

2 + 1 维 $U(1)$ 格点规范场论中 真空态的研究*

江俊勤

罗向前

(广东教育学院物理系 广州 510303)

(中山大学物理系 广州 510275)

摘要 对 2 + 1 维 $U(1)$ 格点规范场论真空态进行研究, 仔细推导出连续极限下真空波函数中参数 μ_0 和 μ_2 的普适表达式, 并用截断本征方程法进行数值计算.

关键词 格点规范 真空波函数 连续极限

1 引言

哈密顿量形式的格点规范场论的优点在于它不但能计算质量谱, 而且能计算波函数^[1]. 在某些情况下, 波函数比质量谱给出更多的物理信息^[2-5], 因此, 人们对规范场论的真空波函数做了不少研究^[6-9]. 文献 [8] 给出 $U(1)$ 规范场论真空波函数中参数 μ_0 和 μ_2 的解析式, 最近我们重新对 Wilson 圈的连续极限的行为进行仔细研究, 发现文献 [8] 中 μ_2 表达式需要改正. 本文给出 μ_0 和 μ_2 正确而普适的表达式, 并用截断本征方程法进行数值计算.

2 本征方程和真空波函数

在 Kogut-Susskind 哈密顿量^[8]

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_l E_l^2 - \frac{1}{2ag^2} \sum_p (U_p + U_p^\dagger) \quad (1)$$

中, U_p 代表最小方块的 Wilson 圈 (即一阶 Wilson 圈), a 为格距, g 为无量纲耦合常数, 它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$, E_l 为规范场色电场强.

真空波函数可取为^[8]

$$|\Omega\rangle = \exp(R)|0\rangle, \quad (2)$$

其中 $|0\rangle$ 为裸真空, 定义为 $E_l|0\rangle = 0$. R 由 Wilson 圈组成, 可按圈图的阶展开:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i. \quad (3)$$

1998-06-29 收稿

* 国家自然科学基金资助

利用公式

$$e^{-R} H e^R = H - [R, H] + \frac{1}{2!} [R, [R, H]] + \dots, \quad (4)$$

可得 n 阶截断本征方程

$$\sum_l ([E_l, [E_l, R]] + \sum_{i+j \leq n} [E_l, R_i][E_l, R_j]) - \frac{1}{g^4} \sum_p (U_p + U_p^+) = W_0, \quad (5)$$

式中 $W_0 = 2aE_Q / g^2$, E_Q 为真空能量. 取一阶圈图为

$$R_1 = C_1 \sum_x \square, \quad (6)$$

式中 $\square = U_p(x) + U_p^+(x) = \square + \text{h.c.}$, 即不画方向的 Wilson 圈是两个互为厄米共轭的有方向的 Wilson 圈之和. 对于 2, 3, 4, 5, ... 阶圈图也如此规定, 例如:

$$\square\square = \square\square + \text{h.c.}$$

二阶图由 $[E_l, R_1][E_l, R_1]$ 产生 (共有 3 个):

$$R_2 = C_2 \sum_x \square\square + C_3 \sum_x \square\square + C_4 \sum_x \square\square. \quad (7)$$

三阶图由 $[E_l, R_1][E_l, R_2]$ 产生 (共有 9 个):

$$R_3 = \sum_x \left(C_5 \square\square\square + C_6 \square\square\square + C_7 \square\square\square + C_8 \square\square\square + C_9 \square\square\square + C_{10} \square\square\square + C_{11} \square\square\square + C_{12} \square\square\square + C_{13} \square\square\square \right). \quad (8)$$

设 R_{ij} 为 R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 中第 j 个图, 对 $U(1)$ 群, $[E_l, [E_l, R_{ij}]$ 只产生与 R_{ij} 相同的圈图:

$$[E_l, [E_l, R_{ij}]] = (m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots) R_{ij}. \quad (9)$$

式中, m_1, m_2, m_3, \dots 分别为 R_{ij} 圈图中单重 (即非重叠) 链数, 双重 (重叠二次) 链数, 三重 (重叠三次) 链数, ... 例如:

$$[E_l, [E_l, \square\square]] = 6 \square\square, \text{ 其中系数 6 等于 } \square\square \text{ 的单重链数 6, 即 } 6 \times 1 = 6.$$

$[E_l, [E_l, \square\square\square]] = 16 \square\square\square$, 其中系数 16 等于 $\square\square\square$ 的单重链数 8 与双重链数 4 的 2 倍之和, 即 $8 \times 1 + 4 \times 2 = 16$.

$[E_l, [E_l, \square\square\square]] = 36 \square\square\square$, 其中系数 36 等于 $\square\square\square$ 的三重链数 12 的 3 倍, 即 $12 \times 3 = 36$.

当截断至三阶时, (5) 式可写成

$$\sum_l ([E_l, [E_l, R_1]] + [E_l, [E_l, R_2]] + [E_l, [E_l, R_3]] + [E_l, R_1][E_l, R_1] + 2[E_l, R_1][E_l, R_2]) - \frac{1}{g^4} \sum_p (U_p + U_p^+) = W_0. \quad (10)$$

将 (6—9) 式代 (10) 式, 得 13 个独立方程

$$\begin{aligned}
2C_1(2 - 8C_2 - 10C_3 - 6C_4) - 1/g^4 &= 0, \\
2C_2 + C_1^2/2 &= 0, \quad 5C_3 + 2C_1^2 = 0, \quad 3C_4 - 2C_1^2 = 0, \\
9C_5 + 4C_1C_2 &= 0, \quad 3C_6 + C_1(4C_2 + 5C_3)/2 = 0, \\
2C_7 + C_1(3C_4 - 4C_2)/2 &= 0, \quad C_8 + C_1C_3/2 = 0, \\
4C_9 + C_1C_3 &= 0, \quad 3C_{10} + C_1(C_4 - C_3) = 0, \\
3C_{11} + 2C_1(C_4 - C_3) &= 0, \quad C_{12} - C_1C_4/2 = 0, \quad C_{13} = 2C_{12}.
\end{aligned} \tag{11}$$

解此非线性方程组可求出 C_1, C_2, \dots, C_{13} .

对于二阶截断, 对应的方程组仅含 4 个方程, 很易求解(略), 对于三阶以上 ($n > 3$), 方程组个数迅速增加, 例如 $n = 5$ 时, 非线性方程组含 356 个方程, 计算量很大.

3 μ_0 和 μ_2 表达式的普遍推导

对于 2 + 1 维 $U(1)$ 规范场论, 连续极限下 ($a \rightarrow 0$) 长波行为真空波函数为^[9, 10]:

$$|\Omega\rangle = \exp \left[-\mu_0 \iint F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - \mu_2 \iint F_{12}(x_0, y_0)(D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right], \tag{12}$$

式中 F_{12} 为场强张量 (1 和 2 表示空间的两个方向), D_1, D_2 为协变导数.

为了求出各 Wilson 圈对 μ_0 和 μ_2 的贡献, 把任意 Wilson 圈图看做最小 (即一阶) Wilson 圈图的组合, 如图 1 所示.

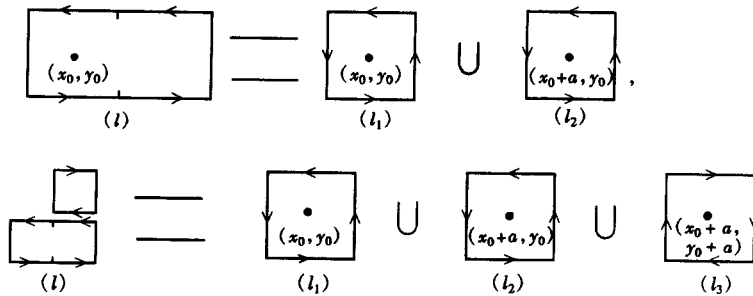


图1 二阶和三阶Wilson圈的分解

U 表示并集运算, (x_0, y_0) 表示小方块中心坐标.

3.1 一阶圈图对 μ_0 和 μ_2 的贡献

对于任意 Wilson 圈 R_{ij} , 有

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= 2\text{Re}[\exp(-ie \oint_l A_\mu dx_\mu)] = \\
2\text{Re} \left[1 - ie \oint_l A_\mu dx_\mu - \frac{1}{2} e^2 (\oint_l A_\mu dx_\mu)^2 + \dots \right] &= 2 - e^2 (\oint_l A_\mu dx_\mu)^2,
\end{aligned} \tag{13}$$

式中 A_μ 为规范势.

对一阶图, 由 stocks 公式得

$$\oint_l A_\mu dx_\mu = \oint_{\square} A_\mu dx_\mu = \iint_{\square} [\partial_\mu A_\nu(x + x_0) - \partial_\nu A_\mu(x + x_0)] dx_\mu dx_\nu.$$

其中 x_0 为圈图中心位矢, x 为相对于圈图中心的位矢, 如图 2 所示.

由 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, 并考虑到 μ, ν 均取 1 或 2, 得

$$\oint_l A_\mu dx_\mu = \iint_{-a/2}^{a/2} F_{12}(x_0 + x) dx dy.$$

$|x|$ 是与 a 同数量级的小量, 由泰勒展开

$$F_{12}(x_0 + x) \Rightarrow F_{12}(x_0, y_0) + (xD_1 + yD_2)F_{12}(x_0, y_0) +$$

$$\frac{1}{2}(x^2 D_1^2 + y^2 D_2^2 + 2xyD_1D_2)F_{12}(x_0, y_0)$$

得

$$\begin{aligned} \oint_l A_\mu dx_\mu &= \iint_l [F_{12}(x_0, y_0) + (xD_1 + yD_2)F_{12}(x_0, y_0) + \\ &\quad \frac{1}{2}(x^2 D_1^2 + y^2 D_2^2 + 2xyD_1D_2)F_{12}(x_0, y_0)] dx dy = \\ &\quad a^2 F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (14)$$

把(14)式代入(13)式, 并略去与动力学无关的常数, 得

$$\square \sim -e^2 \left\{ a^4 F_{12}^2(x_0, y_0) + \frac{1}{12} a^6 F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) \right\}.$$

$$\therefore |\Omega\rangle = \exp(R_1) |0\rangle$$

$$\sim \exp \left\{ -C_1 e^2 \sum_{x_0, y_0} \left[a^4 F_{12}^2(x_0, y_0) + \frac{1}{12} a^6 F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) \right] \right\}.$$

当 $a \rightarrow 0$ 时, $a^2 \rightarrow dx_0 dy_0$, $a^2 \sum_{x_0, y_0} \rightarrow \iint dx_0 dy_0$, 故当 $a \rightarrow 0$ 时, 有

$$|\Omega\rangle \sim \exp \left[-C_1 e^2 a^2 \iint F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 - \frac{1}{12} C_1 e^2 a^4 \iint F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right].$$

与(12)式比较得 R_1 对 μ_0 的贡献为 ($g^2 = e^2 a$):

$$g^2 a C_1 A_1 = C_1 g^2 a, \quad (\text{即 } A_1 = 1).$$

对 μ_2 的贡献为:

$$g^2 a^3 C_1 B_1 = \frac{1}{12} C_1 g^2 a^3, \quad (\text{即 } B_1 = \frac{1}{12}).$$

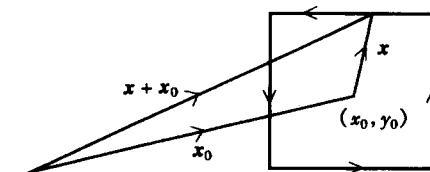


图2


(x_0, y_0) 为中心点坐标.

3.2 二阶图对 μ_0 和 μ_2 的贡献

二阶圈图共有 3 个, 现以  为例, 由图 1 有:

$$\begin{aligned} \oint_l A_\mu dx_\mu &= \oint_{l_1} A_\mu dx_\mu + \oint_{l_2} A_\mu dx_\mu = a^2 F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) + \\ & a^2 F_{12}(x_0 + a, y_0) + \frac{1}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0 + a, y_0) = \\ & 2a^2 F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{12} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) + a^3 D_1 F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{2} a^4 D_1^2 F_{12}(x_0, y_0). \end{aligned}$$


上式最后一步利用了泰勒公式, 并取至 a^4 . 代入 (13) 式得 (略去与动力学无关的参数, 下同):


$$\begin{aligned} C_4 \sum_x \text{} &\sim C_4 e^2 \sum_x \left(\oint_l A_\mu dx_\mu \right)^2 \stackrel{a \rightarrow 0}{=} - C_4 e^2 \left\{ 4a^2 \iint F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \right. \\ & a^4 \iint [D_1 F_{12}(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0 + \frac{1}{3} a^4 \iint F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \\ & \left. 2a^4 \iint F_{12}(x_0, y_0) D_1^2 F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + 4a^3 \iint F_{12}(x_0, y_0) D_1 F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right\} = \\ & - C_4 e^2 \left\{ 4a^2 \iint F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 + \frac{1}{3} a^4 \iint F_{12}(x_0, y_0) (4D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

(15) 式最后一步用到如下积分公式:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint F_{12}(x_0, y_0) D_i F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 = 0, \\ I_2 &= \iint [D_i F_{12}(x_0, y_0)]^2 dx_0 dy_0 = - \iint F_{12}(x_0, y_0) D_i^2 F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0, \quad (i = 1, 2). \quad (16) \end{aligned}$$


(15) 式对 x, y 方向求平均得

$$\begin{aligned} C_4 \sum_x \text{} &\sim - C_4 g^2 \left\{ 4a \iint F_{12}^2(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right. \\ & \left. + \frac{5}{6} a^3 \iint F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

把 (17) 式代入 (2) 式, 并与 (12) 式比较得 $C_4 \sum_x \text{}$ 对 μ_0 的贡献为 $g^2 a C_4 A_4 = 4 C_4 g^2 a$ (即

$A_4 = 4$), 对 μ_2 的贡献为 $g^2 a^3 C_4 B_4 = \frac{5}{6} C_4 g^2 a^3$ (即 $B_4 = \frac{5}{6}$).

3.3 三阶圈图对 μ_0 和 μ_2 的贡献

三阶圈图共有 9 个, 现以  为例, 由图 1 知:

$$\oint_l A_\mu dx_\mu = \oint_{l_1} A_\mu dx_\mu + \oint_{l_2} A_\mu dx_\mu + \oint_{l_3} A_\mu dx_\mu =$$

$$a^2 F_{12}(x_0, y_0) + \frac{1}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) - a^3 D_2 F_{12}(x_0, y_0) - \frac{1}{2} a^4 (D_2^2 + 2D_1 D_2) F_{12}(x_0, y_0).$$

$$\therefore \left(\oint_l A_\mu dx_\mu \right)^2 = a^4 F_{12}^2(x_0, y_0) + \frac{1}{12} a^6 F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 - 23D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) -$$


$$2a^6 F_{12}(x_0, y_0) D_1 D_2 F_{12}(x_0, y_0).$$


考虑对 $+y$ 和 $-y$ 方向求平均, 则上式第三项正好消去, 故

$$\left(\oint A_\mu dx_\mu \right)^2 = a^4 F_{12}^2(x_0, y_0) + \frac{1}{12} a^6 F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 - 23D_2^2) F_{12}(x_0, y_0).$$

再对 x 和 y 方向求平均, 得

$$\left(\oint A_\mu dx_\mu \right)^2 = a^4 F_{12}^2(x_0, y_0) - \frac{11}{12} a^6 F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0).$$

$$\therefore C_{11} \sum_x \text{\left. \frac{11}{12} a^3 \iint F_{12}(x_0, y_0) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \right\}. \quad (18)$$

$$\therefore C_{11} \sum_x \text{

3.4 任意阶圈图对 μ_0 和 μ_2 的贡献$$

由上述一、二、三阶圈图对 μ_0 和 μ_2 贡献的计算过程可得如下规律:

(1) 考虑对各方向求平均后可以消去交叉项 $F_{12}(x_0, y_0) D_1 D_2 F_{12}(x_0, y_0)$.

(2) 利用积分公式(16), 可以消去 $F_{12}(x_0, y_0) D_i F_{12}(x_0, y_0)$.

设某一个 N 阶圈图由 N_1 个反时针一阶图和 N_2 个顺时针一阶图组成 ($N_1 + N_2 = N$), 第 l ($l = 1, 2, \dots, N_1$) 个反时针一阶图的中心点坐标为 $(x_0 + x_l a, y_0 + y_l a)$, 第 m ($m = 1, 2, \dots, N_2$) 个顺时针一阶图的中心点坐标为 $(x_0 + \bar{x}_m a, y_0 + \bar{y}_m a)$.

由(14)式, Stocks 公式, 泰勒公式和规律(1), 得

$$\oint_l A_\mu dx_\mu = N_1 a^2 F_{12} - N_2 a^2 F_{12} + \frac{N_1}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12} - \frac{N_2}{24} a^4 (D_1^2 + D_2^2) F_{12} +$$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l \right) a^3 D_1 F_{12} - \left(\sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right) a^3 D_2 F_{12} + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l \right) a^3 D_2 F_{12} - \left(\sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right) a^3 D_1 F_{12} + \\ & \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l^2 \right) a^4 D_1 F_{12} - \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m^2 \right) a^4 D_1 F_{12} + \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l^2 \right) a^4 D_2 F_{12} - \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m^2 \right) a^4 D_2 F_{12}, \quad (19) \end{aligned}$$

式中 $F_{12} \equiv F_{12}(x_0, y_0)$.

考虑到规律(2), 并保留至 a^6 , 得

$$\begin{aligned} & \left(\oint A_\mu dx_\mu \right)^2 \sim (N_1 - N_2)^2 a^4 F_{12}^2 + \frac{a^6}{12} (N_1 - N_2)^2 F_{12} (D_1^2 + D_2^2) F_{12} + \\ & \left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 a^6 (D_1 F_{12})^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 a^6 (D_2 F_{12})^2 + \\ & (N_1 - N_2) a^6 \left\{ \left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l^2 - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m^2 \right) (F_{12} D_1^2 F_{12}) + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l^2 - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m^2 \right) (F_{12} D_2^2 F_{12}) \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

对 x 和 y 方向求平均, 得

$$\begin{aligned} & \left(\oint A_\mu dx_\mu \right)^2 \sim (N_1 - N_2)^2 a^4 F_{12}^2 + \frac{a^6}{12} (N_1 - N_2)^2 F_{12} (D_1^2 + D_2^2) F_{12} + \\ & \frac{1}{2} a^6 \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 \right] [(D_1 F_{12})^2 + (D_2 F_{12})^2] + \\ & \frac{1}{2} a^6 (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\tilde{x}_m^2 + \tilde{y}_m^2) \right] F_{12} (D_1^2 + D_2^2) F_{12}. \quad (21) \end{aligned}$$

当 $a \rightarrow 0$ 时, $a^2 \rightarrow dx_0 dy_0$, $a^2 \sum_{x_0 y_0} \rightarrow \iint dx_0 dy_0$, 把(21)式代入(13)式和(2)式, 考虑(16)式并

与(12)式比较得这一个 N 阶圈图对 μ_0 的贡献为: $C_n A_n g^2 a = C_n (N_1 - N_2)^2 g^2 a$,

对 μ_2 的贡献为

$$\begin{aligned} C_n B_n g^2 a^3 = C_n & \left\{ \frac{1}{12} (N_1 - N_2)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\tilde{x}_m^2 + \tilde{y}_m^2) \right] \right\} g^2 a^3. \quad (22) \end{aligned}$$


与(22)式比较可见, 文献[8]中(2.12)式漏掉了第一项: $\frac{1}{12} (N_1 - N_2)^2 g^2 a^3 C_n$.

把各种圈图对 μ_0, μ_2 的贡献加起来, 得 N 阶截断时 μ_0, μ_2 的表达式

$$\mu_0 = g^2 a \sum_n C_n A_n = g^2 a \sum_n C_n (N_1 - N_2)^2,$$

$$\mu_2 = g^2 a^3 \sum_n C_n B_n = g^2 a^3 \sum_n C_n \left\{ \frac{1}{12} (N_1 - N_2)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \bar{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \bar{y}_m \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\bar{x}_m^2 + \bar{y}_m^2) \right] \right\}. \quad (23)$$

式中, C_n 由本征方程导出的非线性方程组求得.

为了说明 (23) 式中, A_n, B_n 如何求得, 下面以  为例. 由图 1 知, 它由两个反时针和一个顺时针的一阶图构成:

$$N_1 = 2, N_2 = 1, (x_1, y_1) = (0, 0), (x_2, y_2) = (1, 0) \quad (\bar{x}_1, \bar{y}_1) = (1, 1).$$

$$\therefore A_{11} = (2 - 1)^2 = 1,$$

$$B_{11} = \frac{1}{12} (2 - 1)^2 - \frac{1}{2} [(0 + 1 - 1)^2 + (0 + 0 - 1)^2] + \frac{1}{2} \times (2 - 1) \times [(0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2) - (1^2 + 1^2)] = -\frac{11}{12}.$$

对于三阶截断, (23) 式可具体写成

$$\begin{aligned} \mu_0 &= g^2 a (C_1 + 4C_2 + 4C_4 + 9C_5 + C_6 + 9C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} + 9C_{12} + 9C_{13}), \\ \mu_2 &= g^2 a^3 (C_1 + 4C_2 - 6C_3 + 10C_4 + 9C_5 - 11C_6 + 21C_7 + C_8 \\ &\quad + 13C_9 - 23C_{10} - 11C_{11} + 45C_{12} + 33C_{13}) / 12. \end{aligned} \quad (24)$$

4 数值计算和讨论

理论分析表明: 当 $a \rightarrow 0$ 时, 胶球质量 Ma 按指数衰减^[8,10]:

$$M^2 a^2 \rightarrow \frac{k_1}{g^2} \exp\left(-\frac{k_2}{g^2}\right), \quad k_1, k_2 \text{ 为常数.}$$

为了比较和讨论标度行为, 定义^[8,9]:

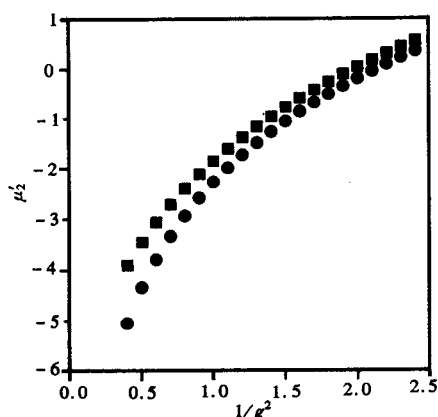
$$\mu'_0 = 2 \ln(g \sum_n C_n A_n), \quad \mu'_2 = \frac{2}{3} \ln\left(\frac{1}{g} \sum_n C_n B_n\right). \quad (25)$$

则当 $\beta = 1/g^2 \rightarrow \infty$ (即 $a \rightarrow 0$) 时: $\mu'_0 \rightarrow 2 \ln(\mu_0 M k_1^{-\frac{1}{2}}) + k_2 \beta$, $\mu'_2 \rightarrow \frac{2}{3} \ln(\mu_2 M^3 k_1^{-\frac{3}{2}}) + k_2 \beta$.

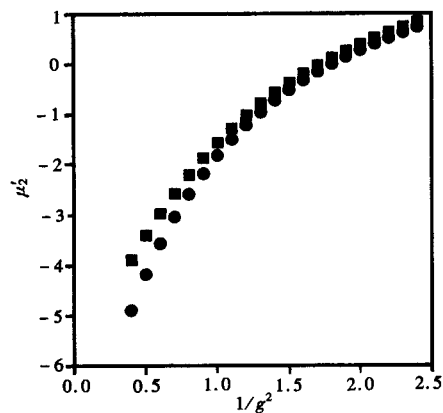
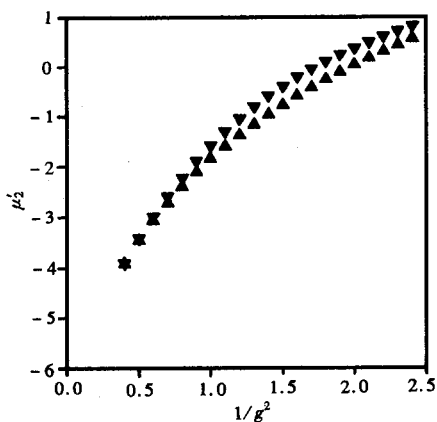
即在标度区内, μ'_0 和 μ'_2 与 β 的关系应是斜率为 k_2 的直线.

将 C_n, A_n, B_n 之值代入 (25) 式就可求得 μ'_0 和 μ'_2 与 β 的关系. 为方便起见, 在本文, 我们仅计算二、三阶截断情况下, μ'_2 与 β 的关系, 见图 3—5. 同时, 为了讨论 (22) 式中第一项 $C_n (N_1 - N_2)^2 g^2 a^3 / 12$ (文献 [8] 中遗漏了此项) 的作用, 也将文献 [8] 之 (2.12) 式的 B_n 代入 μ'_2 , 求出这时 μ'_2 与 β 的关系, 见图 3, 4, 6.

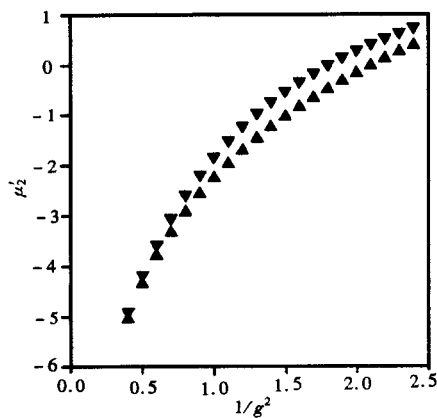
由图 3 和图 4 可见, 改正后 μ'_2 与 β 的关系更接近于直线 ($\beta \in [0.5, 2.0]$).

图 3 二阶截断时 μ'_2 与 $1/g^2$ 的关系

● 漏掉 $(N_1 - N_2)^2 C_n g^2 a^3 / 12$ 的结果 (文献 [8] 的计算结果), ■ 补上 $(N_1 - N_2)^2 C_n g^2 a^3 / 12$ 的结果 (本文的计算结果).

图 4 三阶截断时 μ'_2 与 $1/g^2$ 的关系
各符号的含义与图 3 相同.图 5 补上 $(N_1 - N_2)^2 C_n g^2 a^3 / 12$ 时 μ'_2 与 $1/g^2$ 的关系

▲ 二阶截断的结果, ▼ 三阶截断的结果.

图 6 遗漏 $(N_1 - N_2)^2 C_n g^2 a^3 / 12$ 项时 μ'_2 与 $1/g^2$ 的关系 (文献 [8] 的结果)

各符号含义与图 5 相同.

由图 5 和图 6 知,改正后 μ'_2 与 β 的关系的收敛性稍有提高 (与图 6 相比,图 5 中两曲线更加接近).

但同时也看到,计算到三阶截断时, μ'_2 与 β 关系的标度性不好 (离直线关系较远). 改善标度性有两种方法: (一) 提高截断阶数; (二) 对哈密顿量进行改进^[11]. 正如前面所述, 提高截断阶数, 计算量将急剧增加, 而且, 由于未知量 C_n 个数变得很大 (理论分析知 5 阶截断时共 356 个) 使得 C_n 所满足的非线性方程组难于求解. 我们认为对哈密顿量进行改进才是有效的方法, 哈密顿量的改进工作已经完成^[12], 要做的工作就是用改进的哈密顿量来计算 μ'_0 和 μ'_2 , 这方面的结果将另文报道.

本文仔细地推导出连续极限下真空波函数中参数 μ_0 和 μ_2 的普适表达式 (即 (23) 式) 具

有如下两面方面的意义:

(1) 改正以往 μ_2 表达式中的遗漏, 为使用改进的哈密顿量计算 $U(1)$ 规范场论的真空波函数做好准备(对于改进哈密顿量, (23) 式仍然成立, 只是其中 C_n 所满足的非线性方程组改进了).

(2) 本文推导 μ_0 和 μ_2 表达式过程中的思想方法对于 $SU(2)$ 和 $SU(3)$ 规范场论中 μ_0 和 μ_2 表达式的普遍推导可能有启示和帮助.

感谢郭硕鸿、刘金明和方锡岩的有益讨论.

参 考 文 献

- 1 Jiang Junqin, Luo Xiangqian. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23**(7): 644
(江俊勤, 罗向前. 高能物理与核物理, 1999, **23**(7): 644)
- 2 Luo Xiangqian et al. Z. Phys., 1990, **C47**: 635
- 3 Luo Xiangqian et al. J. Phys., 1990 **G16**: 1181; Phys. Rev., 1990, **D42**: 1293
- 4 Luo Xiangqian et al. Commun. Theor. Phys., 1991, **16**: 505; Phys. Rev., 1992, **D46**: 814; Mod. Phys. Lett., 1996, **A11**: 2435
- 5 Kröger H, Scheu N. Phys. Rev., 1997, **D56**: 1455
- 6 Bishop R F, Kend A S. Phys. Rev., 1993, **D48**: 887
- 7 Chen Qizhou et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1994, **18**(5): 418; 1995, **19**(5): 398
(陈启洲等. 高能物理与核物理, 1994, **18**(5): 418; 1995, **19**(5): 398)
- 8 Fang Xiyan, Liu Jinming, Guo Shuohong. Phys. Rev., 1996, **D53**: 1523
- 9 Liu Jinming, Luo Xiangqian, Fang Xiyan et al. Nucl. Phys., 1998, **B**(Proc. Suppl.). **63A-C**: 257
- 10 Cöpfung M, Mack G. Commun. Math. Phys., 1982, **82**: 545
- 11 Luo Xiangqian. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1999, **23**(2): 188
(罗向前. 高能物理与核物理, 1999, **23**(2): 188)
- 12 Luo Xiangqian, Guo Shuohong, Kröger Helmut, Schütte Dieter. Phys. Rev., 1999, **D59**: 034503

Study of the Vacuum State in (2 + 1)-Dimensional $U(1)$ Lattice Gauge Theory*

Jiang Junqin

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303)

Luo Xiangqian

(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract We investigate the vacuum state of (2 + 1)-dimensional $U(1)$ lattice gauge field theory, and derive the parameters of the continuum vacuum wave function in great details. The numerical results from the truncated eigenvalue equation method are also provided.

Key words lattice gauge, vacuum wave function, continuum limit

Received 29 June 1998

* Supported by the National Natural Science Foundation of China