第22卷 第9期　高能物理与核物理　Vol.22, No.9
1998 年9月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Sept., 1998

有限温度真空极化与热背景介质的电磁性质*

马凤才　刘艳侠　肖鸿飞
(辽宁大学物理系　沈阳　110036)

摘要　用有限温度场论方法,研究了真空极化的温度和密度效应及背景介质的电磁性质,严格计算了真空极化的有限温度、密度修正和热背景介质的介电常数与磁导率,给出了对任何温度和任何密度都适用的严格的解析表达式.

关键词　有限温度场论　真空极化　介电常数　磁导率

1　引言

在恒星内部,早期宇宙以及重离子碰撞等高温高压条件下的物理过程中,有限温度和密度(FTD)效应[1]可能具有重要作用. 几个作者曾在有限温度场论下讨论过真空极化过程[2,3],得到了一些有意义的结果. 由于FTD的影响,光子传播子被修正,进而影响了背景介质的电磁性质.

Welden[2]首先研究了相对论等离子体中的电磁现象,定义了FTD修正的介电常数和磁导率,并给出其在高温下的极限行为. Chanda, Nievs 和 Pal[3]也讨论了天体中的介电常数和磁导率的FTD修正,但没有给出明确的结果.

以上讨论只注意了温度效应,在其表达式中没有包括化学势,这只适用于背景介质是玻色子、中性等离子体或低密度的费密子(密度效应可忽略)的情况. Ahmed 和 Masood[4]试图推广文献[2]的结果到任意温度和密度,给出一个一般情况都适用的表达式. 然而,由于他们计算中的错误:对费米子分布函数 $n_F(p, -\mu)$ 定义含混不清以及取了不适当的近似,其结果不但不能象作者宣称的那样[4]适用于一切温度和密度范围,而且其可靠性也是值得怀疑的. 本文应用有限温度场论的方法,在单圈近似下,详细研究了真空极化的FTD效应,进而计算了热背景介质的介电常数和磁导率,给出了对任何温度和密度都适用的严格的解析结果.

1997-09-01收稿,1997-11-11收修改稿
* 辽宁省自然科学基金部分资助

2 有限温度和密度下的真空极化

考虑到有限温度和密度效应,在单圈近似下,真空极化过程如图 1 所示,真空极化张量可写为:

$$\mathrm{i}\pi_{\mu\nu} = -\mathrm{Tr}\int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4}(-\mathrm{i}er_\mu)\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p)(-\mathrm{i}er_\nu)\mathrm{i}S_\mathrm{F}(p+k), \tag{1}$$

其中 $S_\mathrm{F}(p)$是有限温度的传播子

$$S_\mathrm{F}(p) = (p+m)\left[\frac{1}{p^2-m^2} + 2\pi\mathrm{i}\delta(p^2-m^2)N_\mathrm{F}(p\cdot u)\right]. \tag{2}$$

式中 u_μ 和 m 分别是背景粒子的四速度和质量,

$$N_\mathrm{F}(p) = \theta(p_0)n_\mathrm{F}(p_0) + \theta(-p_0)\bar{n}_\mathrm{F}(p_0),$$

$$n_\mathrm{F}(p_0) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(p_0-\mu)}+1},\quad \bar{n}_\mathrm{F}(p_0) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(|p_0|+\mu)}+1}. \tag{3}$$

式中$\beta=\dfrac{1}{T}$是温度的倒数,化学势μ与背景粒子密度的关系为:

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3p[n_\mathrm{F}(p_0)-\bar{n}_\mathrm{F}(p_0)], \tag{4}$$

其中 g 是背景粒子的自旋简并度. 将(2)式代入(1)式,可将极化张量分成真空部分和与温度、密度相关部分,真空部分的重整化已被详尽研究[5]. 对于与温度、密度相关部分,已有人证明[6],如果理论是可重整化的,有限温度与密度效应不再产生新的紫外发散. 假设所用的电荷与质量等各量都是已重整化的,并只考虑 FTD 有关的部分:

$$\pi_{\mu\nu}(q,\beta) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^4pT_{\mu\nu}\left\{\frac{\delta(p^2-m^2)N_\mathrm{F}(p\cdot u)}{(p+k)^2-m^2} + \frac{\delta[(p+k)^2-m^2]N_\mathrm{F}[(p+k)\cdot u]}{p^2-m^2}\right\}, \tag{5}$$

其中

$$T_{\mu\nu} \equiv \mathrm{Tr}[r_\mu(p+m)r_\nu(p+k+m)] = 4[p_u(p+k)_\nu + p_\nu(p+k)_\mu - g_{\mu\nu}(p^2+pk-m^2)]. \tag{6}$$

由电磁作用的规范不变性有:

$$q^\mu\pi_{\mu\nu}(q,\beta) = 0, \tag{7}$$

由 $\pi_{\mu\nu}$ 的具体形式(5)，(6)式可知

$$q^{\nu}\pi_{\mu\nu}(q,\beta)=0\ . \tag{8}$$

满足这些性质的 $\pi_{\mu\nu}$ 可以一般地展开为[3]

$$\pi_{\mu\nu}(q,\beta)=\pi_{\mathrm{L}}Q_{\mu\nu}+\pi_{\mathrm{T}}R_{\mu\nu}+\pi_{\mathrm{P}}P_{\mu\nu}\ , \tag{9}$$

其中 π_{L}, π_{T}, π_{P} 为待定函数．作为基的三个张量定义为

$$Q_{\mu\nu}\equiv\frac{\tilde{u}_{\mu}\tilde{u}_{\nu}}{\tilde{u}^{2}}\ ,\quad R_{\mu\nu}\equiv g_{\mu\nu}-Q_{\mu\nu}\ ,$$

$$P_{\mu\nu}\equiv\frac{\mathrm{i}}{|\boldsymbol{q}|}\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q^{2}u^{\beta}\ , \tag{10}$$

式中

$$\tilde{u}_{\mu}=\tilde{g}_{\mu\nu}u^{\nu}\ ,\quad \tilde{g}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}-\frac{q_{\mu}q_{\nu}}{q^{2}}\ .$$

用(10)式中的三个张量作为基不是唯一的，但它们具有如下有用的性质：其中一个与另一个收缩为零，而

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}=2\ ,\quad Q_{\mu\nu}Q^{\mu\nu}=1\ ,\quad P_{\mu\nu}P^{\mu\nu}=-2\ . \tag{11}$$

利用这些性质，得到待定函数

$$\pi_{\mathrm{L}}(q,\beta)=Q^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}(q,\beta)\ ,$$

$$\pi_{\mathrm{T}}(q,\beta)=\frac{1}{2}R^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}(q,\beta)\ , \tag{12}$$

$$\pi_{\mathrm{P}}(q,\beta)=-\frac{1}{2}P^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu}(q,\beta)\ .$$

将(5)式代入(12)式，在介质静止坐标系 $u=(1,\mathbf{0})$，完成对 p_0 的积分(见附录)得

$$\pi_{\mathrm{L}}(q,\beta)=\frac{-2e^{2}}{(2\pi)^{3}\left(1-\frac{q_{0}^{2}}{q^{2}}\right)}\int\mathrm{d}^{3}p\left[\frac{2p_{0}^{2}+p_{0}q_{0}-p\cdot q}{q^{2}+2p\cdot q}+\right.$$

$$\left.\frac{2p_{0}^{2}-2p_{0}q_{0}+p\cdot q}{q^{2}-2p\cdot q}\right]\frac{n_{\mathrm{F}}(p_{0})}{|E|}\bigg|_{p_{0}=E}+(E\to-E,n_{\mathrm{F}}\to\bar{n}_{\mathrm{F}})\ , \tag{13}$$

$$\pi_{\mathrm{T}}(q,\beta)=\frac{-2e^{2}}{(2\pi)^{3}}\int\mathrm{d}^{3}p\left[\frac{p^{2}-p\cdot q}{q^{2}+2p\cdot q}+\frac{p^{2}+p\cdot q}{q^{2}-2p\cdot q}\right]\frac{n_{\mathrm{F}}(p_{0})}{|E|}\bigg|_{p_{0}=E}-$$

$$\frac{1}{2}\pi_{\mathrm{L}}(q,\beta)+(E\to -E,n_{\mathrm{F}}\to \bar{n}_{\mathrm{F}}),\tag{14}$$

$$\pi_{\mathrm{P}}(q,\beta)=0,\tag{15}$$

其中 $E=\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2+m^2}$.

3 介电常数和磁导率

由于真空极化受到背景介质温度和密度的影响，光子传播子的 FTD 效应必然又修正背景介质的电磁性质．考虑 FTD 修正的介电常数和磁导率分别为[2,3]

$$\varepsilon=1-\frac{\pi_{\mathrm{L}}}{q^2},\tag{16}$$

$$\frac{1}{\mu_M}=1+\frac{\pi_{\mathrm{T}}-\pi_{\mathrm{L}}\dfrac{(q\cdot u)^2}{q^2}}{(q\cdot u)^2-q^2}.\tag{17}$$

当温度和密度趋于零时，$\pi_{\mathrm{L}}=\pi_{\mathrm{T}}=0,\varepsilon=\dfrac{1}{\mu_M}$，回到真空值．将(13)、(14)式代入(16)、(17)式，在动量 $\boldsymbol{p}$ 空间取球极坐标系，并完成对立体角的积分(详见附录)得到

$$\varepsilon=1+\frac{4\alpha}{\pi|\boldsymbol{q}|^2}\cdot\left(f_0+\frac{q^2}{4}f_1+f_2+q_0f_3\right),\tag{18}$$

$$\frac{1}{\mu_M}=1+\frac{4\alpha}{\pi|\boldsymbol{q}|^4}\left[3q_0^2f_0+\left(\frac{1}{2}m^2|\boldsymbol{q}|^2+\frac{3}{4}q_0^2q^2\right)f_1+(q^2+2q_0^2)(f_2+q_0f_3)\right],\tag{19}$$

其中 $q^2=q_0^2-|\boldsymbol{q}|^2$，$f_i,i=0,1,2,3$ 是 q 与 β 的函数，在附录中给出．

4 讨论与小结

本文详细讨论了真空极化的有限温度和密度效应，以及由此引起的对热背景介质电磁性质的修正，克服了文献[4]中因计算的严重错误而引起的一系列困难，得到了与文献[4]不同的可靠的结果．

首先，文献[4]的(2.3)式丢掉了 FTD 费米子传播子中的阶跃函数，又在(A3)和(A4)式中将 $n_{\mathrm{F}}(p,\pm\mu)$ 改写成为 $n_{\mathrm{F}}(p_0,\pm\mu)$，除数学上的错误外，这使得函数 n_{F} 的物理意义含混不清．本文首先完成对圈动量的 p_0 分量积分，利用(3)式中阶跃函数的性质，将表达式分成两部分，其一含有 $n_{\mathrm{F}}(p_0=E,\mu)$，另一部分含有 $n_{\mathrm{F}}(p_0=-E,\mu)$(见(13)、(14)式)，

前者为费米子分布函数，后者为反费米子分布函数．物理意义十分明确．其次，文献[4]采用了近似$\sigma = p_0\left(1-\frac{m^2}{2p_0^2}+\cdots\right)$丢弃了高阶项，也是明显不合理的．事实上，对圈动量任何分量的积分限都应是$(-\infty, +\infty)$，在$(-m \leqslant p_0 \leqslant m)$范围，$\frac{m}{p_0} \geqslant 1$．为回避这一严重问题，文献[4]在(A5)式中，将对p_0的积分下限移到了m．由于计算错误，文献[4]的结果是不可靠的．我们采用了恰当的积分次序，得到了正确的物理结果．

本文严格计算了有限温度和密度效应对背景介质电磁性质的修正，给出了介电常数和磁导率严格的解析表达式．计算中没有作任何近似，所得结果适用于任何温度与密度．

感谢苏汝铿教授和高嵩博士在有限温度场论方面的讨论．

参　考　文　献

[1] Landsmanand N P, Van Weert Ch G. Phys. Rep., 1987, **145**(3):141—249
[2] Weldon H A. Phys. Rev., 1982, **D26**(6):1394—1407
[3] Nieves J F, Pal P B, Unger D G. Phys. Rev., 1983, **D28**(4):908—914
[4] Ahmed K, Masood S S. Ann. Phys., 1991, **207**(2):460—475
[5] Zhu Hongyuan. Quantum field theory (in Chinese). Beijing: Academic Press, 1960, 270—288;
(朱洪元．量子场论．北京：科学出版社，1960．270—288)；
Yin Pengcheng. Outline of Quantum Field Theory (in Chinese). Shanghai: Science and Technology press, 1986, 359—363
(殷鹏程．量子场论纲要．上海：上海科学技术出版社，1986．353—363)
[6] Matsumoto H, Ojima I, Umezawa H. Ann. Phys., 1984, **152**(2):348—375;
Weldon H A. Phys. Rev., 1991, **D44**(12):3955—3963

附录

$\pi_{\mathrm{L,T,P}}$计算的主要过程

$\pi_{\mu\nu}(q,\beta)$的张量结构由$T_{\mu\nu}$决定，为求出待定函数$\pi_{\mathrm{L,T,P}}$，将$\pi_{\mu\nu}(q,\beta)$与$Q^{\mu\nu}$，$R^{\mu\nu}$和$P^{\mu\nu}$收缩，由(6)式和(10)式，并利用(7)、(8)式得

$$Q^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = \frac{4}{\tilde{u}^2}\left[2(p\cdot u)^2 + 2p\cdot uq\cdot u - u^2(p^2 - m^2 + p\cdot q)\right] \tag{A1}$$

其中$\tilde{u}^2 = u^2 - \frac{(q\cdot u)^2}{q^2}$

$$R^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 8\left[p^2 - p\cdot q - 2(p^2 - m^2)\right] - Q^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \tag{A2}$$

$$P^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0 \tag{A3}$$

由(12)式中第3式和(A3)式可知

$$\pi_{\mathrm{P}}(q,\beta) = 0 \tag{A4}$$

要求出$\pi_{\mathrm{L,T}}(q,\beta)$，需将(A1)，(A2)和(5)式代入(12)式，并完成对四动量的积分．取介质静止的坐标系$u_\mu = (1,\mathbf{0})$．由于分布函数分母中存在指数函数部分，(5)式的积分是有限的．因此可以对第二项作积分变量的变换$p \to p - k$，利用δ函数的性质和背景粒子的质壳条件，先完成对p_0的积分，即可得(13)和

(14)式. 为继续进行积分,在三动量 $\boldsymbol{p}$ 空间取球坐标系,对立体角的积分可以解析地求出,结果是

$$\pi_{\mathrm{L}}(q,\beta)=\frac{4\alpha}{\pi\left(1-\frac{q_0^2}{q^2}\right)}\left(f_0+\frac{q^2}{4}f_1+f_2+q_0f_3\right) \tag{A5}$$

$$\pi_{\mathrm{T}}(q,\beta)=\frac{4\alpha}{\pi}\left(f_0+\frac{2m^2+q^2}{4}f_1\right)-\frac{1}{2}\pi_{\mathrm{L}}(q,\beta) \tag{A6}$$

其中

$$f_0\equiv\int \mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\frac{|\boldsymbol{p}|^2}{E}\ (n_{\mathrm{F}}+\bar{n}_{\mathrm{F}}) \tag{A7}$$

$$f_1\equiv\int \mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\frac{|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{q}|E}\ (A+B)(n_{\mathrm{F}}+\bar{n}_{\mathrm{F}}) \tag{A8}$$

$$f_2\equiv\int \mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\frac{|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{q}|}E\ (A+B)(n_{\mathrm{F}}+\bar{n}_{\mathrm{F}}) \tag{A9}$$

$$f_3\equiv\int \mathrm{d}|\boldsymbol{p}|\frac{|\boldsymbol{p}|}{2|\boldsymbol{q}|}E\ (A-B)(n_{\mathrm{F}}+\bar{n}_{\mathrm{F}}) \tag{A10}$$

$$A\equiv\ln\frac{q^2+2Eq_0-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}{q^2+2Eq_0+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \tag{A11}$$

$$B\equiv\ln\frac{q^2-2Eq_0-2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|}{q^2-2Eq_0+2|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|} \tag{A12}$$

将这些结果代入(16)、(17)式,即可得到介电常数 ε 和磁导率 μ 的表达式.

Vacuum Polarization in Finite Temperature and the Electromagnetic Properties of Background Medium *

Ma Fengcai　　Liu Yanxia　　Xiao Hongfei

(*Department of Physics, Liaoning University, Shengyang* 110036)

Abstract The finite tempertrue and density effect of vacuum polarization as well as the electromagnetic proptrty of thermal background medium are investigated. The vacuum polarization tensor, the electrical permittivity and magnetic permeability are calculated strictly, and the strictly anlytical expression is presented which is applicable to all temperature and various density.

Key words finite temperature field theory, vacuum polarization, electric permittivity, magnetic permeability

Received 1 September 1997, Revised 11 November 1997

* Supported in Part by the Liaoning Province Natural Science Foundation