

多粒子模拟方法分析北京正负电子对撞机 储存环束团长度拉伸效应*

李 云 王光伟

(清华大学工程物理系 北京 100084)

1995-10-26 收稿

摘 要

采用多粒子模拟方法,分析了北京正负电子对撞机(BEPC)储存环纵向不稳定性,给出了BEPC储存环束团长度与单束流强的关系,得出了阈值流强.模拟结果与BEPC95年4月实测结果符合较好.

关键词 储存环纵向不稳定性,束团拉长,阈值流强,阻抗.

1 引 言

自从1962年世界上建成第一台电子储存环以来,几乎在每一台电子储存环上都观察到了束团纵向不稳定性.这类不稳定性具有共同的特点:不稳定性的发生只依赖于单束流强;流强较弱时,束团为理论所预言的Gauss分布;随着流强增大,束团纵向分布由于势阱扰动会渐渐偏离Gauss分布,但流强小于一定阈值时能散不变;当流强大于这一阈值时,能散和束长同时随流强的增大而增大.

束团纵向不稳定性的出现对对撞机储存环的性能有着重要的影响:它降低了对撞亮度,影响束团的寿命和物理实验的能量分辨能力.在新一代同步光源上,对于那些时间分辨率要求很高的实验,束团拉长也是十分有害的.正在论证的 τ c工厂所要求的高亮度,对束团长度提出了更为严格的要求.从国外几台电子对撞机采用Mini- β 方案提高亮度成功的经验与失败的教训来看,对束团长度的控制是成功的关键之一.因此对北京正负电子对撞机(BEPC)改进和提高亮度的计划来说,研究束团拉长的机制及其在BEPC上的具体特点,并寻找有效的工程技术手段来控制束团长度有很重要的意义.

由于纵向不稳定性对储存环的重要性,对它的研究也在不断发展.理论研究基本从Vlasov方程出发,微扰展开并将方程线性化,在若干物理假设的基础上获得某些一般结果和公式,比较成功的有Alex Chao的Scaling定律^[1]、Kail-Schnell的微波不稳定性^[2]等.这一问题在理论上尚未得到彻底解决,而且理论和实验的比较也不能令人满意.工程上控制束团拉长的办法主要有:尽量使真空室光滑,采用超导腔及采用低阻抗注入冲

* 国家自然科学基金和正负电子对撞机国家实验室 τ cF论证课题资助.

击磁铁等。但是理论还不能给出真空室结构对束团拉长, 能散增加的影响的严格定量结果。

现代计算机技术的发展使我们可以用计算机多粒子模拟方法研究储存环纵向束流不稳定性。虽然国外已经有实验室进行过这项工作^[1], 但在国内尚无先例。本文针对 BEPC 储存环, 采用多粒子模拟方法, 给出了束团的一些平均特性和不稳定发生的阈值流强, 并与实验进行了比较, 符合较好。

2 纵向运动方程和多粒子模拟方法

粒子在储存环中运动受到高频场、同步辐射和尾场的作用^[4]。把这些量的作用集中在一点考虑, 也就是认为第 i 个粒子的能量偏差 ε_i 和时间偏差 τ_i 在一圈中不发生变化, 只当经过高频腔时才发生突变: 由第 n 圈的 $\varepsilon_i^n, \tau_i^n$ 变为第 $n+1$ 圈的 $\varepsilon_i^{n+1}, \tau_i^{n+1}$ 。在几倍于阻尼时间 τ_e 以后, 束团达到一种稳定的分布^[5]。

2.1 理论公式

多粒子模拟时所用的公式为:

$$\varepsilon_i^{n+1} = \varepsilon_i^n + eV_{rf} \times \sin(\varphi + \omega \times \tau_i^n) - eU_0 - 2 \times \frac{T_0}{\tau_e} \times \varepsilon_i^n + 2\sigma_{\omega} R_i \sqrt{\frac{T_0}{\tau_e}} - eW_i, \quad (1)$$

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\alpha T_0}{E_0} \times \varepsilon_i^{n+1}, \quad (2)$$

其中 $\varepsilon_i^n, \tau_i^n, \varepsilon_i^{n+1}, \tau_i^{n+1}$ 分别为第 i 个粒子第 n 圈和第 $n+1$ 圈的能量偏差和时间偏差; V_{rf} 为高频腔电压幅值; σ_{ω} 为自然能散; φ 为平衡相角; ω 为回旋频率; U_0 为同步粒子每圈辐射损失; T_0, τ_e 分别为回旋周期和阻尼时间; α 为动量压缩因子; eW_i 为粒子所受尾场。

高频场的作用为 $eV_{rf} \times \sin(\varphi + \omega \times \tau_i^n)$ 这一项所描述。电子同步辐射的作用可以分成平均效果和随机效应两项来考察。平均效果计算如下: 能量偏差为 ε_i 的非同步粒子每圈辐射能量 $U(\varepsilon_i)$ 用同步粒子每圈辐射能量 U_0 的一阶展开表示:

$$U(\varepsilon_i) = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \right)_0 \varepsilon_i = U_0 + \frac{2T_0}{\tau_e} \varepsilon_i. \quad (3)$$

随机效果可用服从高斯分布(平均值为 0, 均方差为 1)的随机数 R_i 求得: $2\sigma_{\varepsilon} \sqrt{\frac{T_0}{\tau_e}} R_i$ 。

2.2 阻抗模型

在上面的公式中, 最核心的部分是尾场的计算。这里利用傅立叶变换, 把对尾场的计算变换为对阻抗的计算。本文采用纵向宽带阻抗模型, 计算中取 BEPC 储存环纵向阻抗模拟测试的结果中 8 个主要模式的迭加^[6](8 个模式的参数见表 1, 阻抗实部的曲线见图 1)。

表1 BEPC阻抗几个主要模式的参数

N	f_i (GHz)	$(R/Q)_i$ (Ω)	Q_i
1	0.165	197.9	5.10
2	1.770	2826.0	9.00
3	1.580	1816.0	1.25
4	2.050	370.0	9.50
5	3.440	1058.0	2.80
6	4.700	330.0	37.00
7	5.250	290.0	40.00
8	6.750	590.0	4.50

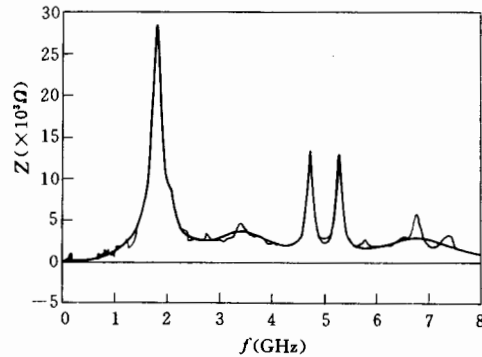


图1 阻抗实部随频率的变化

$$Z_{\parallel}(\omega) \approx \sum_{i=1}^8 Z_i(\omega), \quad (4)$$

$$Z_i(\omega) = \frac{R_i}{1 + j \left(\frac{\omega_i}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_i} \right) Q_i}. \quad (5)$$

其中, ω_i , R_i , Q_i 分别是第 i 个模式的谐振角频率, 分路阻抗和品质因数. 对束团分布函数 $I_{\text{beam}}(\tau)$ 做快速傅利叶变换, 得到 $I(\omega)$, 与阻抗 $Z(\omega)$ 相乘, 然后求反傅利叶变换, 即得 τ 时刻到达的粒子所受尾场 $W(\tau)$,

$$W(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} I_{\text{beam}}(t') \cdot W(\tau - t') dt' = \overline{I(\omega)Z(\omega)}. \quad (6)$$

2.3 实际考虑

实际运行中每个束团中粒子数的量级为 10^{11} , 束团在几个阻尼时间后才能达到稳定, 能量为 2.015 GeV 时阻尼时间为 $\tau_e = 11.3 \times 10^{-3}$ s, 粒子回旋周期为 $T_0 = 7.9 \times 10^{-7}$ s, 因此粒子需要运行约七万圈后才能达到稳定分布. 考虑到计算机的速度和内存, 粒子数和圈数选取不能过大; 但另一方面计算结果的涨落与粒子数 N 的开方成反比, 因此粒子数选取也不能太小. 实际选取如下:

粒子数选取: 选取 100000 个大粒子, 每个大粒子代表 n 个实际粒子 (n 的值由平均流强决定). 粒子数为 100000 时, 随机误差为 0.3%.

圈数选取: 计算 2.015 GeV 时取了 5 个阻尼时间内转过的圈数 70266 圈.

改变粒子在相空间的初始分布不会影响到其它参数, 因此可较随意地选取相空间的初始分布. 例如最初可取 δ 函数, 以后计算时取上次平衡时的束团分布为初始分布.

3 $E=2.015\text{GeV}$ 的模拟结果及分析

取 5 个阻尼时间进行模拟, 每一圈都计算了束团中心位置 $\langle z \rangle$ 、束团长度 σ_z 和能散

σ_e , 最后通过加权平均得出了束团平衡时的束团长度和能散等平均特性.

表 2 $E=2.015\text{GeV}$ 的模拟结果(参数见附录)

平均流强 $I(\text{mA})$	相对束长 $\sigma_z / \sigma_{z,0}$	相对能散 $\sigma_e / \sigma_{e,0}$	平衡相角的偏离 $\Delta\varphi(^{\circ})$	束团长度 $\sigma_z(\text{cm})$
5.0	1.032	1.010	1.26	2.67
10.0	1.078	1.010	2.38	2.78
15.0	1.166	1.028	3.27	3.01
20.0	1.315	1.102	3.58	3.40
27.5	1.508	1.209	3.82	3.90
35.0	1.609	1.229	3.91	4.16
42.5	1.735	1.361	3.76	4.48
50.0	1.863	1.509	3.76	4.81
60.0	1.974	1.668	3.88	5.10
70.0	2.037	1.699	4.15	5.26
90.0	2.127	1.730	4.89	5.49
110.0	2.306	1.939	5.33	5.96

表 2 列出了束长 σ_z , 能散 σ_e 和平衡相角 φ 的模拟结果. 图 2 显示了平衡相角 φ 随流强 I 的变化. 图 3 显示了束团长度 σ_z 以及能散 σ_e 随流强 I 的变化. 图中实线 1 为 BEPC

实测结果 $\sigma_z = 0.404 \left[\frac{I\alpha}{Ev_s^2} \right]^{\frac{1}{28}}$, 由图可知模拟结果与实验结果符合较好.

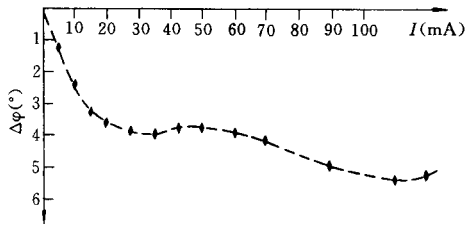


图 2 平衡相角 φ 随流强 I 的变化($E=2.015\text{GeV}$)

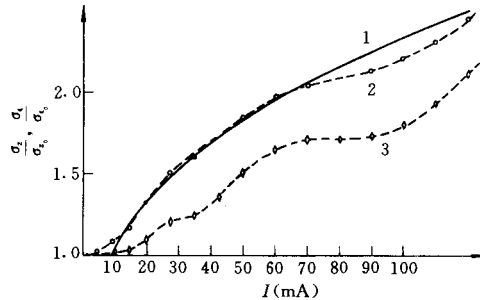


图 3 束长 σ_z 和能散 σ_e 随流强 I 的变化

曲线 1: BEPC 实测结果; 曲线 2: 束长 σ_z

曲线 3: 能散 σ_e .

4 势阱扰动及其对束流特性的影响

4.1 势阱扰动

当只考虑高频加速场对粒子的作用时, 束团纵向分布近似为 Gauss 分布, 而考虑了尾场作用之后, 势阱受到扰动, 束团纵向分布将偏离 Gauss 分布. 不考虑辐射阻尼和扩

散因素时, 单粒子运动方程(1)、(2)式可以写为等价的微分形式:

$$\frac{d\tau}{ds} = -\alpha \cdot \varepsilon, \quad (7)$$

$$\frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{\omega_s^2}{\alpha} \cdot \tau - \frac{e}{T_0 E_0} \int_{\tau}^{\infty} I_{\text{beam}}(t) \cdot W(t-\tau) dt. \quad (8)$$

粒子在相空间的分布函数 $\psi(s, \tau, \varepsilon)$ 满足如下 Vlasov 方程:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} - \alpha \varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + g(\tau) \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = 0, \quad (9)$$

$$g(\tau) = \frac{\omega_s^2}{\alpha} \tau - \frac{e}{T_0 E_0} \int_{\tau}^{\infty} I(t) W(t-\tau) dt. \quad (10)$$

为了得到平衡分布, 令 $\partial \psi / \partial s = 0$. 然后对 Vlasov 方程求解, 可以得到束团纵向分布 $I_{\text{beam}}(\tau)$ 所满足的积分方程.

$$\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2}\right) I_{\text{beam}}(\tau), \quad (11)$$

$$I_{\text{beam}}(\tau) = I_{\text{beam}}(0) \cdot \exp\left(\frac{-\omega_s^2 \cdot \tau^2}{2\alpha^2 \sigma_\varepsilon^2} + \frac{e}{\alpha \sigma_\varepsilon^2 E_0 T_0} \times \int_0^\tau dt' \int_{\tau'}^{\infty} I_{\text{beam}}(t) \cdot W(t-t') dt\right). \quad (12)$$

在尾场已知的情况下, 这个方程可以迭代求解. 本文用迭代的方法, 得到了势阱扰动对束团纵向分布、束团长度和相位的影响, 并考察了随流强增大各物理量的变化趋势.

4.2 势阱扰动对束团纵向分布的影响

采用与多粒子模拟相同的尾场, 用(12)式进行迭代, 计算得到了 2.8GeV 时平均流

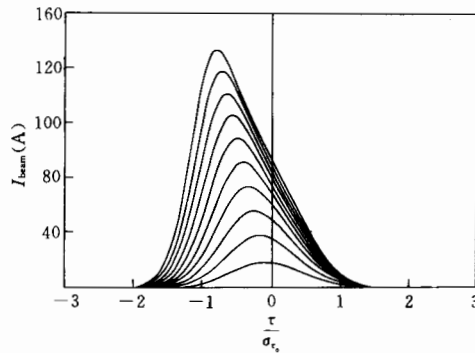


图4 势阱扰动对束团纵向分布的影响

强从 10mA 到 110mA 的束团纵向分布(见图4). 图中 11 条曲线从下至上分别代表平均流强从 10mA 到 110mA 的束团纵向分布(以瞬时流强 I_{beam} 表示). 随束流平均流强增大, 束团纵向分布表现出如下特点: 束团的分布越来越偏离 Gauss 分布. 这是由于尾场对势阱的扰动越来越大. 束团的平均相位向减小的方向移动, 这是因为要补偿阻抗实部带来的能量损失.

4.3 影响束团拉长的各个因素以及它们对束团拉长的贡献

束团拉长是由两个原因造成的: 势阱扰动和能散增大, 而势阱扰动和能散增大之间是不相关的, 因此束长 σ_z 可以写成:

$$\sigma_z^2 = \sigma_{z0}^2 + \sigma_{\text{sp}}^2 + \left(\frac{\sigma_{z0}}{\sigma_{\varepsilon 0}}\right)^2 (\sigma_\varepsilon^2 - \sigma_{\varepsilon 0}^2), \quad (13)$$

上式也可以用自然束长 σ_{z0} 归一写成以下形式:

$$\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z0}}\right)^2 = \frac{\sigma_p^0}{\sigma_{z0}^2} + \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_{c0}^2} - 1\right), \quad (14)$$

$$\sigma_p^2 = \sigma_{z0}^2 + \sigma_p^2. \quad (15)$$

上式中 σ_z 是总束长, 是多粒子模拟的结果, σ_p 是势阱扰动计算结果, 其中包含了自然束长, σ_{z0} 则为单纯的势阱扰动引起的束团拉长.

当流强小于不稳定性发生的阈值流强时, 束团的能散不变, 这时束团拉长只与势阱扰动有关. 当流强超过阈值流强时, 总的束团拉长是势阱扰动和能散增大两项之和. 表 3 显示了势阱扰动引起的束团拉长和能散增大引起的束团拉长各占总束长的百分比. 从表中可以看出, 多粒子模拟和势阱扰动的计算结果与(14)式符合较好. 但是随着流强增大, 计算结果与(14)式的偏差也增大. 随着流强增大, 自然能散在束长中占的比例急剧减少, 能散增大对束长的影响迅速增强, 而势阱扰动对束长的影响增加不大.

表 3 势阱扰动和能散增加引起的束团拉长的比较

平均流强 $I(\text{mA})$	能散增加引起	势阱扰动引起	总束团拉长 $\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{z0}}\right)^2$	与(14)式的相对偏差 (%) $\left[\frac{\sigma_p^2}{\sigma_{z0}^2} + \left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_c^2} - 1\right) - \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{z0}^2}\right] / \left(\frac{\sigma_z^2}{\sigma_{z0}^2}\right)$	各因素引起的束长占总束长的百分比 (%)		
	的束团拉长 $\left(\frac{\sigma_c}{\sigma_{c0}}\right)^2 - 1$	的束团拉长 $\left(\frac{\sigma_p}{\sigma_{z0}}\right)^2$			能散增加 $\left(\frac{\sigma_c^2}{\sigma_{c0}^2} - 1\right) \times \frac{\sigma_{z0}^2}{\sigma_z^2}$	势阱扰动 $\frac{\sigma_p^2}{\sigma_z^2}$	自然能散 $\frac{\sigma_{z0}^2}{\sigma_z^2}$
45	0.006	1.076	1.080	0.1	0.6	7.0	92.6
50	0.334	1.092	1.407	1.4	23.7	6.6	71.1
55	0.442	1.109	1.407	2.0	29.1	7.2	65.7
60	0.447	1.128	1.540	2.6	29.0	8.4	64.9
65	0.447	1.147	1.560	1.9	28.7	9.5	64.1
70	0.525	1.168	1.644	3.0	31.9	10.2	60.8
80	0.672	1.211	1.812	5.8	37.1	11.6	55.2
90	0.753	1.257	1.916	5.8	39.3	13.4	52.5
100	0.904	1.304	2.085	5.8	43.4	14.6	48.0

5 结 束 语

本文用多粒子模拟方法, 采用 BEPC 储存环 2.015GeV 的参数, 给出了束团纵向运动的一些初步特性以及不稳定性发生的阈值流强. 并与实测结果进行了比较. 今后还要继续优化程序, 以便能够计算多束团的情况, 获得更多的不稳定发生过程的信息, 去研究这种不稳定性发生的机制.

参 考 文 献

- [1] Alex Chao, Physics of Collective Beam Instability in High Energy Accelerator, John Wiley & Sons, 1993.
- [2] E. Keil, W. Schnell, CERN-TH-RF /69-48 (1969).
- [3] K. L. F. Bane K. Oide, Simulations of the Longitudinal Instability in the Damping Ring, SLAC-PUB-6216 (1993).
- [4] The Physics of Electron Storage Ring, SLAC-121, UC-28 (1979).
- [5] E. Keil, Physics of High Energy Particle Accelerator, SLAC(1982).
- [6] 王光伟, 储存环纵向阻抗的研究, 高能所博士论文, 1989.

附录: 程序中所用的 BEPC 的参数

能 量	$E=2.015\text{GeV}$
高频电压幅值	$V_{\pi}=2.0\text{MeV}$
回旋频率	$f_0=1.2576 \times 10^8\text{s}^{-1}$
高频频率	$f_{\pi}=2.012 \times 10^8\text{s}^{-1}$
同步粒子每圈辐射损失	$U_0=141.0\text{keV}$
动量压缩因子	$\alpha=4.0 \times 10^{-2}$
阻尼时间	$\tau_c=11.3 \times 10^{-3}\text{s}$
平衡相角	$\varphi_0=175.96^\circ$
束团自然长度	$\sigma_{z0}=2.58\text{cm}$
自然能散	$\sigma_{e0}=2.072 \times 10^6\text{eV}$
计算时间	$t=5\tau_c$
粒子数选取	$N=100000$

Research of Bunch Lengthening of BEPC Ring by Many-Particle Simulation

Li Yun Wang Guangwei

(Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084)

Received 26 October 1995

Abstract

By many-particle simulation, longitudinal instability of BEPC ring is analysed and dependence of bunch length on single beam current and the threshold current are given. Simulation results go well with the measurement results.

Key words longitudinal instability, bunch lengthening, hreshold current, impedance.