第24卷 第1期 高能物理与核物理 Vol.24, No.1
2000 年1月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 2000

19顶角模型反射方程的常数解

石康杰 李广良 范 桁 岳瑞宏 侯伯宇

(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

摘要 通过直接解反射方程，给出了19顶角模型$A_2^{(2)}$模型反射方程的所有矩阵元非零形式以及其它几种非对角形式的常数解.

关键词 $A_2^{(2)}$模型 反射方程 常数解

1 引言

在二维完全可解晶格模型中，开边界的可积条件问题一般是用反射方程[1,2]来描述的，而构造开边界条件可解模型的关键是寻找该模型反射方程的解，因此，寻找可解模型反射方程的解一直是人们颇为关注的事情. 在此方面，人们已做了不少的工作[1—11]，其中$A_2^{(2)}$模型反射方程的对角解已经被获得[3,9]，而非对角解的情况，也有人做过这方面的工作[12]，但并未给出所有矩阵元非零的形式的解.

本文通过直接解$A_2^{(2)}$模型[13,14]的反射方程，得到了该模型反射方程的所有矩阵元非零形式和其它形式的常数解. 结果显示，$A_2^{(2)}$模型反射方程的对角解中不含有自由参数，非对角解中，可含有一到两个自由参数.

2 反射方程

开边界条件的反射方程为[1,2]

$$R_{12}(u-v)K_1(u)R_{12}^{t_1t_2}(u+v)K_2(v)=K_2(v)R_{12}(u+v)K_1(u)R_{12}^{t_1t_2}(u-v), \tag{1}$$

$$R_{12}(-u+v)\bar{K}_1^{t_1}(u)M_1^{-1}R_{12}^{t_1t_2}(-u-v-2\eta)M_1K_1^{t_2}(v)=$$

$$K_2^{t_2}(v)M_1R_{12}(-u-v-2\eta)M_1^{-1}\bar{K}_1^{t_1}(u)R_{12}^{t_1t_2}(-u+v). \tag{2}$$

其中，R矩阵可看作二维统计力学中n态顶角模型的Boltzmann权，R矩阵作用在$C^n\otimes C^n$空间上，R矩阵满足Yang-Baxter方程[15,16]

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v)=R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u). \tag{3}$$

1998-11-24收稿

21—34

这里的 $R_{12}(u), R_{13}(u), R_{23}(u)$ 分别作用在 $C^n\otimes C^n\otimes C^n$ 空间上，$R_{12}(u) = R(u)\otimes 1$，$R_{23}(u) = 1\otimes R(u)$ 等等．R 矩阵同时还要求满足下列性质

$$\begin{aligned}
&\text{规则性：} R_{12}(0) = \rho(0)^{\frac{1}{2}} P_{12}\ ,\\
&\text{PT 对称性：} P_{12} R_{12}(u) P_{12} = R_{12}(u)^{t_1 t_2},\\
&\text{幺正性：} R_{12}(u) R_{12}^{t_1 t_2}(-u) = \rho(u),\\
&\text{交叉幺正性：} R_{12}(u) = V_1 R_{12}^{t_2}(-u-\eta) V_1^{-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

其中的 $\rho(u)$ 为一标度偶函数，P 为置换算子，$P(x\otimes y) = y\otimes x$，$t_i$ 表示第 i 空间的转置，η 为交叉参数，V 由交叉矩阵 M 来决定，$M = V^t V = M^t$，$V_1 = V\otimes 1$，$V_2 = 1\otimes V$，M_1，M_2 分别同 V_1，V_2．$K_1(u)$ 与 $K_2(u)$ 分别为 $K_1(u) = K(u)\otimes 1$，$K_2(u) = 1\otimes K(u)$，$\tilde{K}_1(u)$ 和 $\tilde{K}_2(u)$ 分别为 $\tilde{K}_1(u) = \tilde{K}(u)\otimes 1$，$\tilde{K}_2(u) = 1\otimes \tilde{K}(u)$。如果有一 $K(u)$ 满足反射方程(1)式，则称 $K(u)$ 为反射方程(1)式的一个解．同理可定义 $\tilde{K}(u)$ 为满足反射方程(2)式的一个解．可以证明，如果有一 $K(u)$ 满足反射方程(1)式，则

$$\tilde{K}(u) = K(-u-\eta)^t M \tag{5}$$

满足反射方程(2)．

对于标准的 $N\times N$ 正方晶格，定义其 transfer 矩阵为

$$t(u) = \mathrm{tr}\tilde{K}(u) T(u) K(u) T^{-1}(u), \tag{6}$$

其中 $T(u) = R_{01}(u) R_{02}(u)\cdots R_{0N}(u)$，$V_0$ 称为辅助空间，$V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_N$ 称为量子空间，则可证明 $[t(u), t(v)] = 0$[1]．该开边界体系相应的哈密顿量为[1]

$$H = \sum_{j=1}^{N-1} H_{j,j+1} + \frac{1}{2} K_1'(0) + \frac{\mathrm{tr}_0 \tilde{K}(0) H_{N,0}}{\mathrm{tr}\tilde{K}(0)}\ , \tag{7}$$

其中 $H_{j,j+1} = P_{j\,j+1} R'_{j\,j+1}(u)|_{u=0}$.

3 $A_2^{(2)}$ 模型

$A_2^{(2)}$ 模型的 R 矩阵为[12,13]

$$R(u) = \begin{pmatrix}
c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & b & 0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & d & 0 & g & 0 & f & 0 & 0\\
0 & \bar{e} & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \bar{g} & 0 & a & 0 & g & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 & e & 0\\
0 & 0 & \bar{f} & 0 & \bar{g} & 0 & d & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{e} & 0 & b & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c
\end{pmatrix}, \tag{8}$$

其中

$$
\begin{aligned}
&R_{11}^{11}(u) = R_{33}^{33}(u) = c(u) = \sinh(u-5q) + \sinh(q),\\
&R_{12}^{12}(u) = R_{21}^{21}(u) = R_{23}^{23}(u) = R_{32}^{32}(u) = b(u) = \sinh(u-3q) + \sinh(3q),\\
&R_{13}^{13}(u) = R_{31}^{31}(u) = d(u) = \sinh(u-q) + \sinh(q),\\
&R_{22}^{22}(u) = a(u) = \sinh(u-3q) - \sinh(5q) + \sinh(3q) + \sinh(q),\\
&R_{12}^{21}(u) = R_{23}^{32}(u) = e(u) = -2\mathrm{e}^{-u/2}\sinh(2q)\cosh\left(\frac{u}{2}-3q\right),\\
&R_{21}^{12}(u) = R_{32}^{23}(u) = \bar{e}(u) = -2\mathrm{e}^{u/2}\sinh(2q)\cosh\left(\frac{u}{2}-3q\right),\\
&R_{13}^{22}(u) = R_{22}^{31}(u) = g(u) = 2\mathrm{e}^{-u/2+2q}\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\sinh(2q),\\
&R_{22}^{13}(u) = R_{31}^{22}(u) = \bar{g}(u) = -2\mathrm{e}^{u/2-2q}\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\sinh(2q),\\
&R_{13}^{31}(u) = f(u) = -2\mathrm{e}^{-u+2q}\sinh(q)\sinh(2q) - \mathrm{e}^{-q}\sinh(4q),\\
&R_{31}^{13}(u) = \bar{f}(u) = 2\mathrm{e}^{u-2q}\sinh(q)\sinh(2q) - \mathrm{e}^{q}\sinh(4q).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

R 矩阵满足 Yang-Baxter方程(3)，并且满足规则性，PT 对称性，幺正性和交叉幺正性(4)，其中的 $\rho(u) = (\sinh(q) + \sinh(u-5q))(\sinh(q) - \sinh(u+5q))$，$\eta = -6q - \mathrm{i}\pi$，$M = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{2q}, 1, \mathrm{e}^{-2q})$.

4 $A_2^{(2)}$模型反射方程的解

A. 设反射方程(1)的 K 矩阵为

$$
K(u) = \rho^K(u)\begin{pmatrix} x_1(u) & y_{11}(u) & z_1(u) \\ y_{21}(u) & x_2(u) & y_{12}(u) \\ z_2(u) & y_{22}(u) & x_3(u) \end{pmatrix}, \tag{10}
$$

式中$\rho^K(u)$为一任意函数．为简单起见，令 Eq$[i,j]$表示由反射方程(1)等式两边$X_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} = \tilde{X}_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ 所产生的方程，其中 $i = 3(i_1 - 1) + i_2$，$j = 3(j_1 - 1) + j_2$．不难发现，Eq$[j,i]$可由 Eq$[i,j]$通过交换 $y_{11}(u) \leftrightarrow y_{21}(u)$，$y_{12}(u) \leftrightarrow y_{22}(u)$，$z_1(u) \leftrightarrow z_2(u)$而得到，Eq$[10-i, 10-j]$可由 Eq$[i,j]$通过交换 $x_1(u) \leftrightarrow x_3(u)$，$y_{11}(u) \leftrightarrow y_{12}(u)$，$y_{21}(u) \leftrightarrow y_{22}(u)$，$e(u) \leftrightarrow \bar{e}(u)$，$f(u) \leftrightarrow \bar{f}(u)$，$g(u) \leftrightarrow \bar{g}(u)$得到．先来计算 $K(u)$的非对角元．

由 Eq[2,8]得到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-2q+(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)y_{11}(u)y_{11}(v) + \mathrm{e}^{(v-u)/2}\cosh\left(q - \frac{u+v}{2}\right)y_{11}(v)y_{12}(u) = \\
&-\mathrm{e}^{2q-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)y_{12}(u)y_{12}(v) + \mathrm{e}^{(u-v)/2}\cosh\left(q - \frac{u+v}{2}\right)y_{11}(u)y_{12}(v).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

将方程(11)等号两边同除以$y_{12}(u)y_{12}(v)$，对v求导然后令$v=0$，得到

$$\frac{y_{11}(u)}{y_{12}(u)}=\frac{c-e^{q-u}}{e^{-q}(c+e^{u-q})}\ , \tag{12}$$

其中c为任意参数. $y_{11}(u)$与$y_{12}(u)$又可写为

$$\begin{aligned} y_{11}(u) &= \mu(c-e^{q-u})g(u), \\ y_{12}(u) &= \mu e^{-q}(c+e^{u-q})g(u). \end{aligned} \tag{13}$$

μ为任意参数，$g(u)$为任意不恒为零的函数. 将(13)式代入 Eq[2,9]

$$\begin{gathered} \left(\cosh\left(3q-\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)-\cosh\left(q-\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(-2q+\frac{u-v}{2}\right)\right)y_{12}(v)z_1(u)= \\ \left(e^{-2q+(u+v)/2}\sinh(2q)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)y_{11}(u)+\right. \\ \left.e^{(v-u)/2}\sinh(2q)\cosh\left(q-\frac{u+v}{2}\right)y_{12}(u)\right)z_1(v) \end{gathered} \tag{14}$$

得

$$\frac{z_1(u)}{z_1(v)}=\frac{\cosh(q-u)g(u)}{\cosh(q-v)g(v)}\ . \tag{15}$$

即

$$z_1(u) = \nu\cosh(q-u)g(u)\ , \tag{16}$$

ν为任意参数. 同理，由 Eq[8,2]和 Eq[9,2]可得

$$\begin{aligned} y_{21}(u) &= \tilde{\mu}(\tilde{c}-e^{q-u})f(u)\ , \\ y_{22}(u) &= \tilde{\mu}e^{-q}(\tilde{c}+e^{u-q})f(u) \\ z_2(u) &= \tilde{\nu}\cosh(q-u)f(u)\ . \end{aligned} \tag{17}$$

$\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$, $\tilde{c}$均为任意参数，$f(u)$为不恒为零的任意函数

由 Eq[1,1]和 Eq[9,9]得

$$\begin{gathered} \cosh\left(3q-\frac{u+v}{2}\right)(y_{11}(u)y_{21}(v)-y_{11}(v)y_{21}(u))= \\ -\left(\cosh\left(3q-\frac{u+v}{2}\right)+e^{q}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)(z_1(u)z_2(v)-z_1(v)z_2(u)), \\ \cosh\left(3q-\frac{u+v}{2}\right)(y_{12}(u)y_{22}(v)-y_{12}(v)y_{22}(u))= \\ \left(-\cosh\left(3q-\frac{u+v}{2}\right)+e^{-q}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)(z_1(u)z_2(v)-z_1(v)z_2(u)). \end{gathered} \tag{18}$$

代入(13)，(16)和(17)式于(18)，可得到以下3个结果

$$(1)\quad \begin{aligned} y_{11}(u) &= \mu(c-e^{q-u})g(u), & y_{21}(u) &= \tilde{\mu}(c-e^{q-u})g(u), \\ y_{12}(u) &= \mu e^{-q}(c+e^{u-q})g(u), & y_{22}(u) &= \tilde{\mu}e^{-q}(c+e^{u-q})g(u), \\ z_1(u) &= \nu\cosh(q-u)g(u), & z_2(u) &= \tilde{\nu}\cosh(q-u)g(u). \end{aligned} \tag{19}$$

$$
(2)\quad \begin{aligned}
&y_{11}(u) = 0, && y_{21}(u) = \bar{\mu}(\bar{c} - e^{q-u})f(u),\\
&y_{12}(u) = 0, && y_{22}(u) = \bar{\mu}e^{-q}(\bar{c} + e^{q-u})f(u),\\
&z_1(u) = v\cosh(q-u)g(u), && z_2(u) = 0.
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
(3)\quad \begin{aligned}
&y_{11}(u) = \mu(c - e^{q-u})g(u), && y_{21}(u) = 0,\\
&y_{12}(u) = \mu e^{-q}(c + e^{u-q})g(u), && y_{22}(u) = 0,\\
&z_1(u) = 0, && z_2(u) = \bar{v}\cosh(q-u)f(u).
\end{aligned} \tag{21}
$$

B. 先来考虑结果(2). 由 Eq[1,2]和 Eq[1,4]分别得到

$$
\begin{aligned}
&A_1(u,v)g(u)f(v) - A_2(u,v)g(v)f(u) = 0,\\
&A_3(u,v)g(u)f(v) - A_4(u,v)g(v)f(u) = 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
A_1(u,v) &= -(e^{2q-u-v}\sinh(q) + e^{-q}\cosh(2q))\sinh\left(\frac{u-v}{2} - 2q\right)e^{-q}(\bar{c} + e^{v-q})\cosh(q-u),\\
A_2(u,v) &= \left(e^{2q-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)(\bar{c} - e^{q-u})\right.\\
&\quad \left. - e^{2q+(v-u)/2}\sinh(2q)(e^{2q-u-v}\sinh(q) + e^{-q}\cosh(2q))e^{-q}(\bar{c} + e^{u-q})\right)\cosh(q-v),\\
A_3(u,v) &= e^{2q-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2} - 2q\right)(\bar{c} - e^{q-v})\cosh(q-u),\\
A_4(u,v) &= -\left(e^{2q-v}\sinh(2q)\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)(\bar{c} - e^{q-u}) + \right.\\
&\quad \left.(e^{2q-u-v}\sinh(q) + e^{-q}\cosh(2q))\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)e^{-q}(\bar{c} + e^{u-q})\right)\cosh(q-v).
\end{aligned} \tag{23}
$$

由于 $g(u)f(v) \neq 0$,则有 $E(u,v) = A_1A_4 - A_2A_3 = 0$. 由 $E(u,-u) = 0$ 得 $\cosh(q) = 0$ 或 $\sinh(q) = 0$,将 $\cosh(q) = 0$ 代入 $E(u,0)$ 并由 $E(u,0) = 0$ 得 $\bar{c} = e^{q}$,这时 $E(u,\pi i) \neq 0$. 同理可得 $\sinh(q) = 0$ 也不能保证 $E(u,v) = 0$(对任意 v),故 $E(u,v) = 0$ 不能对任意 u,v 成立,结果(2)并不成立. 同样由 Eq[2,1]和 Eq[4,1]可证明结果(3)也不成立,因此只有一种情形(1).

C. 现在来考虑情形(1). 由 Eq[1,4]得

$$
\begin{aligned}
&\mu\sinh(v)\bar{x}_1(v)(c - e^{q-u}) - \mu e^{(u-v)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\bar{x}_1(u)(c - e^{q-v}) =\\
&\mu e^{-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\bar{x}_2(u)(c - e^{q-v}) + \bar{\mu}v e^{-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)e^{-q}(c + e^{u-q})\cosh(q-v) +\\
&2\bar{\mu}v e^{2q-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\left(c\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right) - \sinh\left(q - \frac{u+v}{2}\right)\right).
\end{aligned} \tag{24}
$$

式中 $\tilde{x}_i(u)=\dfrac{x_i(u)}{g(u)}$，由(24)可看到$\mu$有两种情况，$\mu=0$和$\mu\neq0$，若$\mu=0$，则必有$\tilde{\mu}\nu=0$，若$\mu\neq0$，则 $\tilde{x}_2(u)$可由 $\tilde{x}_1(u)$，$\tilde{x}_1(v)$来展开，但 $\tilde{x}_2(u)$中不含有 ν. 从 Eq[4, 1]分析可得相似的结果. 综合上述分析，可以得到μ, $\tilde{\mu}$, ν, $\tilde{\nu}$ 5 种取值情况

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I}\quad \mu=0,\tilde{\mu}=0,\\
&\mathrm{II}\quad \mu\neq0,\tilde{\mu}=0(\Rightarrow\tilde{\nu}=0),\\
&\mathrm{III}\quad \mu=0,\tilde{\mu}\neq0\ (\Rightarrow\nu=0),\\
&\mathrm{IV}\quad \mu\neq0,\tilde{\mu}\neq0,\ \nu=0(\Rightarrow\tilde{\nu}=0),\\
&\mathrm{V}\quad \mu\neq0,\tilde{\mu}\neq0,\ \nu=0\left(\Rightarrow\tilde{\nu}=\left(\frac{\tilde{\mu}}{\mu}\right)^2\nu\right).
\end{aligned}
\tag{25}
$$

我们在下文分别讨论这 5 种情形.

C1 对于情形Ⅰ，由(24)式可看出对于 $x_1(u)$，$x_2(u)$和 $x_3(u)$没有限制. 令

$$X_i(u)=\frac{\tilde{x}_i(u)}{\cosh(q-u)}, \tag{26}$$

由 Eq[2, 4]和 Eq[6, 8]得到

$$\frac{\mathrm{e}^uX_1(u)\mathrm{e}^vX_1(v)-X_2(u)X_2(v)+\nu\tilde{\nu}}{\sinh\left(\dfrac{u+v}{2}\right)}=\frac{\mathrm{e}^uX_1(u)X_2(v)-\mathrm{e}^vX_1(v)X_2(u)}{\sinh\left(\dfrac{u-v}{2}\right)} \tag{27}$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-u}X_3(u)\mathrm{e}^{-v}X_3(v)-X_2(v)X_2(v)+\nu\tilde{\nu}}{\sinh\left(\dfrac{u+v}{2}\right)}=\frac{\mathrm{e}^{-u}X_3(u)X_2(v)-\mathrm{e}^{-v}X_3(v)X_2(u)}{\sinh\left(\dfrac{u-v}{2}\right)}. \tag{28}$$

从(27)和(28)式可看出$\nu\tilde{\nu}$有两种取值$\nu\tilde{\nu}=0$和$\nu\tilde{\nu}\neq0$.

$\mathrm{C1_a}$若$\nu\tilde{\nu}=0$，且 $X_2(u)\equiv0$，则由(27)式和(28)式可得到以下两个结果

$$
\begin{aligned}
&z_1(u)=h(u),\ x_1(u)=x_2(u)=x_3(u)=y_{11}(u)=y_{12}(u)=y_{21}(u)=y_{22}(u)=z_2(u)=0,\\
&z_2(u)=h(u),\ x_1(u)=x_2(u)=x_3(u)=y_{11}(u)=y_{12}(u)=y_{21}(u)=y_{22}(u)=z_1(u)=0,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$h(u)\not\equiv0$且为任意函数.

$\mathrm{C1_b}$ 若$\nu\tilde{\nu}=0$ 且 $X_2(u)\not\equiv0$，则由(27)和(28)式可知

$$
\begin{aligned}
&x_1(u)=\mathrm{e}^{-u}(c_1\mathrm{e}^{u/2}+\mathrm{e}^{-u/2})(\mathrm{e}^{u/2}+c_2\mathrm{e}^{-u/2})f(u),\\
&x_2(u)=(\mathrm{e}^{u/2}+c_1\mathrm{e}^{-u/2})(\mathrm{e}^{u/2}+c_2\mathrm{e}^{-u/2})f(u),\\
&x_3(u)=\mathrm{e}^{u}(\mathrm{e}^{u/2}+c_1\mathrm{e}^{-u/2})(c_2\mathrm{e}^{u/2}+\mathrm{e}^{-u/2})f(u).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

$f(u)$为任意不恒为零的函数，c_1，c_2为任意参数. 将(30)式人 Eq[3, 5]（注意到$\mu=\tilde{\mu}=\nu\tilde{\nu}=0$）

$$x_2(v)\left(-\mathrm{e}^{-2q+(u+v)/2}(\sinh(q)-\sinh(q-u+v))\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)x_1(u)+\right.$$

$$\mathrm{e}^{2q+(v-u)/2}(\sinh(q)+\sinh(3q)-\sinh(5q)-\sinh(3q-u-v))\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_2(u)-$$

$$e^{2q-(u+v)/2}\left(2e^{2q-u+v}\sinh(q)\sinh(2q)+e^{-q}\sinh(4q)\right)\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)x_3(u)\Big)=$$

$$x_3(v)\Bigg(-e^{-2q+(u-v)/2}(\sinh(q)-\sinh(q-u-v))\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_1(u)+$$

$$e^{2q-(u+v)/2}(\sinh(q)+\sinh(3q)-\sinh(5q)-\sinh(3q-u+v))\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)x_2(u)-$$

$$e^{2q+(v-u)/2}(2e^{2q-u-v}\sinh(q)\sinh(2q)+e^{-q}\sinh(4q))\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_3(u)\Bigg), \tag{31}$$

得

$$c_1=c_2=e^{-3q}C.$$

其中 $C^2=-1$. 则(30)又可写为

$$\begin{aligned}x_1(u)&=2e^{-3q-u}(\sinh(3q)+C\cosh(u))f(u),\\ x_2(u)&=2e^{-3q}(\sinh(3q+u)+C)f(u),\\ x_3(u)&=2e^{-3q+u}(\sinh(3q)+C\cosh(u))f(u).\end{aligned} \tag{33}$$

而由 $v\tilde{v}=0$ 可知 v 与 $\tilde{v}$ 的取值有三种情况

$$\begin{aligned}&(a)\quad v=\tilde{v}=0,\\ &(b)\quad v\neq 0,\ \ \tilde{v}=0,\\ &(c)\quad v=0,\ \ \tilde{v}\neq 0.\end{aligned} \tag{34}$$

对于情形(a),这是一个对角解

$$\begin{aligned}x_1(u)&=e^{-u}\left(\cosh\left(3q-\frac{u}{2}\right)+C\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\right)\tilde{\rho}^K(u),\\ x_2(u)&=\left(\cosh\left(3q+\frac{u}{2}\right)-C\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\right)\tilde{\rho}^K(u),\\ x_3(u)&=e^{u}\left(\cosh\left(3q-\frac{u}{2}\right)+C\sinh\left(\frac{u}{2}\right)\right)\tilde{\rho}^K(u).\end{aligned} \tag{35}$$

其中 $\tilde{\rho}^K(u)=2e^{-3q}\left(\sinh\left(3q+\frac{u}{2}\right)+C\cosh\left(\frac{u}{2}\right)\right)(\cosh(3q))^{-1}f(u)$. 对于情形(b),由 Eq[2,6]得

$$\left(e^{-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_3(v)-e^{(v-u)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)x_2(v)\right)z_1(u)=$$

$$-\left(e^{(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_1(u)+e^{(v-u)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)x_2(u)\right)z_1(v). \tag{36}$$

将(33)式代入(36)得

$$\cosh(q-u)g(u)=\sigma\sinh(u)f(u),$$

σ 为一常数. 再将(33)式代入 Eq[1,3](注意到 $\mu=\tilde{\mu}=\tilde{v}=0$)

$$z_1(v)\Big((2\sinh(q)\cosh(3q-u)\cosh(v)-\sinh(6q-2u)\cosh(2q))x_1(u)+$$

$$2\mathrm{e}^{4q-u}\sinh(2q)\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_2(u)+$$

$$2\sinh(2q)(\mathrm{e}^{2q-u+v}\sinh(q)+\mathrm{e}^{-q}\cosh(2q))(\mathrm{e}^{2q-u-v}\sinh(q)+\mathrm{e}^{-q}\cosh(2q))x_3(u)\Big)=$$

$$z_1(u)\Big((\mathrm{e}^{2q-u+v}\sinh(q)+\mathrm{e}^{-q}\cosh(2q))(\sinh(q)-\sinh(5q-u-v))x_1(v)-$$

$$(\mathrm{e}^{2q-u-v}\sinh(q)+\mathrm{e}^{-q}\cosh(2q))(\sinh(q)-\sinh(5q-u+v))x_3(v)\Big),\tag{38}$$

得知 $\sigma=0$，这与 $g(u)\neq 0, f(u)\neq 0$ 相矛盾，故情形(b)是不存在的．同样，由 Eq[6,2] 和 Eq[3,1] 知情形(c)也是不存在的．

C1.若 $v\bar{v}\neq 0$，则由(27)式可知，当 $v=0$ 时，$\mathrm{e}^u X_1(u)+X_2(u)$ 为一常数，当 $v=\pi\mathrm{i}$ 时，$\mathrm{e}^u X_1(u)-X_2(u)$ 仍然一常数，则 $\mathrm{e}^u X_1(u)$ 和 $X_2(u)$ 均为常数．令 $\mathrm{e}^u X_1(u)=c_1$，$X_2(u)=c_2$，则有 $c_1^2-c_2^2+v\bar{v}=0$．同样分析(28)可知 $\mathrm{e}^{-u}X_3(u)$ 也为常数，令 $\mathrm{e}^{-u}X_3(u)=c_3$，则有 $c_3^2-c_2^2+v\bar{v}=0$．综上分析，有 $c_1=c_3$ 或 $c_1=-c_3$．若 $c_1=c_3$，由 Eq[2,6] 得 $c_1=0$，再由 Eq[1,3] 得 $c_2=0$，这同 $v\bar{v}\neq 0$ 相矛盾．若 $c_1=-c_3$，再由 Eq[3,7]（注意到 $\mu=\tilde{\mu}=0$）

$$x_1(v)\Big((2\mathrm{e}^{-2q+u+v}\sinh(q)\sinh(2q)-\mathrm{e}^{q}\sinh(4q))(\sinh(q)-$$

$$\sinh(q-u+v))x_1(u)-4\mathrm{e}^{v}\sinh^2(2q)\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_2(u)+$$

$$(-2\mathrm{e}^{2q-u+v}\sinh(q)\sinh(2q)-\mathrm{e}^{-q}\sinh(4q))(\sinh(q)-\sinh(q-u-v))x_3(u)\Big)=$$

$$x_3(v)\Big((2\mathrm{e}^{-2q+u-v}\sinh(q)\sinh(2q)-\mathrm{e}^{q}\sinh(4q))(\sinh(q)-\sinh(q-u-v))x_1(u)-$$

$$4\mathrm{e}^{-v}\sinh^2(2q)\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)x_2(u)+$$

$$(-2\mathrm{e}^{2q-u-v}\sinh(q)\sinh(2q)-\mathrm{e}^{-q}\sinh(4q))(\sinh(q)-\sinh(q-u+v))x_3(u)\Big),\tag{39}$$

得 $c_1=0$，而由 Eq[1,3] 知 $c_2=0$，这与 $v\bar{v}\neq 0$ 相矛盾．因此，对于 $\mu=\tilde{\mu}=0$ 以及 $v\bar{v}\neq 0$ 情况的解是不存在的．

C2 对于情形Ⅱ，对(24)式中的 u 求导并令 $u=0$ 得

$$x_1(v)=\frac{\mathrm{e}^{-q}}{\sinh(v)}(c_1+c_2\mathrm{e}^{-v})(c-\mathrm{e}^{q-v})g(u),\tag{40}$$

c_1, c_2 为任意参数．再将 $x_1(v)$ 代回到(24)式中得

$$x_2(u)=\frac{e^{-q}}{\sinh(u)}(c_1+c_2e^u)(c-e^{q-u})\,g(u)\,. \tag{41}$$

对 Eq[6,9]

$$\mu\sinh(v)\tilde{x}_3(v)e^{-q}(c+e^{u-q})-\mu e^{(v-u)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\tilde{x}_3(u)e^{-q}(c+e^{v-q})=$$

$$\mu e^{(u+v)/2}\sinh\frac{u-v}{2}\tilde{x}_2(u)e^{-q}(c+e^{v-q})+\tilde{\mu}\nu e^{(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)(c-e^{q-u})\cosh(q-v)-$$

$$2\tilde{\mu}\nu e^{-3q+(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\left(c\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)-\sinh\left(q-\frac{u+v}{2}\right)\right) \tag{42}$$

中的 v 求导并令 $v=0$(注意到$\tilde{\mu}=0$)得

$$x_3(v)=\frac{e^{2q}}{\sinh(v)}(c_3+c_4e^v)e^{-q}(c+e^{v-q})g(u), \tag{43}$$

c_3,c_4为任意参数. 将(43)式代回(42)式(注意到$\tilde{\mu}=0$)得

$$x_2(u)=\frac{e^{2q}}{\sinh(u)}(c_3+c_4e^{-u})e^{-q}(c+e^{u-q})g(u)\,. \tag{44}$$

由(41)式和(44)式可得

$$c_1=-cc_4e^q, \tag{45}$$

$$c_3=cc_2e^{-q}, \tag{46}$$

$$(c_2+c_4)(c^2+1)=0. \tag{47}$$

由(47)式可知 $c_2=-c_4$或 $c^2=\quad 1$,若 $c_2=-c_4$,将(45)和(46)式代入(40)和(41),(43)得

$$\begin{aligned}x_1(u)&=\frac{e^{-q}}{\sinh(u)}c_2(ce^q+e^{-u})(c-e^{q-u})g(u),\\ x_2(u)&=\frac{e^{-q}}{\sinh(u)}c_2(ce^q+e^u)(c-e^{q-u})g(u),\\ x_3(u)&=\frac{e^{2q}}{\sinh(u)}c_2(ce^{-q}-e^u)e^{-q}(c+e^{u-q})g(u)\end{aligned} \tag{48}$$

若 $c^2=-1$,将(45)和(46)式代入(43)式得

$$x_3(u)=\frac{e^{2q}}{\sinh(u)}(cc_2e^{-q}+cc_1e^{u-q})e^{-q}(c+e^{u-q})g(u). \tag{49}$$

将(48)式代入 Eq[2,6](注意到$\tilde{\mu}=\tilde{\nu}=0$)

$$\mu^2\left(\sinh\left(-2q+\frac{u+v}{2}\right)-\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\right)(c-e^{q-u})e^{-q}(c+e^{v-q})=$$

$$\nu\cosh(q-u)\left(e^{(v-u)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\tilde{x}_2(v)-e^{-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\tilde{x}_3(u)\right)\sinh(2q)-$$

$$v\cosh(q-v)\left(\mathrm{e}^{(v-u)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\tilde{x}_2(u)+\mathrm{e}^{(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\tilde{x}_1(u)\right)\sinh(2q), \tag{50}$$

$$c_2=\frac{\mu^2}{v}\frac{\mathrm{e}^{-q}\sinh(q)}{\sinh(2q)}\frac{\cosh\left(q-\frac{u+v}{2}\right)}{\sinh\left(q-\frac{u+v}{2}\right)} \tag{51}$$

这显然与 c_2为参数相矛盾,因此 $c_2=-c_4$不成立.将(40),(41),(49)式代入(50)式得

$$-\frac{\mu^2}{v}\frac{c\mathrm{e}^{-2q}\sinh(q)}{\sinh(2q)}$$

$$c_2=\frac{\mu^2}{v}\frac{\mathrm{e}^{q}\sinh(q)}{\sinh(2q)}$$

(54)

另外有

$$\begin{aligned}
y_{11}(u)&=\mu(c-\mathrm{e}^{q-u})g(u),\\
y_{12}(u)&=\mu\,\mathrm{e}^{-q}(c+\mathrm{e}^{u-q})g(u),\\
z_1(u)&=v\cosh(q-u)g(u),\\
y_{21}(u)&=y_{22}(u)=z_2(u)=0.
\end{aligned} \tag{55}$$

C3 对于情形Ⅲ,同情形Ⅱ的求解过程一样,由 Eq[4,1],Eq[9,6]和 Eq[6,2]得到

$$\begin{aligned}
x_1(u)&=\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{v}}\frac{\mathrm{e}^{-q-u}}{\cosh(q)}(c\cosh(q)+\sinh(u-2q))g(u),\\
x_2(u)&=\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{v}}\frac{\mathrm{e}^{-q}}{\cosh(q)}(c\cosh(q+u)-\sinh(2q))g(u),\\
x_3(u)&=\frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{v}}\frac{\mathrm{e}^{-q+u}}{\cosh(q)}(c\cosh(q)+\sinh(u-2q))g(u).
\end{aligned}$$

另外有

$$\begin{aligned}
y_{21}(u)&=\tilde{\mu}(c-\mathrm{e}^{q-u})g(u),\\
y_{22}(u)&=\tilde{\mu}\,\mathrm{e}^{-q}(c+\mathrm{e}^{u-q})g(u),\\
z_2(u)&=\tilde{v}\cosh(q-u)g(u),\\
y_{11}(u)&=y_{12}(u)=z_1(u)=0.
\end{aligned}$$

且有 $c^2=-1$.

C4 对于情形Ⅳ，由 Eq[1,7]得

$$2e^{-2q+(u-v)/2}\sinh(2q)\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)(\sinh(3q)-\sinh(3q-u-v))y_{11}(u)y_{11}(v)+$$

$$2e^{-(u+v)/2}\sinh(2q)\cosh\left(3q-\frac{u+v}{2}\right)(\sinh(q)-\sinh(q-u+v))y_{11}(v)y_{12}(u)=0. \tag{58}$$

由(58)式很容易得到$\mu=0$，这与假设$\mu\neq 0$相矛盾．同样，由 Eq[7,1]可得到$\tilde{\mu}=0$，这与假设$\tilde{\mu}\neq 0$相矛盾．显然，情形Ⅳ是不存在的．

C5 对于情形 V，对(24)式中的 u 求导并令 $u=0$ 得

$$x_1(v)=\frac{e^{-q}}{\sinh(v)}\Bigg[(c_1+c_2e^{-v})(c-e^{q-v})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}v}{2\mu}(ce^{q-v}\cosh(q)+c\,e^{v}\cosh(2q)-e^{q-2v}\sinh(2q)-\sinh(3q))\Bigg]g(u), \tag{59}$$

这里 c_1，c_2为任意参数．将(59)式代回(24)式得

$$x_2(u)=\frac{e^{-q}}{\sinh(u)}\Bigg[(c_1+c_2e^{u})(c-e^{q-u})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}v}{2\mu}(ce^{q-u}\cosh(q)+c\,e^{u}\cosh(2q)-e^{q}\sinh(2q)-\sinh(3q))\Bigg]g(u)+$$

$$\frac{\tilde{\mu}v}{\mu}(c\cosh(q)+\cosh(u-2q)+\frac{e^{-q}+ce^{-v}-(1+c^2)e^{u+v-q}}{c-e^{q-v}}\cosh(2q))g(u). \tag{60}$$

由于$x_2(u)$中不能含有 v，因此只有当 $c^2=-1$ 时，有

$$x_2(u)=\frac{e^{-q}}{\sinh(u)}\Bigg[(c_1+c_2e^{u})(c-e^{q-u})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}v}{2\mu}(ce^{q-u}\cosh(q)+c\,e^{u}\cosh(2q)-e^{q}\sinh(2q)-\sinh(3q))\Bigg]g(u)+$$

$$\frac{\tilde{\mu}v}{\mu}(ce^{-2q}\sinh(q)+\cosh(u-2q))g(u). \tag{61}$$

对(42)式中的 u 求导并令 $u=0$，得

$$x_3(v)=\frac{e^{2q}}{\sinh(v)}\Bigg[(c_3+c_4\,e^{v})e^{-q}(c+e^{v-q})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}v}{2\mu}\,e^{-2q}(ce^{q-v}\cosh(2q)+ce^{v}\cosh(q)-e^{2v}\sinh(2q)-e^{q}\sinh(3q))\Bigg]g(u). \tag{62}$$

将(62)代入(42)式得

$$x_2(u)=\frac{e^{2q}}{\sinh(u)}\Bigg[(c_3+c_4e^{-u})\,e^{-q}(c+e^{u-q})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}\nu}{2\mu}e^{-2q}(ce^{q-u}\cosh(2q)+c\,e^{u}\cosh(q)-\sinh(2q)-e^{q}\sinh(3q))\Big]g(u)+$$

$$\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}(\cosh(u-2q)-c\cosh(q)+\frac{(ce^{v-q}-1)+(1+c^2)e^{-u-v}}{e^{-q}(c+e^{v-q})}\cosh(2q))g(u). \tag{63}$$

同样,当 $c^2=-1$ 时,$x_2(u)$ (63)中才不含有 v,得

$$x_2(u)=\frac{e^{2q}}{\sinh(u)}\Big[(c_3+c_4e^{-u})e^{-q}(c+e^{u-q})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}\nu}{2\mu}e^{-2q}(ce^{q-u}\cosh(2q)+ce^{u}\cosh(q)-\sinh(2q)-e^{q}\sinh(3q))\Big]g(u)+$$

$$\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}(ce^{2q}\sinh(q)+\cosh(u-2q))g(u). \tag{64}$$

由(61)和(64)式可得

$$c_4=cc_1e^{-q}-\frac{1}{2}\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}e^{-3q}\sinh(q), \tag{65}$$

$$c_3=cc_2e^{-q}-\frac{c}{2}\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}e^{2q}\sinh(q). \tag{66}$$

再将(65),(66)代入(62)式得

$$x_3(u)=\frac{e^{2q}}{\sinh(u)}\Big[(cc_2+cc_1e^{u})e^{-2q}(c+e^{u-q})-$$

$$\frac{\tilde{\mu}\nu}{2\mu}\sinh(q)(c\,e^{2q}+e^{u-3q})e^{-q}(c+e^{u-q})+$$

$$\frac{\tilde{\mu}\nu}{2\mu}e^{-2q}(ce^{q-u}\cosh(2q)+ce^{u}\cosh(q)-e^{2u}\sinh(2q)-e^{q}\sinh(3q))\Big]g(u). \tag{67}$$

将(59)式和(61)式代入 Eq[2,4]

$$e^{(u-v)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh(2q)\tilde{x}_1(u)\tilde{x}_2(v)+e^{-(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\sinh(2q)\tilde{x}_2(u)\tilde{x}_2(v)-$$

$$e^{(u+v)/2}\sinh\left(\frac{u-v}{2}\right)\sinh(2q)\tilde{x}_1(u)\tilde{x}_1(v)-e^{(v+u)/2}\sinh\left(\frac{u+v}{2}\right)\sinh(2q)\tilde{x}_1(v)\tilde{x}_2(u)=$$

$$2\tilde{\mu}\mu(e^{2q-u-v}\sinh(q)+\sinh(q)-e^{-q}\sinh(4q))\left(c\cosh\left(\frac{u-v}{2}\right)+\sinh\left(\frac{u+v}{2}-q\right)\right)+$$

$$\frac{\tilde{\mu}^2\nu^2}{\mu^2}e^{-(u+v)/2}\sinh(2q)\cosh(q-u)\cosh(q-v), \tag{68}$$

得

$$c_1=-c\frac{\mu^2}{\nu}\frac{e^{-2q}\sinh(q)}{\sinh(2q)}-c\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}\sinh(q)\cosh(2q), \tag{69}$$

$$c_2=\frac{\mu^2}{\nu}\frac{e^{q}\sinh(q)}{\sinh(2q)}-\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}e^{-q}\sinh(q). \tag{70}$$

将(69)和(70)代入(59)，(61)，(67)式得

$$
\begin{aligned}
x_1(u) = & \frac{1}{\sinh(u)}\left[\frac{\mu^2}{\nu}\frac{e^{-q-u}}{\cosh(q)}(c\cosh(q)+\sinh(u-2q))+\right. \\
& \left.\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}\cosh(q-u)(c\cosh(2q)-e^{-u}\sinh(q))\right]g(u), \\
x_2(u) = & \frac{1}{\sinh(u)}\left[\frac{\mu^2}{\nu}\frac{e^{-q}}{\cosh(q)}(c\cosh(q+u)-\sinh(2q))+\right. \\
& \left.\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}\cosh(q-u)(c\cosh(2q)+\sinh(u-q))\right]g(u), \\
x_3(u) = & \frac{1}{\sinh(u)}\left[\frac{\mu^2}{\nu}\frac{e^{-q+u}}{\cosh(q)}(c\cosh(q)+\sinh(u-2q))+\right. \\
& \left.\frac{\tilde{\mu}\nu}{\mu}\cosh(q-u)(c\cosh(2q)-e^{u}\sinh(q))\right]g(u).
\end{aligned}
\tag{71}
$$

另外有(19)式.

我们至此就完成了对角元的计算，获得了所有的解必须满足的几种可能形式．在下面的讨论中将说明，这些解满足反射方程的所有分量，从而是反射方程的解．

5 讨论

令(71)式中 $\nu=\mu^2$, $\tilde{\nu}=\tilde{\mu}^2$, $g(u)=\dfrac{e^q\sinh(u)\cosh(3q)}{\sinh\left(\dfrac{u}{2}-2q\right)+c\cosh\left(q+\dfrac{u}{2}\right)}\tilde{\rho}^K(u)$，再令 $\mu\to 0$，$\tilde{\mu}\to 0$，则可得到(35)式．令(71)式和(19)式中的 $\tilde{\mu}=\tilde{\nu}=0$，则可分别得到(54)和(55)式．令(71)式和(19)式中的 $\nu=\left(\dfrac{\mu}{\tilde{\mu}}\right)^2\tilde{\nu}$，再令 $\mu\to 0$，则可分别得到(56)和(57)式．很容易看出，若经过归一化后，(55)，(54)和(56)，(57)式中分别只有一个自由参数．而(71)，(19)式中只有两个自由参数．

由于 Eq[j,i] 可由 Eq[i,j] 通过交换 $y_{11}(u)\leftrightarrow y_{21}(u)$, $y_{12}(u)\leftrightarrow y_{22}(u)$, $z_1(u)\leftrightarrow z_2(u)$ 而得到，不难验证，如果前面所得的解 $K(u)$ 中的元素满足 Eq[i,j]，那么它们也一定满足 Eq[j,i]．另外一方面，由于 Eq[$10-i,10-j$] 可由 Eq[i,j] 通过交换 $x_1(u)\leftrightarrow x_3(u)$，$y_{11}(u)\leftrightarrow y_{12}(u)$，$y_{21}(u)\leftrightarrow y_{22}(u)$，$e(u)\leftrightarrow\bar{e}(u)$，$f(u)\leftrightarrow\bar{f}(u)$, $g(u)\leftrightarrow\bar{g}(u)$ 而得到，我们认为，如果前面所得的解 $K(u)$ 中的元素满足 Eq[i,j]，则它们也满足 Eq[$10-i,10-j$]．因此，如果前面所得解 $K(u)$ 中的元素满足 Eq[i,i] ($i\in[1,9]$)，和 Eq[i,j] ($i\in[1,4]$, $j\in[i+1,10-i]$)，认为 $K(u)$ 中的元素满足所有的 Eq[i,j] ($i,j\in[1,9]$)，即 $K(u)$ 为反射方程(1)的解．我们已经验证了把(71)式和(19)式代入反射方程(1)中所产生的Eq[i,i] ($i\in[1,9]$) 和 Eq[i,j] ($i\in[1,4]$, $j\in[i+1,10-i]$)．

参考文献(References)

1 Sklyanin E K. J. Phys., 1988 **A21**:2735

2 Mezincescu L, Nepomechie R I. J. Phys.,1991, **A24**:L17

3 Mezincescu L, Nepomechie R I. Int. J. Mod. Phys., 1991, **A6**:5231

4 de Vega H J, Gonzalez-Ruiz A. J Phys., 1993, **A26**: L519

5 Gonzalez-Ruiz A. Nucl. Phys., 1994, **B424**:468

6 FU H C, GE M L. J. Phys., 1994, **A27**:4457

7 HOU B Y, YUE R H. Phys. Lett., 1993, **A183**:169

8 HOU B Y, SHI K J, FAN H et al. Commun. Theor. Phys., 1995, **23**:163

9 Batchelor M T, Fridkin V, Kuniba A et al. Phys. Lett., 1996, **B376**: 266—274

10 CHEN Min, HOU BoYu, SHI KangJie. High Energy. Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, **20**:794
(陈敏,侯伯宇,石康杰. 高能物理与核物理,1996, **20**:794)

11 SHI KangJie, LI GuangLiang, FAN Heng et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23**(5):425
(石康杰,李广良,范桁等. 高能物理与核物理,1999, **23**(5):425)

12 Kim J D. hep-th/9412192

13 Jimbo M. Commun. Math. Phys., 1986, **102**:537

14 Bazhanov V V. Commun. Math. Phys., 1987, **113**:471

15 YANG C N, YANG C P. Phys. Rev., 1966, **105**:321-322; 1966, **151**:258

16 Baxter R J. Exactly Solved Models in Statitical Mechanics. London: Academic Press. 1982

Constant Solutions to the Reflection Equation of 19 Vertex Model

SHI KangJie LI GuangLiang FAN Heng YUE RuiHong HOU BoYu

(*Institue of Modern Physics, Northwest University, Xi'an* 710069, *China*)

Abstract We present the constant solutions with all matric elements non-Vanishing to the reflection equation of 19 vertex model-$A_2^{(2)}$ model. Some nondigonal solutions are also obtained.

Key words $A_2^{(2)}$ model, reflection equation, constant solution

Received 24 November 1998