + B'_2 \left\{ \sum_{x,i} [E_i^a(x), [E_i^a(x+i), R]] + \sum_{n_1+n_2 \leq N} [E_i^a(x+i), R_{n_1}] [E_i^a(x), R_{n_2}] \right\} - \frac{4}{g^4} (C'_1 \square + 2C'_2 \square\square) = \frac{2a}{g^2} \epsilon_0,$$

式中 $B'_1 = \frac{1+C'}{(1-C')^2} = \frac{5}{6}$, $B'_2 = \frac{-4C'}{(1-C')^2} = \frac{1}{3}$.

取一阶图为 $R_1 = C_1 \sum_p \text{Tr}U_p = C_1 \square$, 则由 (5) 式的对易子可产生高阶图, 截断到 3 阶, 共有 28 个图:

$$R = C_1 \square + C_2 \square\square + C_3 \square\square\square + C_4 \square\square\square + C_5 \square\square\square + C_6 \square\square\square + C_7 \square\square\square + C_8 \square\square\square + C_9 \square\square\square + C_{10} \square\square\square + C_{11} \square\square\square + C_{12} \square\square\square + C_{13} \square\square\square + \dots$$



3 μ_0 和 μ_2 的普适表达式

3.1 一阶图对 μ_0 和 μ_2 的贡献

在连续极限下, $\text{Tr}U_p = \text{Tr}(U_1 U_2 U_3 U_4)$ 可写成

$$\text{Tr}U_p = \text{Tr} \left[P \exp \left(-ie \oint_{\square} A_{\mu} dx_{\mu} \right) \right].$$

式中, P 为路径排序算符, A_{μ} 为规范势, $A_{\mu} = A_{\mu}^a T_a$, 规范群生成元 T_a 满足: $\text{Tr}T_a = 0$, $\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$, $[T_a, T_b] = if_{abc} T_c$, f_{abc} 为结构常数.

根据场强张量 $F_{\mu\nu}$ 的定义, 并利用 Stocks 公式, 将(7)式展开成级数, 得

$$\text{Tr}U_p = \frac{1}{2} (\text{Tr}U_p + \text{Tr}U_p^*) \rightarrow -\frac{1}{2} e^2 \text{Tr} \left[\iint_{\square} F_{12}(x_0 + x) dx dy \right]^2. \quad (8)$$

式中 x_0 为圈图中心位矢, x 为场点相对于圈图中心的位矢.

由于 $|x|$ 是与 a 同阶的小量, $F_{12}(x_0 + x)$ 可在点 (x_0, y_0) 附近展开

$$F_{12}(x_0 + x) \rightarrow F_{12}(x_0, y_0) + (xD_1 + yD_2)F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(xD_1 + yD_2)^2 F_{12}(x_0, y_0).$$

$$\therefore \iint_{\square} F_{12}(x_0 + x) dx dy \rightarrow a^2 F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0). \quad (9)$$

$$\therefore |\Omega\rangle \sim \exp \left\{ -\frac{C_1}{2e^2} g^4 \iint \text{Tr}[F_{12}^2(x_0, y_0)] dx_0 dy_0 + \frac{C_1 g^8}{24e^6} \iint \text{Tr}[D_i F_{12}(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0 \right\}. \quad (10)$$

比较(1)、(10)两式, 得 R_1 对 μ_0 的贡献为 $\frac{1}{2} C_1 g^4 / e^2$, 对 μ_2 的贡献为 $-\frac{1}{24} C_1 g^8 / e^6$.

3.2 高阶圈图对 μ_0 和 μ_2 的贡献

高阶图由若干个一阶图($\sum_p \text{Tr}U_p$)组成. 设某个 n 阶图 R_n 由 N_1 个反时针的一阶图

和 N_2 个顺时针的一阶图 ($N_1 + N_2 = n$) 组成, 第 l ($l = 1, 2, \dots, N_1$) 个反时针一阶图的中心坐标为 $(x_0 + x_l a, y_0 + y_l a)$, 第 m ($m = 1, 2, \dots, N_2$) 个顺时针一阶图的中心坐标为 $(x_0 + \bar{x}_m a, y_0 + \bar{y}_m a)$. 则

$$\iint F_{12}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) dx dy = \sum_{l=1}^{N_1} \iint_{\sigma_l} F_{12}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) dx dy - \sum_{m=1}^{N_2} \iint_{\sigma_m} F_{12}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) dx dy. \quad (11)$$

类似于(8)–(10)式的计算, 可得 R_n 对 μ_0 的贡献为

$$\mu_{0,n} = \frac{1}{2} C_n (N_1 - N_2)^2 g^4 / e^2. \quad (12)$$

对 μ_2 的贡献为

$$\begin{aligned} \mu_{2,n} = C_n \left\{ -\frac{1}{24} (N_1 - N_2)^2 + \frac{1}{4} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \bar{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \bar{y}_m \right)^2 \right] - \right. \\ \left. \frac{1}{4} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\bar{x}_m^2 + \bar{y}_m^2) \right] \right\} g^8 / e^6 \end{aligned}$$

将各圈图对 μ_0 和 μ_2 的贡献相加, 得 μ_0 和 μ_2 的普适表达式

$$\mu_0 = \sum_n \mu_{0,n}, \quad \mu_2 = \sum_n \mu_{2,n}. \quad (14)$$

4 数值结果与讨论

2+1 维格点规范理论是超可重整化的, μ_0 和 μ_2 有如下标度行为^[5]

$$e^2 \mu_0 \rightarrow \text{const}, \quad e^6 \mu_2 \rightarrow \text{const}.$$

将(6)式代入(5)式, 求得 C_1, C_2, \dots, C_{28} 所满足的非线性方程组. 解方程组得 C_1, C_2, \dots, C_{28} 与 $1/g^2$ 的关系, 再代入(13)式和(14)式, 求得 3 阶截断时 $e^2 \mu_0$ 和 $e^6 \mu_2$ 与 $1/g^2$ 的关系, 如图 1 所示.

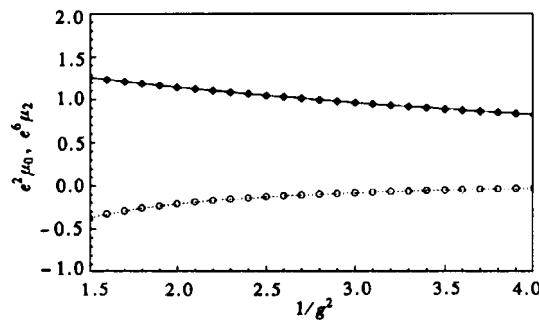


图 1 $e^2 \mu_0, e^6 \mu_2$ 与 $1/g^2$ 的关系
 $\text{—}\bullet\text{—}$ $e^2 \mu_0$, $\text{---}\circ\text{---}$ $e^6 \mu_2$.

由图 1 可见, 用基于改进的格点哈密顿量的截断本征方程求得的 μ_0 和 μ_2 在深度弱耦合区内有良好的标度行为. 值得指出, 本文所到达的弱耦合区 ($1/g^2 = 4.0$) 是使用未改进哈密顿量的结果^[3]所无法到达的. 当然, 收敛性仍有待进一步的研究.

感谢郭硕鸿教授的有益讨论.

参考文献 (References)

- 1 Greensite J P. Nucl. Phys. ,1980, **B166**:113
- 2 GUO ShuoHong, CHEN QiZhou et al. Phys. Rev. ,1994, **D49**:507
- 3 CHEN QiZhou, GUO ShuoHong, ZHENG WeiHong et al. Phys. Rev. ,1994, **D50**:3564
- 4 CHEN QiZhou et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese),1994, **18**(5):417
(陈启洲等. 高能物理与核物理,1994, **18**(5):417)
- 5 CHEN QiZhou, FANG XiYan, GUO ShuoHong. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese),1995, **19**(5):398
(陈启洲, 方锡岩, 郭硕鸿. 高能物理与核物理,1995, **19**(5):398)
- 6 JIANG JunQin, LUO XiangQian. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese),1999, **23**(8):774
(江俊勤, 罗向前. 高能物理与核物理,1999, **23**(8):774)
- 7 JIANG JunQin, LUO XiangQian, GUO ShuoHong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys.(in Chinese),1999, **23**:1152
(江俊勤, 罗向前, 郭硕鸿等. 高能物理与核物理,1999, **23**:1152)
- 8 LUO XiangQian, CHEN QiZhou, XU GuoCai et al. Phys. Rev. ,1994, **D50**:501
- 9 JIANG JunQin, LUO XiangQian et al. Phys. Rev. ,1999, **D60**:014501
- 10 LUO XiangQian, GUO ShuoHong, Kröger H et al. Phys. Rev. ,1999, **D59**:034503

Study of the Vacuum State for 2 + 1 Dimensional $SU(2)$ Lattice Gauge Field Theory *

JIANG JunQin

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

(CCAST (World Laboratory), Beijing 100080, China)

Abstract The vacuum state of $(2+1)$ -dimensional $SU(2)$ lattice gauge field theory is investigated. The general expressions of the parameters (μ_0 and μ_2) of the continuum vacuum wave function are derived. The numerical results which come from the improved Hamiltonian and the truncated eigenvalue equation method display a good scaling behavior in the deep weak coupling region.

Key words lattice gauge, improved Hamiltonian, vacuum state

Received 20 September 1999

* Supported by Natural Science Foundation of Guangdong Province (990212)