第 21 卷 第 8 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol.21,No.8
1997年 8 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Aug.,1997

编织假设与杨–Baxter方程的解 *

张　　军
(新疆大学数理研究所 乌鲁木齐 830046)

郭汉英　阎　宏
(中国科学院理论物理研究所 北京 100080)

1996–05–06收稿

摘　　要

提出一个由低维辫子群表示构造高维杨–Baxter方程解的假设．考虑两个同为六顶角，但具有不同的畸变参数的辫子群表示，给出一个非平庸的高维 R 矩阵的例子支持这一假设．这一高维 R 矩阵实际上是一个新的杨–Baxter方程解．

关键词　辫子群表示，杨–Baxter方程，参数化，编织假设．

1　引　　言

辫子群与编织的天然联系启发我们提出一种由低维辫子群表示构造高维杨–Baxter方程[1—3]解的假设，称之为编织假设:

如果 $S=S_1\otimes S_2$ 中 S_1 和 S_2 均是辫子群的表示，那么 S 通过指定的参数化方案将给出杨–Baxter 方程的解．

这一解的构造方案之所以是一个假设，是因为所指定的参数化方案是一个假设．大家知道，辫子群的表示可以通过适当的参数化给出杨–Baxter方程的解．参数化的方法有很多种(如文献 [4,5])．本文采用在文献 [6] 中给出的修改方案．

一般来说，S 的参数化总会给出杨–Baxter方程的解，但是除少数情况外，这些解往往是 S_1 和 S_2 的分别参数化所给出的杨–Baxter方程解的直积，也就是说它们是平庸的．本文给出一个例子表明这一假设是可以给出非平庸的解．

实际上，这一高维 R 矩阵实际上是一个新的杨–Baxter方程解．

2　修改的参数化方案

首先回顾一般的参数化假设，然后讨论在文献 [6] 中给出修改的参数化方案．考虑

---

* 国家自然科学基金攀登项目，博士后科学基金及中国科学院归国留学人员择优支持费资助.

714—719

杨–Baxter方程

$$\hat{R}_{12}(x)\hat{R}_{23}(xy)\hat{R}_{12}(y) = \hat{R}_{23}(y)\hat{R}_{12}(xy)\hat{R}_{23}(x) \ , \tag{1}$$

其中 $\hat{R}_{12}(x) = \hat{R}(x)\otimes 1$且 $\hat{R}_{23}(x) = 1\otimes\hat{R}(x)$. 令 S为一辫子群表示，它具有 m个互异的本征根$\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, m)$并且满足特征方程

$$\prod\nolimits_{i=1}^{m}(S-\lambda_i) = 0, \tag{2}$$

则辫子群表示 S可以用投影算子

$$P_i = \prod_{j\neq i}\frac{(S-\lambda_j)}{(\lambda_i-\lambda_j)} \tag{3}$$

表示为

$$S = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i P_i \ . \tag{4}$$

三角参数化给出的杨–Baxter方程解与 S有相同的谱分解形式，即

$$\hat{R}(x) = \sum_{i=1}^{m}\Lambda_i(x)\ P_i, \tag{5}$$

其中$\Lambda_i(x)$为 m 个待定的函数，使得 $\hat{R}$满足以下的标准初始化条件，

$$\hat{R}(1)\propto 1 \ . \tag{6}$$

一般地

$$\Lambda_i(x) = \prod_{j=1}^{i-1}\left(1 + x\frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_{j+1}}\right)\prod_{j=i}^{m-1}\left(x+\frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_{j+1}}\right) \ , \tag{7}$$

注意$\tilde{\lambda}_i(i = 1, 2, \cdots, m)$取集合 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m\}$中元素的任意排列(由于这一选择上的待定性，这一参数化方案实际上是一个假设).

容易看出当 $x = 1$ 时有

$$\Lambda_i(1) = \Lambda_2(1) = \cdots = \Lambda_m(1) = \prod_{j=1}^{m-1}\left(x+\frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_{j+1}}\right) \ , \tag{8}$$

故

$$\hat{R}(1) = \Lambda_1(1)\cdot 1 \ 。 \tag{9}$$

在文献 [6] 中曾指出，如果在保持初始化条件的情况下，公式(7)可以推广为

$$\Lambda_i(x) = \prod_{j=1}^{i-1}\left(1 + x^{m_j}\frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_{j+1}}\right)\prod_{j=i}^{m-1}\left(x^{m_j}+\frac{\tilde{\lambda}_j}{\tilde{\lambda}_{j+1}}\right) \ , \ m_j\in Z, \tag{10}$$

附带指出，文献 [6] 中讨论了三个本征值时的一个特殊情况，而后面明显地给出一个有四个本征值的例子. 为讨论方便，列出以下用到的公式

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(x) &= (\lambda_1/\lambda_2 + x)(\lambda_2/\lambda_3 + x^2)(\lambda_3/\lambda_4 + x) \ , \\
\Lambda_2(x) &= (\lambda_1 x/\lambda_2 + 1)(\lambda_2/\lambda_3 + x^2)(\lambda_3/\lambda_4 + x) \ , \\
\Lambda_3(x) &= (\lambda_1 x/\lambda_2 + 1)(\lambda_2 x^2/\lambda_3 + 1)(\lambda_3/\lambda_4 + x) \ ,
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\Lambda_4(x) = (\lambda_1 x / \lambda_2 + 1)\,(\lambda_2 x^2 / \lambda_3 + 1)\,(\lambda_3 x / \lambda_4 + 1)\,,$$
$$\hat{R}(x) = \Lambda_1(x)p_1 + \Lambda_2(x)p_2 + \Lambda_3(x)p_3 + \Lambda_4(x)p_4\ .$$

3 编织假设

记 S_1和 S_2的参数化给出的杨–Baxter 方程解分别为 $\hat{R}_1$和 $\hat{R}_2$. 那么 S的参数化必定会给出至少一个解，也即$\hat{R} = \hat{R}_1 \otimes \hat{R}_2$. 这一点是显然的，这样的 $\hat{R}$称为平庸的. 后面给出一个非平庸的例子.

3.1 S_1和 S_2的表达式

令 S_1和 S_2为标准六顶角的辫子群表示，具有不同的 q 参数，

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_1 & 0 \\ 0 & q_1 & 1-q_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & 0 \\ 0 & q_2 & 1-q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

它们的本征根分别为 1，$-q_1^2$和 1，$-q_2^2$. 其张量积是

$$S = \begin{bmatrix}
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_{12} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & q_2 & \cdot & \cdot & q_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_{12} & \cdot & \cdot & q_{13} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_{24} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_2 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & q_{12} & \cdot & \cdot & q_{13} & \cdot & \cdot & q_{24} & \cdot & \cdot & q_{34} & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_4 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_2 & \cdot & \cdot & q_3 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1
\end{bmatrix}, \qquad (12)$$

其中 $q_3 = 1 - q_2^2$，$q_4 = 1 - q_1^2$，$q_{12} = q_1 q_2$，$q_{13} = q_1 q_3$，$q_{24} = q_2 q_4$及 $q_{34} = q_3 q_4$. 显然 S的本征根集合

$$\{1,\ -q_1^2,\ -q_2^2,\ q_1^2 q_2^2\}$$

是 S_1和 S_2的本征根集合的幂集.

3.2 $\hat{R}_1$和 $\hat{R}_2$

S_1和 S_2在参数化后给出解 $\hat{R}_1(x)$ 及 $\hat{R}_2(x)$:

$$\hat{R}_1(x) = \begin{bmatrix} xq_1^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x(q_1^2 - 1) & q_1(x-1) & 0 \\ 0 & q_1(x-1) & q_1^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_1^2 x - 1 \end{bmatrix};$$

$$\hat{R}_2(x) = \begin{bmatrix} x^2q_2^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^2(q_2^2 - 1) & q_2(x^2-1) & 0 \\ 0 & q_2(x^2-1) & q_2^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_2^2 x^2 - 1 \end{bmatrix},$$

它们分别具有本征根 $q_1^2 - x$, $xq_1^2 - 1$ 及 $q_2^2 - x$, $xq_1^2 - 1$. 事实上，R_2可以与 R_1取完全相同的形式，即 x的幂次可取为 1. 这样取仅仅是为了以后讨论方便.

$\hat{R}_1(x)$和 $\hat{R}_2(x)$的张量积记为 $\hat{R}_\otimes(x)$, 它是对称的，非零元素为

$$\hat{R}_\otimes(1,1) = \hat{R}_\otimes(6,6) = \hat{R}_\otimes(11,11) = \hat{R}_\otimes(16,16) = (x^2q_2^2 - 1)\,(xq_1^2 - 1)\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(2,2) = \hat{R}_\otimes(12,12) = (xq_1^2 - 1)\,(q_2^2 - 1)x^2\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(2,5) = \hat{R}_\otimes(12,15) = (xq_1^2 - 1)\,(x^2 - 1)q_2\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(3,3) = \hat{R}_\otimes(8,8) = (x^2q_2^2 - 1)\,(q_1^2 - 1)x,$$
$$\hat{R}_\otimes(3,9) = \hat{R}_\otimes(8,14) = (x^2q_2^2 - 1)\,(x - 1)q_1\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(4,4) = (q_2^2 - 1)\,(q_1^2 - 1)x^3,\ \hat{R}_\otimes(4,7) = (x^2 - 1)(q_1^2 - 1)xq_2,$$
$$\hat{R}_\otimes(4,10) = (x - 1)\,(q_2^2 - 1)x^2q_1,\ \hat{R}_\otimes(13,13) = (q_2^2 - 1)(q_1^2 - 1),$$
$$\hat{R}_\otimes(4,13) = \hat{R}_\otimes(7,10) = (x + 1)\,(x - 1)^2\, q_2q_1\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(5,5) = \hat{R}_\otimes(15,15) = (xq_1^2 - 1)\,(q_2^2 - 1)\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(7,7) = (q_2^2 - 1)\,(q_1^2 - 1)x,\quad \hat{R}_\otimes(7,13) = (x - 1)\,(q_2^2 - 1)q_1\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(9,9) = \hat{R}_\otimes(14,14) = (x^2q_2^2 - 1)\,(q_1^2 - 1)\ ,$$
$$\hat{R}_\otimes(10,10) = (q_2^2 - 1)\,(q_1^2 - 1)x^2,\quad \hat{R}_\otimes(10,13) = (x^2 - 1)\,(q_1^2 - 1)q_2\ ,$$

其本征根的集合

$$\{(xq_1^2 - 1)\,(x^2q_2^2 - 1),\ -(x^2q_2^2 - 1)\,(x - q_1^2),\ (x - q_1^2)\,(x^2 - q_2^2),\ -(xq_1^2 - 1)\,(x^2 - q_2^2)\}$$

显然是 R_1和 R_2的本征根集合的幂集. 这一过程可用图 1 描述.

$$\boxed{S_1,\ S_2} \xrightarrow{\text{分别参数化}} \boxed{\hat{R}_1(x),\ \hat{R}_2(x)} \xrightarrow{\text{取张量积}} \boxed{\hat{R}_\otimes(x)}$$

图 1　分别参数化后取张量积的路径

3.3 编织所得新解

编织要求 S的参数化，而根据(11)式，S的参数化有 24 种可能的解. 如果记以下的

本征根 1，$-q_1^2$，$-q_2^2$，$q_1^2q_2^2$的排序为 1234，那么我们得到了 8 种解，分别具有以下的排序：1243，1423，2134，2314，3241，3421，4132 和 4312．而其中只有两个是独立的解．如我们所料，其中一个是 $\hat{R}_\otimes$．但是，另一个(记为 $\hat{R}(x)$) 则是新解．这一过程可用图 2 描述．

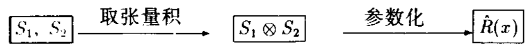

图 2　取张量积后参数化的路径

$\hat{R}(x)$ 是对称的，其非零元素为

$$
\begin{aligned}
&\hat{R}(1,1) = \hat{R}(6,6) = \hat{R}(11,11) = \hat{R}(16,16) = (xq_2^2-1)(x^2q_1^2-1)\;,\\
&\hat{R}(2,2) = \hat{R}(12,12) = (x^2q_1^2-1)(q_2^2-1)x\;,\\
&\hat{R}(2,5) = \hat{R}(12,15) = (x^2q_1^2-1)(x-1)q_2\;,\\
&\hat{R}(3,3) = \hat{R}(8,8) = (xq_2^2-1)(q_1^2-1)x^2,\\
&\hat{R}(3,9) = \hat{R}(8,14) = (xq_2^2-1)(x^2-1)q_1\;,\\
&\hat{R}(4,4) = (q_2^2-1)(q_1^2-1)x^3,\ \hat{R}(4,7) = (x-1)(q_1^2-1)x^2q_2,\\
&\hat{R}(4,10) = (x^2-1)(q_2^2-1)xq_1,\ \hat{R}(13,13) = (q_2^2-1)(q_1^2-1),\\
&\hat{R}(4,13) = \hat{R}(7,10) = (x+1)(x-1)^2\, q_2q_1\;,\\
&\hat{R}(5,5) = \hat{R}(15,15) = (x^2q_1^2-1)(q_2^2-1)\;,\\
&\hat{R}(7,7) = (q_2^2-1)(q_1^2-1)x^2,\quad \hat{R}(7,13) = (x^2-1)(q_2^2-1)q_1\;,\\
&\hat{R}(9,9) = \hat{R}(14,14) = (xq_2^2-1)(q_1^2-1)\;,\\
&\hat{R}(10,10) = (q_2^2-1)(q_1^2-1)x,\quad \hat{R}(10,13) = (x-1)(q_1^2-1)q_2\;,
\end{aligned}
$$

本征根共有四个，分别是 $(xq_1^2-1)(xq_2^2-1)(x^2-q_2^2)$；$-(xq_1^2-1)(x-q_2^2)(x^2-q_2^2)$；$(x-q_1^2)(x-q_2^2)(x^2-q_2^2)$及 $-(xq_2^2-1)(x-q_1^2)(x-q_2^2)$．

4　讨　　论

我们强调指出，取张量积和参数化这两个操作是不可对易的，这一点可从图 3 看出．

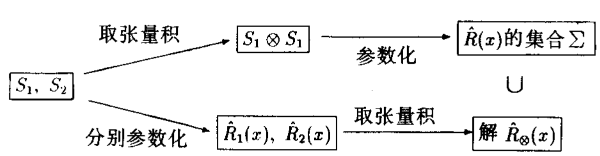

图 3　两条路径不可交换

先作张量积再作参数化所得到的解的集合Σ包含先参数化再作张量积所得到的解．后者只是表明，R矩阵的张量积仍为杨–Baxter 方程的解．由于Σ必包含后者，因此Σ必不空．

实际上，$\hat{R}_{\otimes}(x)$与$\hat{R}_1(x)\otimes\hat{R}_2(x)$等价，而$\hat{R}(x)$与$\hat{R}_1(x)\otimes\hat{R}_2(x)$不同这一点可以方便地从比较解的本征根看出．$\hat{R}_{\otimes}(x)$的本征根集合是$\hat{R}_1(x)$和$\hat{R}_2(x)$的本征根集合的幂集，而$\hat{R}(x)$的本征根集合与$\hat{R}_1(x)$和$\hat{R}_2(x)$的本征根集合的幂集没有关系．

分析本征根的关系可以很方便地辨认编织假设所给出的解是否是非平庸的解．一般来说，如果编织假设所给出的解的数目在一个以上，那么其中必有非平庸的解．

同样，通过本征根的分析可以知道，上面所给出 16×16 的 R矩阵不在已知的 16×16 的 R矩阵中．

最后，在本文给出的例子中，S_1与S_2具有相同维数．实际上编织假设并不要求这一点．

参　考　文　献

[1] 马中骐，杨-巴克斯特方程和量子包络代数，科学出版社，1993.

[2] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967)1312.

[3] R. J. Baxter, *Ann. Phys.*, **70** (1992)193.

[4] M. L. Ge, K. Xue, Preprint, ITP-SB-90-20, 1990.

[5] 王鲁豫，博士论文，兰州大学，1990.

[6] Y. Q. Li, J. Zhang, *Commun. Theor. Phys.*, **21** (1994)435.

Knitting Ansatz and Solutions to Yang-Baxter Equation

Zhang Jun

(*Institute of Mathematics and Physics, Xinjiang University, Wulumuqi* 830046)

Guo Hanying　Yan Hong

(*Institute of Theoretical Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080)

Received 6 May 1996

Abstract

We suggest a new method, named knitting ansatz, to generate solutions to Yang-Baxter equation with lower dimensional representations of braid group. To support our ansatz, we work out an example of a new 16×16 R-matrix constructed along this idea, with two 4×4 braid group representations of familiar 6-vertex type with different q-parameters.

Key words braid group representation, Yang-Baxter equation, Yang - Baxterization, knitting ansatz.