

直线加速器中双向高斯密度分布电荷束团 发射度增长的比率关系*

陈银宝 黄志斌 傅世年

(中国原子能科学研究院 北京 102413)

1996-07-05

摘 要

采用直线加速器中的空间电荷束团的有限圆柱模型,并假设该有限圆柱体电荷密度分布在横向 r 和纵向 z 都满足高斯分布,推导得到了该电荷束团的自场能与发射度增长公式;通过数值模拟计算,给出了束流发射度增长随束团参数和加速器系统参数变化的图表曲线,讨论了该双向高斯密度分布电荷束团发射度增长的比率关系.

关键词 双向高斯密度分布电荷束团,束流发射度,比率关系.

1 引 言

近些年来,高功率强流粒子束被建议用于各种领域,包括能源、医学、环境、生命、材料、农学、地学和考古等.强流束的空间电荷效应是决定束流动力学的基本因素之一.理论和实验研究都已发现,束流发射度的明显增长与束团中空间电荷密度分布的均匀化程度有密切关系^[1,2].根据统计力学,任何一个统计无关的随机过程,最终都将导致粒子的位置偏移服从高斯分布,因此,高斯分布是粒子密度分布的一种重要而普遍的形态^[3].但是,以往对高斯密度分布的研究,只限于连续束流的横截面上,并未涉及电荷束团的横向和纵向都为高斯密度分布的情况.本文将对直线加速器中的空间电荷束团,采用有限圆柱模型,利用文献[4]所给的波导中非均匀密度分布空间电荷效应的普遍计算公式,推导得出双向高斯密度分布电荷束团的空间电荷场及其自场能公式;利用文献[2]所得的发射度增长公式,并通过数值模拟计算,给出双向高斯密度分布电荷束团发射度增长随束团参数和加速器系统参数变化的图表曲线,并讨论直线加速器中双向高斯密度分布电荷束团发射度增长的比率关系.

* 国家自然科学基金和核工业科学基金资助.

2 双向高斯密度分布电荷束团的空间电荷场及自场能

采用直线加速器中的空间电荷束团的有限圆柱模型. 令有限圆柱中心与坐标原点重合, 加速器的波导半径为 a , 有限圆柱半径为 b , 长度为 L . 并设该有限圆柱总电量为 q , 体电荷密度分布在横向 r 和纵向 z 都满足高斯分布:

$$\rho_{\text{ga, ga}}(r, z) = \rho_{\text{gg}} e^{-r^2/2a^2} e^{-z^2/2\beta^2}, \quad (1)$$

式中 $a^2 = \langle r^2 \rangle$; $\beta^2 = \langle z^2 \rangle$ 分别表示高斯分布的横向和纵向截断距离; $\rho_{\text{gg}} = q / 2\pi a^2 L D$, D 为积分,

$$D = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t^2} dt, \quad (2a)$$

可表示成高斯-切比雪夫公式:

$$D \doteq \frac{1}{2} \sum_{k_1=0}^{N_1} A_{k_1} \sqrt{1-t_{k_1}^2} e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t_{k_1}^2}, \quad (2b)$$

式中的

$$A_{k_1} = \frac{\pi}{N_1 + 1}, \quad t_{k_1} = \cos \frac{2k_1 + 1}{2N_1 + 2} \pi, \quad (3)$$

N_1 的确定: 将函数 $f(t) = e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t^2} \sqrt{1-t^2}$ 展开成截断误差小于任意给定的小正数 ε 的切比雪夫级数, 其次数不超过 $(2N_1 + 1)$ 时,

高斯-切比雪夫公式能准确成立^[5].

该双向高斯密度分布的形态如图 1 所示. 图中的密度是以均匀分布(横向和纵向均为 K-V 分布)为单位, 坐标 r 和 z 分别以有限圆柱半径 b 和长度 L 为单位.

利用文献[4]所得到的波导中非均匀密度分布的有限圆柱空间电荷效应的普遍计算公式, 可以推导得到公式(1)所示的双向高斯密度分布电荷束团所产生的电位为:

$$\left. \begin{aligned} \phi_{1,2}(r, z) &= \frac{q}{\pi \varepsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k_l^2 z^2}{2}} J_0(k_l r)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} e^{-k_l |z|} P_{\text{ga}}, \quad (|z| > \frac{L}{2}) \\ \phi_3(r, z) &= \frac{q}{\pi \varepsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k_l^2 r^2}{2}} J_0(k_l r)}{(k_l a)^2 J_1^2(k_l a)} Q_{\text{ga}}, \quad (|z| < \frac{L}{2}) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

式中 ε_0 为介电常数; $J_l(k_r x)$ 为贝塞尔函数, k_l 满足方程 $J_0(k_l a) = 0$; P_{ga} 和 Q_{ga} 分别为:

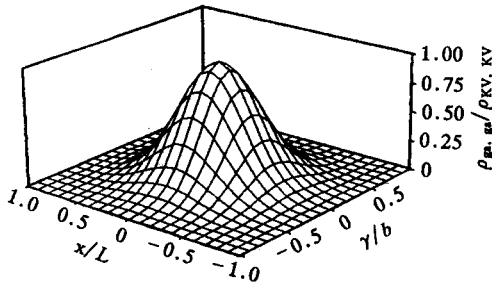


图1 电荷束团的双向高斯密度分布
 $a/b=0.3, \beta/L=0.3$.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{ga}} &\approx \frac{C}{2D} \sum_{k_2=0}^{N_2} A_{k_2} \sqrt{1-t_{k_2}^2} e^{-\frac{L^2}{32\beta^2}(1+t_{k_2})^2} \text{ch} \frac{C(1+t_{k_2})}{2}, \\
 Q_{\text{ga}} &\approx \frac{C-k|z|}{2D} \text{ch} k|z| \sum_{k_3=0}^{N_3} A_{k_3} \sqrt{1-t_{k_3}^2} e^{-\frac{[(C-k|z|)t_{k_3}+(C+k|z|)]^2}{8k^2\beta^2}} - \frac{1}{2}[(C-k|z|)t_{k_3}+(C+k|z|)] \\
 &\quad + \frac{k|z|}{2D} e^{-k|z|} \sum_{k_4=0}^{N_4} A_{k_4} \sqrt{1-t_{k_4}^2} e^{-\frac{z^2}{8\beta^2}(1+t_{k_4})^2} \text{ch} \frac{k|z|}{2}(1+t_{k_4}),
 \end{aligned} \tag{5}$$

其中

$$\begin{aligned}
 t_{k_2} &= \cos \frac{2k_2+1}{2N_2+2}, & A_{k_2} &= \frac{\pi}{N_2+1}, \\
 t_{k_3} &= \cos \frac{2k_3+1}{2N_3+2}, & A_{k_3} &= \frac{\pi}{N_3+1}, \\
 t_{k_4} &= \cos \frac{2k_4+1}{2N_4+2}, & A_{k_4} &= \frac{\pi}{N_4+1}, \\
 C &= \frac{kL}{2},
 \end{aligned} \tag{6}$$

N_2 、 N_3 、 N_4 的确定方法, 类同于 N_1 .

根据线性介质中, 静电场的总能量公式: $W = \frac{1}{2} \int \rho\phi \, d\tau$, 其中积分遍及电荷分布的体积, 利用公式(1)和(4), 就可以得到双向高斯密度分布的有限圆柱空间电荷所具有的静电场总能量, 即自场能为:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{ga,ga}} &= \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{e^{-k_l^2 \alpha^2}}{(k_l \rho)^2 J_1^2(k_l \rho)} A_{\text{ga}l} \\
 \text{式中 } A_{\text{ga}} &= \frac{C}{4D^2} \sum_{k_5=0}^{N_5} A_{k_5} \sqrt{1-t_{k_5}^2} (1-|t_{k_5}|) e^{-\frac{L^2}{8\beta^2}t_{k_5}^2} \text{ch} C t_{k_5} \sum_{k_6=0}^{N_6} A_{k_6} \sqrt{1-v_{k_6}^2} \\
 &\quad \times e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} \left[\frac{1-|t_{k_5}|}{2} v_{k_6} + \frac{1+|t_{k_5}|}{2} \right]^2} - C \left[\frac{1-|t_{k_5}|}{2} v_{k_6} + \frac{1+|t_{k_5}|}{2} \right] + \frac{C}{4D^2} \sum_{k_6=0}^{N_6} A_{k_6} |t_{k_6}| \\
 &\quad \times \sqrt{1-t_{k_6}^2} e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} t_{k_6}^2 - C|t_{k_6}|} \sum_{k_4=0}^{N_4} A_{k_4} \sqrt{1-v_{k_4}^2} \text{ch} C \left[\frac{|t_{k_6}|}{2} v_{k_4} + \frac{|t_{k_6}|}{2} \right] \\
 &\quad \times e^{-\frac{L^2}{8\beta^2} \left[\frac{|t_{k_6}|}{2} v_{k_4} + \frac{|t_{k_6}|}{2} \right]^2}
 \end{aligned} \tag{7}$$

和

$$\begin{aligned}
 t_{k_5} &= \cos \frac{2k_5+1}{2N_5+2}, & A_{k_5} &= \frac{\pi}{N_5+1}, \\
 t_{k_6} &= \cos \frac{2k_6+1}{2N_6+2}, & A_{k_6} &= \frac{\pi}{N_6+1},
 \end{aligned} \tag{9}$$

N_5 和 N_6 的确定方法类似于 N_1 .

3 双向高斯密度分布电荷束团的自由能及其相对度量

理论研究和数值模拟计算都表明^[6], 在非均匀密度分布的束中, 每单位长度上的静电能要比具有同样流强、同样均方根半径和同样均方根发射度的均匀束大. 因此, 在粒子趋向均匀分布的过程中, 就伴随有场能向动能的转换, 引起束流发射度的增长. 这种由非均匀分布和等价的均匀分布所引起的束流自场能差, 称为束流的自由能^[2]. 文献[6]和文献[2]针对几种常见的非均匀分布, 给出了相应的自由能数值. 但是, 必须指出的是, 它们只适合于连续束的情况. 在文献[7]和[8]中, 我们给出了直线加速器中电荷束团的几种常见的横向非均匀分布和纵向均匀分布的组合情况, 以及横向非均匀分布和纵向非均匀分布的组合情况下的束团的自由能, 并讨论了由此引起的发射度增长, 但仍未涉及电荷束团双向高斯密度分布的情况.

根据文献[7], 直线加速器中均匀密度分布的有限圆柱电荷束团所具有的自场能为^[7]:

$$W_0 = \frac{2q^2 \alpha^2}{\pi \epsilon_0 L b^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_i b)}{(k_i \rho)^4 J_1^2(k_i \rho)} A_{k_i}, \quad (10)$$

式中

$$A_{k_i} = 1 - \frac{2}{k_i L} e^{-\frac{k_i L}{2}} \operatorname{sh} \frac{k_i L}{2}. \quad (11)$$

于是, 双向高斯密度分布电荷束团的自由能可以表示为:

$$U_{\text{ga,ga}} = W_{\text{ga,ga}} - W_0. \quad (12)$$

引入无量纲量

$$Z_{\text{ga,ga}} = U_{\text{ga,ga}} / W_0, \quad (13)$$

$Z_{\text{ga,ga}}$ 表示了双向高斯密度分布电荷束团中自由能的相对度量. 以公式(7)和(10)代入(13), 得到:

$$Z_{\text{ga,ga}} = \frac{1}{4} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-k_i^2 a^2}}{(k_i \rho)^2 J_1^2(k_i \rho)} A_{\text{ga}} / \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(k_i b)}{(k_i \rho)^4 J_1^2(k_i \rho)} A_{k_i} - 1. \quad (14)$$

4 双向高斯密度分布电荷束团发射度增长的比率关系

设 ϵ_i 和 ϵ_f 分别为束流发射度的初值和终值, 根据文献[2], 可以得到双向高斯密度分布电荷束团的发射度增长表达式

$$\frac{\epsilon_f}{\epsilon_i} = \left[1 + \frac{Z_{\text{ga,ga}}}{2} \left(\frac{k_0^2}{k_i^2} - 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (15)$$

式中 k_0 为作用于束流上的外场聚焦常数, 它与传输管道中的外加聚焦磁场有关; k_1 为减去束流初始空间电荷自场后的净聚焦常数. k_0 和 k_1 的具体表式详见文献 [2]. 显然, 净聚焦常数 k_1 越小, 就表示束流的空间电荷场越强, 由此而引起的束流发射度增长也越大. 对于 $\alpha/b = 0.3$, $\beta/L = 0.3$ 的双向高斯密度分布电荷束团, 其发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随 k_1/k_0 的变化曲线如图 2 所示.

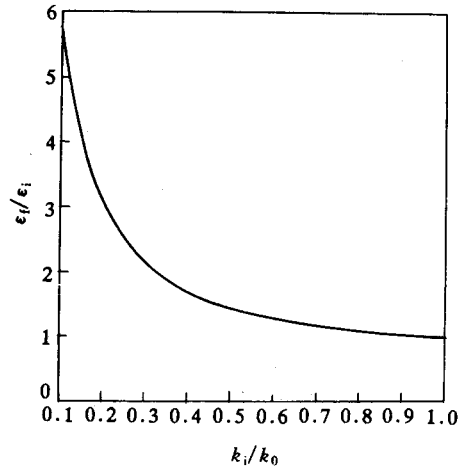


图2 双向高斯密度分布电荷束团发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随 k_1/k_0 变化曲线

由图 2 可见, 当 $k_1/k_0 = 1$ 时, $\epsilon_f/\epsilon_i = 1$, 即当不考虑空间电荷场时, 发射度的增长为零; 随着 k_1/k_0 的减小, 束流的空间电荷自场越来越强, 束流发射度迅速增长. 这正是我们所预期的情况.

进一步, 我们来考察束流发射度增长随束团参数和加速器传输管道孔径变化的情况. 作为例子, 取 $k_1/k_0 = 0.3$, 且设束团的长度 L 和半径 b 为常数, 利用公式 (15), 对于几组不同的 α/b 与 β/L 组合情况, 计算了发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随束团半径和长度与管道半径之比 b/a 和 L/a 变化的关系, 如图 3 至图 6 所示.

从图 3 和图 4 可以看出, 在对称的情况下, 即 $\alpha/b = \beta/L$ 时, 双向高斯密度分布电

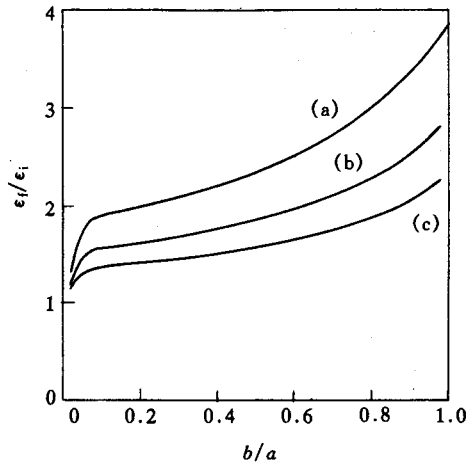


图 3 对称的高斯型束团的发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随 b/a 的变化
 (a) $\alpha/b = 0.3, \beta/L = 0.3$;
 (b) $\alpha/b = 0.4, \beta/L = 0.4$;
 (c) $\alpha/b = 0.5, \beta/L = 0.5$.

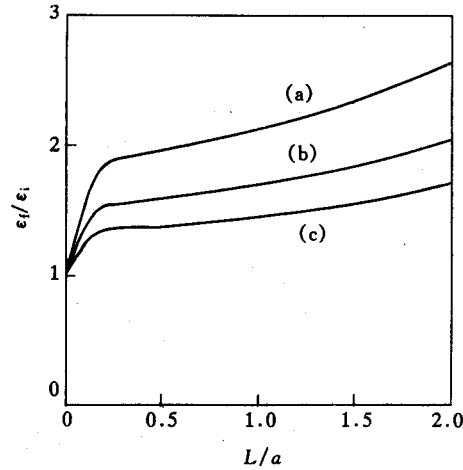


图 4 对称的高斯型束团的发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随 L/a 的变化
 (a) $\alpha/b = 0.3, \beta/L = 0.3$;
 (b) $\alpha/b = 0.4, \beta/L = 0.4$;
 (c) $\alpha/b = 0.5, \beta/L = 0.5$.

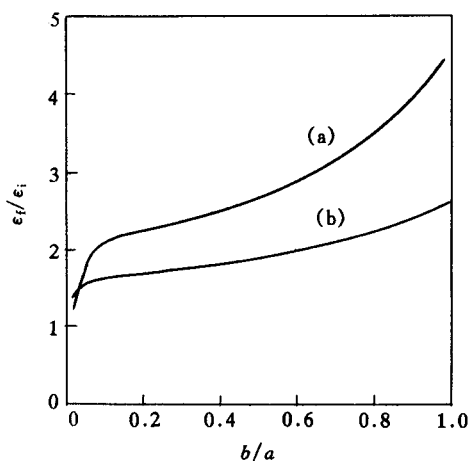


图 5 非对称的高斯型束团的发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随 b/a 的变化。
 $\alpha/b = 0.2, \beta/L = 0.6;$
 $\alpha/b = 0.6, \beta/L = 0.2.$

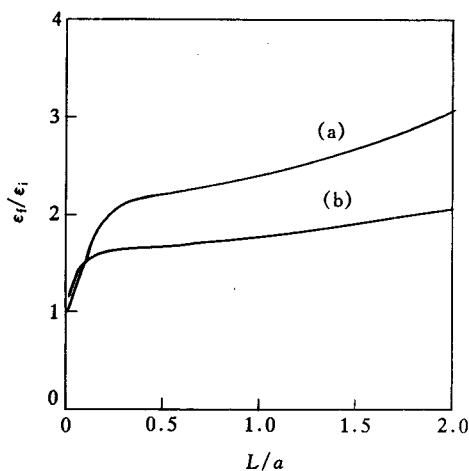


图 6 非对称的高斯型束团的发射度增长 ϵ_f/ϵ_i 随 L/a 的变化。
 $\alpha/b = 0.2, \beta/L = 0.6;$
 $\alpha/b = 0.6, \beta/L = 0.2.$

荷束团的 α/b 、 β/L 越小，则 ϵ_f/ϵ_i 越大，说明高斯分布越尖锐的电荷束团，其发射度增长就越大；并且，对于同一种分布来说， ϵ_f/ϵ_i 随 b/a 的变化比随 L/a 的变化大，说明在同一种分布下，束团的横向尺寸比纵向尺寸对发射度增长的影响大。从图 5 和图 6 可见，在非对称的情况下，即 $\alpha/b \approx \beta/L$ 时，横向呈尖锐高斯分布 ($\alpha/b = 0.2$) 的束团比纵向呈尖锐高斯分布 ($\beta/L = 0.2$) 的束团，对发射度增长的影响大。综观图 3 至图 6，当 b/a 或 L/a 很小时， ϵ_f/ϵ_i 下降很快。由此可见，加速器的传输管道器壁对发射度增长有很大影响，若把电荷束团置于自由空间 (即设加速器的管道半径 $a \rightarrow \infty$) 来考虑，则会得到过于保守的发射度增长的估计。

参 考 文 献

- [1] Lawson, J. D., *The Physics of Charged-Particle Beams*, Second Edition. Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [2] Reiser M., *J. Appl. Phys.*, **70**(1991)1919.
- [3] Reiser, M., *Theory and Design of Charged Particle Beams*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994.
- [4] 陈银宝、谢 羲, *原子核物理*, **1**(1979)107.
- [5] 李庆扬、王超能、易大义, *数值分析*, 第三版, 华中工学院出版社, 武汉, 1987, p. 148—151.
- [6] Lapostolle, P., *IEEE Trans. on Nucl. Sci.*, **NS18**(1971)1101.
- [7] Chen Yinbao, Zhang Zehai, *Chin. J. Nucl. Phys.*, **16**(1994)71.
- [8] Huang Zhibin, Chen Yinbao, Fu Shinian, *Chin. J. Nucl. Phys.*, **17**(1995)345.

Scaling Law of Emittance Growth for Bunched Beam with Gaussian Density Distribution in Both Longitudinal and Transverse Directions in Linac

Chen Yinbao Huang Zhibin Fu Shinian

(China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413)

Received 5 Tuly 1996

Abstract

In this paper, using a cylinder model of space charge, the formulae of self-energy and emittance growth for a bunched beam with Gaussian type density distribution in both longitudinal and transverse directions in linac are derived. And the scaling law relating the beam parameters with the machine parameters are discussed by means of the numerical simulation results.

Key words gaussian density distribution in both longitudinal and transverse directions, emittance, scaling law.