q 类似玻色算符的逆算符及其应用*

韦联福 王顺金 揭泉林

(西南交通大学现代物理研究所 成都 610031)

1996-12-06收稿

摘 要

在 q 类似 Fock 空间中引入了 q 类似玻色算符 a_q, a_q^+ 的逆算 a_q^{-1}, a_q^{+-1}. 利用 a_q^{-1}, a_q^{+-1} 的性质,构造了增光子相干态的 q 形变形式并讨论其完备性关系.

关键词 q 类似玻色算符,逆算符,增光子相干态,完备性关系.

1 引 言

众所周知,构成 Heisenberg 代数的玻色算符 a 及 a^+ 在群论及许多物理分支领域(如量子力学、量子光学及凝聚态理论等)中都有重要应用. 许多有实际意义的量子态都可用玻色算符及其某种组合形式的本征态来表示,例如:Fock 态 $|n\rangle$ 是 a^+a 的本征态,谐振子相干态则是 a 的本征态. 最近 Metha 等[1]所引人的玻色算符的逆算符 a^{-1}, a^{+-1} 在量子力学的非幺正变换理论中也有实际应用[2]. 我们知道,构成 q 类似 Heisenberg 代数[3]

$$a_q a_q^+ - q a_q^+ a_q = q^{-N_q}, \tag{1.1}$$

$$[N_q, a_q] = -a_q \quad [N_q, a_q^+] = a_q^+ \tag{1.2}$$

的 q 类似玻色算符 a_q, a_q^+ 具有重要意义. 一方面,应用 q 类似玻色算符及其组合形式可以得到许多量子代数(如 $SU_q(2)$[3]、$SU_q(1,1)$[4]等)的玻色实现;另一方面,q 类似玻色算符及其某种组合形式的本征态已被用于对许多 q 形变量子态(如 q 类似相干态[3]、q 类似带电玻色相干态[5]及 q 类似偶奇相干态[6]等)的描述. 是否存在 q 类似玻色算符 a_q, a_q^+ 的逆算符? 本文首先在 q 类似 Fock 空间中通过对 q 类似 Fock 态的作用引入 q 类似玻色算符的逆算符 a_q^{-1}, a_q^{+-1}. 进而利用 a_q^{-1}, a_q^{+-1} 的性质,构造增光子(photon-added)相干态的 q 形变形式并讨论其完备性关系.

2 q 类似玻色湮没算符和产生算符的逆算符

形式上看似乎总可以引入 q 类似玻色湮没算符 a_q 和产生算符 a_q^+ 的逆算符 a_q^{-1} 和

*国家自然科学基金资助.

a_q^{+-1}使 $a_q a_q^{-1}=1$ 或 $a_q^{-1}a_q=1$, 及 $a_q^+ a_q^{+-1}=1$ 或 $a_q^{+-1}a_q^+=1$, 其实不然. 为得到 a_q^{-1}和 a_q^{+-1}的具体表示, 我们在 q 类似 Heisenberg 代数的表示空间, 即 q 类似 Fock 空间 $\{|n\rangle_q : |n\rangle_q = \frac{(a_q^+)^n}{\sqrt{[n]!}}|0\rangle_q, (n=0,1,2\cdots\cdots)\}$中进行讨论. 由[3]

$$a_q|n\rangle_q=\sqrt{[n]}\ |n-1\rangle_q,\quad a_q^+|n\rangle_q=\sqrt{[n+1]}\ |n+1\rangle_q, \tag{2}$$

其中 $[n]=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}}$, q 是形变参数, 通过方程

$$a_q^{-1}|n\rangle_q=\frac{1}{\sqrt{[n+1]}}\ |n+1\rangle_q,\ a_q^{+-1}|n\rangle_q=(1-\delta_{n,0})\frac{1}{\sqrt{[n+1]}}\ |n+1\rangle_q \tag{3}$$

可以给出 q 类似玻色湮没算符和产生算符的逆算符, 即 a_q^{-1}及 a_q^{+-1}的一种定义: $a_q^{-1}(a_q^{+-1})$ 对 q 类似 Fock 态作用一次相当于产生(湮没)一个粒子. 显然, a_q只有右逆而无左逆:

$$a_q a_q^{-1}=1,\quad a_q^{-1}a_q=1-|0\rangle_{qq}\langle 0|\neq 1, \tag{4}$$

而 a_q^+则只有左逆而无右逆:

$$a_q^{+-1}a_q^+=1,\qquad a_q^+a_q^{+-1}=1-|0\rangle_{qq}\langle 0|\neq 1, \tag{5}$$

这里 $|0\rangle_q$是 q 类似真空态: $a_q|0\rangle_q=0$. 由(3)、(4)式可得

$$a_q a_q^+ a_q^{+-1}=a_q,\qquad a_q^{-1}a_q a_q^+=a_q^+, \tag{6.1}$$

$$[a_q,\ a_q^{-1}]=[a_q^{+-1},\ a_q^+]=|0\rangle_{qq}\langle 0|\ , \tag{6.2}$$

及

$$a_q^m a_q^{-m}=a_q^{+-m}a_q^{+m}=1,\quad a_q^{-m}a_q^m=a_q^{+m}a_q^{+-m}=1-\sum_{i=0}^{m-1}|i\rangle_{qq}\langle i|\ , \tag{7}$$

其中 m 为大于 1 的整数. 值得指出的是, 尽管 q 类似相干态 $|a\rangle_q$[3],

$$|\alpha\rangle_q=A(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{[n]!}}\ |n\rangle_q\ , \tag{8}$$

其中 $[n]!=[n]\,[n-1]!$, 但 $[0]=1$, $A(\alpha)=(\exp(|\alpha|^2))^{-\frac{1}{2}}$而 $\exp(|\alpha|^2)=\sum_{n=0}\frac{(|\alpha|^2)^n}{[n]!}$ 则是 q 类似指数函数. (8)式是 a_q的本征态:

$$a_q|\alpha\rangle_q=a|a\rangle_q\ , \tag{9}$$

但 $|\alpha\rangle_q$却不是 a_q^{-1}的本征态, 即 $a_q^{-1}|\alpha\rangle_q\neq a^{-1}|\alpha\rangle_q$. 事实上并不存在 a_q^{-1}的右本征态, 利用(3)式有

$$a_q^{-1}|\alpha\rangle_q=a^{-1}(|\alpha\rangle_q-A(\alpha)|0\rangle_q)\ . \tag{10}$$

同理, 还可以证明 a_q^{+-1}除了一个本征值为零的本征态 $|0\rangle_q$外, 也不存在右本征态.

3 增光子相干态的 q 形变及其完备性关系

关于 q 变形的具体物理意义, 迄今尚末有明确的答案. 利用 q 类似 Heisenberg 代数来刻画量子光场及其可能存在的各种非线性效应, 从而通过对 q 形变典型光场态的研究以揭示 q 变形所蕴含着的物理意义, 是近年来较为引人注目的一种尝试. 1992 年, Agrwal 等通过用玻色产生算符 a^+ 对谐振子相干态 $|\alpha\rangle$的重复多次作用, 得到一个具有明显的非经

典特性的光场量子态，即增光子相干态[7]．下面利用 q 类似玻色算符及其逆算符来研究由 q 形变谐振子所描述的光场的对应量子态．考虑如下的量子态：

$$|\alpha,m\rangle_q = C a_q^{+m}|\alpha\rangle_q \ , \tag{11}$$

其中 m 为正整数，C 为归一化系数．利用(7)、(9)式可以证明，$|\alpha,m\rangle_q$正是算符 $a_q^{+m}a_q a_q^{+-m}$ 的本征态，即

$$a_q^{+m}a_q a_q^{+-m}|\alpha,m\rangle_q = \alpha\,|\alpha,m\rangle_q \ . \tag{12}$$

注意到 $q\to 1$ 极限下，q 类似 Heisenberg 代数即恢复到通常的 Heisenberg 代数这一事实，我们看到 $|\alpha,m\rangle_q$正是文献[7]所定义的增光子相干态的 q 类似形式．这种 q 形变的相干态是否也具有完备性？将(8)式代入(11)式得

$$|\alpha,m\rangle_q = CA(\alpha)\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n\sqrt{[n+m]!}}{[n]!}\ |n+m\rangle_q \ . \tag{13}$$

显然，所有的数态集 $\{|n\rangle_q, n = 0,1,2\cdots\cdots,m-1\}$ 均不包含于这一相干态集合中．然而，方程(12)表明这些数态也是算符 $a_q^{+m}a_q a_q^{+-m}$的属于本征值 $a = 0$ 的本征态，故对应于这一本征值的本征态是 $m+1$ 重简并的．所以 $|\alpha,m\rangle_q$本身并不能构成一个完备集合．但是 $|\alpha,m\rangle_q$ 与 $\{|n\rangle_q,\ n = 0,1,2\cdots\cdots,m-1\}$ 则可以组成一个完备系．事实上，q 类似相干态的完备性关系式[8]

$$\int|\alpha\rangle_{qq}\langle\alpha|\mathrm{d}\mu(\alpha) = 1 \tag{14}$$

的两边左乘 a_q^{+m}并右乘 a_q^m，再利用(11)式得

$$\int\ C^{-2}|\alpha,m\rangle_{qq}\langle\alpha,m|\mathrm{d}\mu(\alpha)_q = a_q^{+m}a_q^m \ . \tag{15}$$

其中 $\mathrm{d}\mu(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi}\exp_q(|\alpha|^2\exp_q(-|\alpha|^2)\,\mathrm{d}_q|\alpha|^2\mathrm{d}\theta$.对 $\mathrm{d}\theta$的积分为通常的积分，而对 $\mathrm{d}_q|\alpha|^2$的积分则为 q 积分．最后再用 $a_q^{-m}a_q^{+-m}$右乘上式，由(7)式容易得出如下的完备性关系

$$\int C^{-2}|\alpha,m\rangle_{qq}\langle\alpha,m|_q a_q^{-m}a_q^{+-m}\mathrm{d}\mu(\alpha) + \sum\nolimits_{i=0}^{m-1}|i\rangle_{qq}\langle i| = 1 \ . \tag{16}$$

由于 a_q^{-1}与 a_q^+都具有产生算符的意义，故而还可以通过 a_q^{-1}对 $|\alpha\rangle_q$的重复多次作用而得到 q 类似增光子相干态的另一种表示形式

$$|\alpha,m\rangle_q = Da_q^{-m}|\alpha\rangle_q \ , \tag{17}$$

其中 D 为归一化系数，其完备性关系与(16)式类似．值得指出的是，与 q 类似相干态本身即可构成 q 类似 Heisenberg 代数的表示空间不同，由于 q 类似增光子相干态单独不能构成一个完备集，所以它只有与数态 $\{|n\rangle_q, n = 0,1,2\cdots\cdots,m-1\}$ 一起才能构成 q 类似 Heisenberg 代数的一种表示．有意思的是，如果用 a_q^{+-1}对 $|\alpha\rangle_q$重复作用 m 次，则得到另一个典型的 q 类似光场量子态，即减光子 (photon-depleted)相干态

$$|\alpha,-m\rangle_q = Ga_q^{+-m}|\alpha\rangle_q \ , \tag{18}$$

这里 G 为归一化系数，因为 a_q^{+-1}的行为正像湮没算符一样，故它对 $|\alpha\rangle_q$重复作用 m 次即相当于在 $|\alpha\rangle_q$态中湮没 m 个光子．不难证明，$|\alpha,-m\rangle_q$正是算符 $a_q^{+-m}a_q a_q^{+m}$的本征态，即

$$a_q^{+-m}a_q a_q^{+m}|\alpha,-m\rangle_q = \alpha|\alpha,-m\rangle_q \ , \tag{19}$$

与 $|\alpha,m\rangle_q$不同的是，$|\alpha,-m\rangle_q$本身即可以构成一个完备系，其完备性关系为

$$\int G^{-2}|\alpha,-m\rangle_{qq}\langle\alpha,-m|\ a_q^m a_q^{+m}\mathrm{d}\mu(\alpha) = 1, \tag{20}$$

所以任意量子态 $|\psi\rangle$都可以用 $|\alpha,-m\rangle_q$来展开：

$$|\psi\rangle=\int G^{-2}_{q}\langle\alpha,-m|a_q^m a_q^{+m}|\psi\rangle|\alpha,-m\rangle_q \mathrm{d}\mu(d) \ . \tag{21}$$

4 结 论

通过对 q 类似 Fock 态的作用，定义了 q 类似玻色湮没算符和产生算符的逆算符. a_q^{-1} 的作用像一个产生算符，而 a_q^{+-1} 则类似于一个湮没算符；a_q 只有右逆而无左逆，而 a_q^{+} 则只有左逆而无右逆. 应用所定义的 q 类似玻色湮没算符和产生算符的逆算符，讨论了 a_q^{-1} 及 a_q^{+-1} 作用于 q 类似相干态的性质. 结果表明 $|\alpha\rangle_q$ 并不是 a_q^{-1} 的本征态，a_q^{+m} 及 $a_q^{+-m}(m\geqslant 1)$ 作用于 q 类似相干态构成了新的 q 类似量子态 $|\alpha,m\rangle_q$ 和 $|\alpha,-m\rangle_q$，它们分别是算符 $a_q^{+m}a_q a_q^{+-m}$ 和 $a_q^{+m}a_q a_q^{+m}$ 的本征态. $|\alpha,-m\rangle_q$ 本身即可构成一个完备系，而 $|\alpha,m\rangle_q$ 只有与数态集 $\{|n\rangle_q, n=0,1,2\cdots\cdots,m-1\}$ 一起才能组成完备集合，从而可以作为一个表象的基矢. 最后应指出的是，本文构造的 q 类似增光子相干态在 $q=1$ 时，即恢复到文献 [7] 所定义的增光子相干态. 而 $q\neq 1$ 时所导致的非线性效应可以通过数值模拟的方法进行研究.

参 考 文 献

[1] C. L. Metha, A. K. Roy, G. M. Saxena, *Phys. Rev.*, **A46**(1992)1565.

[2] Zhang Tang, *Phys. Rev.*, **A52**(1995)3448.

[3] L. C. Biedenharn, *J. Phys.*, **A22**(1989)L873.

[4] D. Fairlie, J. Nutyts, C. Zachos, *Phys. Lett.*, **B202**(1988)320.

[5] H. Y. Fan, C. P. Sun, *Commun. Theor. Phys.*, **17**(1992)243.

[6] 韦联福，物理学报，**42**(1993)757.

[7] G.S.Agarwal, K. Tara, *Phys. Rev.*, **A43**(1991)492.

[8] R. W. Gray, C. A. Nelson, *J. Phys.*, **A23**(1990)L945.

q-Analogue Boson Inverse Operators and Their Application

Wei Lianfu　Wang Shunjin　Jie Quanlin

(*Institute of Modern Physics, Southwest Jiaotong University, Chengdu* 610031)

Received 6 December 1996

Abstract

The inverse of the q-analogue boson creation and annihilation operators is introduced. By virtue of the properties of a_q^{-1} and a_q^{+-1}, the q-analogue deformation form of the photon-added coherent states is constructed and its completeness relation is discussed.

Key words q-analogue boson operators, inverse operators, photon-added coherent states, completeness relation.