

(2+1) 维 $SU(2)$ 真空波函数四级近似的解析计算*

惠 萍 陈启洲

(广东教育学院物理系 广州 510303) (中山大学物理系 广州 510275)

1994-07-20 收稿

摘 要

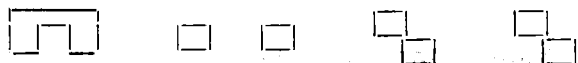
考虑到么模条件造成波函数选取的任意性, 把不连接图代换成复杂的连接图, 重新计算 μ_0 和 μ_2 得到更令人满意的结果。

关键词 格点规范, 解析计算, 真空波函数。

1 引 言

文献[1,2]发展了一种截断本征方程计算真空波函数的方法, 此方法既不同于 Green-site^[3] 所采用的截断方式, 也不同于 N. J. Watson 的强耦合展开方式。它成功地计算出真空波函数的三级和四级结果, 使结果表现出很好的标度行为。

文献[1]计算出的三阶图近似结果接近于 Arisue^[4] 用 Monte Carlo 方法计算出的结果, 在弱耦合区表现出很好的标度行为。但文献[2]计算到四阶图近似时, μ_0 随着 $1/g^2$ 的增加迅速上升。为了解决这一问题, 文献[2]丢掉了四个“特殊”的图形:



后才得到与三阶图相似的结果, 但丢掉这四个图会破坏连续极限截断法的要求: 即必须保留全部四阶图。为了克服三级和四阶图近似的明显差异, 本文利用么模条件:

$$\text{Tr}A\text{Tr}B = \text{Tr}AB^+ + \text{Tr}AB. \quad (1)$$

把不连接图换成连接图, 总图数不变 (69 个)。方程(1)的三个图中只有两个是独立的, 文献[1,2]中选择了 $\text{Tr}A\text{Tr}B$ 和 $\text{Tr}AB^+$ 作为独立图, 而本文选择 $\text{Tr}AB$ 和 $\text{Tr}AB^+$ 作为独立图。

例:

$$\begin{aligned} \text{Tr}A &= \square & \text{Tr}B &= \square\square \\ \begin{array}{c} \square \\ \square\square \end{array} &= \begin{array}{c} \square \\ \square\square \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} &= \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} + \square \end{aligned}$$

* 国家教委博士点基金和香港-中山大学高等学术中心资助项目

从上面的例子看到方程左边的不连接图可以用方程右边的连接图来代换, 这些连接图可能表现了格点之间的相干性, 可以看出, 方程的右边不仅有高阶图也有低阶图, 因此, 么模条件将高阶和低阶图混合. 把不连接图全部换成连接图后, 无需丢掉四个“特殊”的图形, 计算出的 μ_0 值上升缓慢, 在 $1/g^2$ 较大时近似为常数值, 更接近于 Arisue 用 Monte Carlo 模拟方法计算出的结果.

Arisue^[5] 用 Monte Carlo 模拟方法得到在连续极限下的波函数为:

$$\Psi_0(U) = \exp\left[-\mu_0 \int d^2x \text{Tr} F(x)^2 - \mu_2 \int d^2x \text{Tr} (D_i F(x))^2\right],$$

其中

$$F = F_{12}, \quad D_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} F\right)^2.$$

μ_0, μ_2 的值为:

$$\mu_0 = (0.91 \pm 0.02)/e^2,$$

$$\mu_2 = -(0.19 \pm 0.05)/e^6.$$

e 是不变荷, g 为无量纲的耦合常数, 两者之间的关系为: $g^2 = e^2 a$

2 哈密顿量、本征方程和真空波函数

LTG 的哈密顿量为:

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_l E_l^2 - \frac{2}{g^4} \sum_p (\text{Tr} U_p + \text{Tr} U_p^\dagger) \right],$$

其中, $\text{Tr} U_p = \text{Tr} U_1 U_2 U_3 U_4$,

对于 SU(2) 群, $\text{Tr} U_p = \text{Tr} U_p^\dagger$, 则:

$$H = \frac{g^2}{2a} \left(\sum_l E_l^2 - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right). \quad (2)$$

我们采用文献[3]的真空波函数

$$|\mathcal{Q}\rangle = e^{R(U)} |0\rangle,$$

其中, $R(U)$ 由 Wilson 圈组成, $|0\rangle$ 满足 $E|0\rangle = 0$

本征方程:

$$H|\mathcal{Q}\rangle = H \cdot e^{R(U)} |0\rangle = e^{R(U)} e^{-R(U)} H \cdot e^{R(U)} |0\rangle = \varepsilon_0 |\mathcal{Q}\rangle. \quad (3)$$

利用公式:

$$e^{-RH} \cdot e^R = H - [R, H] + \frac{1}{2!} [R, [R, H]] + \dots,$$

$$[E_l^\alpha(x), U(y, j)] = \lambda^\alpha U(x, j) \delta_{xy} \delta_{lj},$$

$$[E_l^\alpha(x), U^+(y, j)] = -U^+(x, j) \lambda^\alpha \delta_{xy} \delta_{lj},$$

得本征方程为:

$$\sum_l ([E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R]] + [E_l^\alpha, R][E_l^\alpha, R]) - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr}(U_p) = \text{Const}. \quad (4)$$

真空波函数中的 R 可按图的阶展开:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

方程(4)中的高阶图是由低阶图经对易关系产生的:

$$[E_i^\alpha, [E_i^\alpha, R_n]] \in R_n + \text{低阶图},$$

$$[E_i^\alpha, R_n][E_i^\alpha, R_{n'}] \in R_{n+n'} + \text{低阶图}.$$

由以上对易关系我们得到三阶以内的连接图(省略了56个四阶图):

$$R_1 = C_0 \square \quad (5)$$

$$R_2 = +C_1 \square \square + C_2 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + C_3 \square \square \square \quad (6)$$

$$R_3 = B_1 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_2 \square \square \square + B_3 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_4 \square \square \square + B_5 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \\ + B_6 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_7 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} + B_8 \square \square \square + B_9 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \quad (7)$$

3 三级结果的计算

三阶截断本征方程为:

$$\sum_i \{ [E_i^\alpha, [E_i^\alpha, R_1 + R_2 + R_3]] + [E_i^\alpha, R_1][E_i^\alpha, R_1] \\ + 2[E_i^\alpha, R][E_i^\alpha, R_2] - \frac{4}{g^4} \text{Tr} U_p = \text{Const.} \quad (8)$$

将方程(5)(6)(7)代入方程(8),经计算得13个方程:

$$\{3C_0 - 4/g^4 + 3B_5 + 12B_6 + 5B_9 - C_0[3C_1 + 4C_2 + 5C_3]\} = 0,$$

$$[9C_1/2 + C_3 - C_0^2] = 0,$$

$$[8C_2 + C_0^2] = 0,$$

$$[13C_3/2 + C_0^2] = 0,$$

$$[6B_1 + B_3 - 2C_0C_1] = 0,$$

$$[6B_2 + B_4 - C_0C_1] = 0,$$

$$[8B_3 + 2B_7 + 2C_0C_1 - 2C_0C_3] = 0,$$

$$[8B_4 + 2B_8 + 2C_0C_1 - C_0C_3] = 0,$$

$$[9B_5 + B_9 + 3C_0C_1 - 4C_0C_2] = 0,$$

$$[15B_6 + 4C_0C_2] = 0,$$

$$[10B_7 + 2C_0C_3] = 0,$$

$$[10B_8 - C_0C_3] = 0,$$

$$[12B_9 + 4C_0C_2 + 5C_0C_3] = 0.$$

μ_0 和 μ_2 的表达式为:

$$\mu_0 = [C_0/2 + 2[C_2 + C_1] + [B_3 + B_4 + B_7 + B_8 + B_9]/2 \\ + 9[B_1 + B_2 + B_5 + B_6]]g^4,$$

$$\mu_2 = [C_1 - C_3]/4 + B_1 - B_4 + 3B_2/2 + [B_5 + B_8 - B_9 - B_3]/2]g^8. \quad (9)$$

μ_0 和 μ_2 的计算结果见图(1)所示, $1/g^2$ 从 0.1 变化至 2.4, 连接图的 μ_0 比不连接图的 μ_0 略高, 只是连接图的 μ_0 比不连接图的 μ_0 更趋近常数. 连接图的 μ_2 与不连接图的 μ_2 几乎重合, 没有明显不同. 从图中看到连接图与不连接图的 μ_0 、 μ_2 的结果与 Monte Carlo 模拟结果十分接近.

4 四级结果的计算

四阶图的本征方程:

$$\begin{aligned} & \sum_l \{ [E_l^\sigma, [E_l^\sigma, R_1 + R_2 + R_3 + R_4] + [E_l^\sigma, R_1][E_l^\sigma, R_1] \\ & + [E_l^\sigma, R_2][E_l^\sigma, R_2] + 2[E_l^\sigma, R_1][E_l^\sigma, R_2]] \\ & + 2[E_l^\sigma, R_1][E_l^\sigma, R_3] \} - \frac{4}{g^4} \text{Tr} U_p = \text{Const}. \end{aligned} \quad (10)$$

将(5)(6)(7)和 56 个四阶图代入方程(10)得到 69 个方程(略).

μ_0 和 μ_2 的表达式为:

$$\begin{aligned} \mu_0 = & \{ 8[A_0 + A_2 + A_4 + A_6 + A_8 + A_9 + D_0 + D_4 + D_5 + E_2 + E_9 + G_0 \\ & + G_1 + G_3] + 2[A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + D_1 + D_2 + D_3 + D_7 + D_9 + E_1 \\ & + E_3 + E_9 + F_1 + F_3 + F_5 + F_8 + G_2 + G_8 + G_9 + H_2 + H_4 + H_7] \} g^4 \\ \mu_2 = & \{ 7A_0 - 3A_1 + 6A_2 - 2A_3 + 11A_4/2 - 3A_5/2 + 4A_6 + 7A_8/2 + 3A_9 \\ & + 10D_0 - 4D_1 - D_2 + D_3/2 + 11D_4/2 + 4D_5 - 4D_6 + 2D_7 - 5D_8 + 3D_9 \\ & - 2E_0 + 3E_2 - E_3 - 5E_4/2 - E_5/2 - E_7 - 5E_8/2 - 3E_9/2 + F_1 - 8F_2 \\ & + 4F_3 - 2F_5 - 9F_6/2 - 7F_8/2 + 2F_9 + 2G_0 + 3G_1/2 - 3G_2/2 - G_4 \\ & - 2G_5 - G_6 - G_8/2 + 5G_9/2 - 2H_0 + 5H_2/2 - 2H_3 + H_4 - 2H_5 - H_6 \\ & + 2H_7 \} g^8/2. \end{aligned}$$

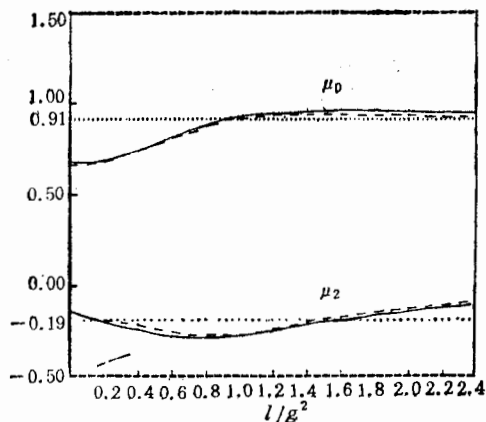


图 1

—— 连接图的结果 - - - - 不连接图的结果

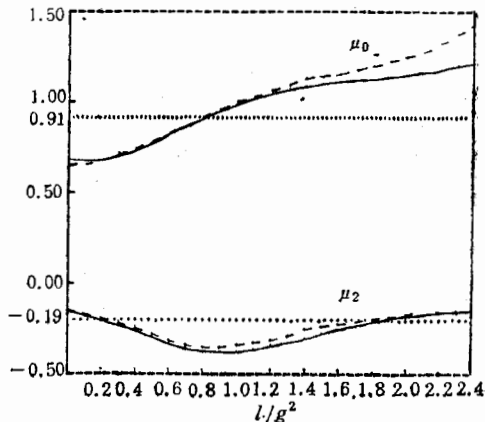


图 2

—— 连接图的结果 - - - - 不连接图的结果

四阶图的 μ_0, μ_2 计算结果见图(2)所示, $1/g^2$ 从 0.1 变化到 2.4, 连接图的 μ_0 值明显比不连接图的 μ_0 值更好, 并展现出收敛的趋势, 在 $1/g^2$ 较大时 μ_0 的值更接近于 Monte Carlo 模拟结果。而连接图的 μ_2 值与不连接图的 μ_2 值相差无几, 都表现出很好的标度行为。

5 讨论和结论

(1) 为了使对易子 $[E_1^a, R][E_1^a, R]$ 在近似计算中保持正确的连续极限, 在三阶图近似时, 我们丢掉了 $[E_1^a, R_2][E_1^a, R_2] \dots$, 这些被丢掉的项中既有高阶图也有低阶图。例如: $[E_1^a, \square][E_1^a, R_3]$ 既包含四阶图也有二阶图。文献[3]的截断法保留了被我们丢掉的二阶图, 丢掉四阶图, 这样便破坏了对易子的正确连续极限, 从而造成 μ_0 值没有良好的标度行为。

(2) 么模条件(1)式将低阶图和高阶图混合。例如: $\square = \square + \square$, 在三阶图近似中, 我们丢掉 $[E_1^a, \square][E_1^a, \square] = [E_1^a, \square][E_1^a, (\square + \square)]$ 。上式右边第二项 $[E_1^a, \square][E_1^a, \square]$ 产生的二阶图也被丢掉了。本征方程(4)式中的第一个对易子 $[E_1^a, [E_1^a, R_3]]$ 包含一阶和三阶图。若选 \square 作为独立的三阶图, 则 $[E_1^a, [E_1^a, \square]] = [E_1^a, [E_1^a, \square + \square]] = 9\square - 3\square$ 。反之, 若选 \square 作为独立的三阶图, 则 $[E_1^a, [E_1^a, \square]] = 9\square + 3\square = 9\square - 6\square$ 。可见, 选择连接图或不连接图作为独立基, 将会导致不同结果。经过仔细研究发现, 选取连接图作为独立基的方案, 将会导致 μ_0 有良好的标度行为, 而且显示 $\mu_0(1/g^2)$ 按照 $1/g^2$ 展开的级数收敛, 在 $1/g^2$ 较大时接近一常数。

综上所述, 选取连接图作为真空波函数的独立基, 可能是最好的方案。

参 考 文 献

- [1] Shou-Hong Guo, Qi-Zhou Chen, Lei Li, *Phys. Rev.*, **D49**(1994)507.
- [2] Qi-Zhou Chen, Shuo-Hong Guo, Wei-Hong Zheng, Xi-Yan Fang, *Phys. Rev.*, **D50** No. 3.
- [3] J. P. Greensite, *Nucl. Phys.*, **B166**(1980)113.
- [4] N. J. Watson, *Phys. Lett.*, **B302**(1993)463-471.
- [5] H. Arisue, *Phys. Lett.*, **B280**(1992)85.

Fourth Order Approximate Analytic Calculation of (2+1)-D $SU(2)$ Vacuum Wavefunction

Hui Ping¹ Chen Qizhou²

1(Department of Physics, Guangdong College of Education, Guangzhou 510303)

2(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Received 20 July 1994

Abstract

Considering the arbitrariness for choosing vacuum wavefunction caused by unimodular condition, we replace the disconnected graphs by connected graphs and recalculate the values of μ_0 and μ_2 . The results obtained are very satisfactory.

Key words lattice gauge, analytic calculation, vacuum wavefunction.