第 19 卷 第 6 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 19, No. 6
1995 年 6 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　June, 1995

Berry 联络与吴-杨单极势

沈　月　林[1)]　　　　倪　光　炯
(北京师范大学物理系　北京　100875)　(复旦大学物理系　上海　200433)

1994-04-04 收稿

摘　　要

通过研究一半整数自旋值的中性粒子在球对称磁场中的 Born-Oppenheimer 方程,发现在自旋空间 Berry 联络呈非阿贝尔形式. 在绝热近似下, Berry 联络相当于阿贝尔形式的吴-杨单极场. 由于拓扑的非平庸性,利用纤维丛中截面的概念研究了位形空间的动力学, 发现中心势场中粒子的角动量和能量均取量子化值,但数值发生移动,这是纯几何起源的现象.

关键词　Born-Oppenheimer 方程, Berry 联络, 吴-杨单极势, 纤维丛截面.

1　引　　言

在过去的十年中,几何相得到了广泛而深入的研究. 对一绝热演化体系, Berry[1] 发现了以其命名的相位, Simon[2] 马上指出, Berry 相实际是 Hilbert 空间主丛上的和乐群元, 文献[3—5]将几何相的意义推广到了非阿贝尔, 非绝热甚至非周期性和幺正性的情形.

本文考虑对 Berry 相的发现产生深远意义的 Born-Oppenheimer 方程,这方面两个经典的物理模型是双原子分子[6—8]和自旋轨道体系[9,10], 后者将是我们的研究对象. 文献[9]用代数方法考察了此体系,发现以前的工作并不完备, 但由于其处理方法的物理意义并不清楚,对 Berry 联络的解释存在困难, 一般认为非简并体系诱导的 Berry 联络是阿贝尔的,但文献[9]无法解释其表现形式是非阿贝尔的. 我们采用 Born-Oppenheimer 方程重新考察此模型,发现在整个自旋空间, Berry 联络为非阿贝尔形式, 且非对角的项将诱导一标量势,这两点是一直未被注意的. 在低能近似(绝热近似)下,自旋空间破缺到其瞬时本征态空间,或 $SU(2) \to U(1) \otimes U(1)$, 于是 Berry 联络表现为阿贝尔形式. 由于拓扑的非平庸性,研究此体系的动力学须采用 Wu 和 Yang 发展的波函数的截面概念.

在研究具体的模型之前,先简述一下 Born-Oppenheimer 方程,假如一个体系哈密顿如下

$$H = H_0(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{x}) + h(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}), \tag{1}$$

1) 现地址: 天津南开大学数学所.

其中 H_0 通常指描述体系中的慢变量 $\boldsymbol{x}$，而 h 是描述快变量 $\boldsymbol{r}$，$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{p}$ 分别为 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}$ 的正则动量. 假如态矢可写为如下形式

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = \sum_m \Psi_m(\boldsymbol{x})\chi_m(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}), \tag{2}$$

其中 $\chi_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ 是在固定 $\boldsymbol{x}$ 时，$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$ 的瞬时本征态，那么将得到关于慢变量 $\boldsymbol{x}$ 的态矢 $\Psi_m(\boldsymbol{x})$ 的矩阵值哈密顿. 考虑如下情形.

$$H_0(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2M}\boldsymbol{P}^2 + v(\boldsymbol{x}). \tag{3}$$

体系中快变量 $\boldsymbol{r}$ 可以是位形空间或内部空间的动力学变量. 通过仔细的研究[6]，将得到关于 $\Psi_m(\boldsymbol{x})$ 的本征方程

$$\sum_m \left[\frac{1}{2M}\sum_l(-i\delta_{nl}\nabla x - \boldsymbol{A}_{nl})\cdot(-i\delta_{lm}\nabla x - \boldsymbol{A}_{lm}) + v(\boldsymbol{x})\delta_{mn} + \varepsilon_n(\boldsymbol{x})\delta_{mn}\right]\Psi_m(\boldsymbol{x})$$
$$= E\Psi_n(\boldsymbol{x}). \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{nl} = i\left\langle\chi_n\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right|\chi_l\right\rangle$，而 $\varepsilon_n(\boldsymbol{x})$ 是 $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})$ 的本征方程

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},\boldsymbol{r})\chi_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) = \varepsilon_n(\boldsymbol{x})\chi_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}). \tag{5}$$

方程(4)是一矩阵方程,矩阵元为算符,一般情形很难求解,但在绝热近似下能得到一些明确的结果. 值得一提的是,方程(4)为一精确的方程,它完全等价于方程(1).

2 自旋-轨道体系的 Born-Oppenheimer 方程

在此考虑的模型是[9]

$$H = H_1 + H_2,$$

其中

$$H_1 = \frac{1}{2M}\boldsymbol{p}^2 + v(\boldsymbol{r}), \tag{6}$$

$$H_2 = B\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{7}$$

以上哈密顿描述的是一中性半自旋粒子处于三维空间的磁场中,磁场方向为 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$. 通过以下的论证,发现在低能强磁场下，粒子等价于在一单极背景场中运动. 磁单极在实验和理论上都被深入研究过,虽然一直未被发现,但对研究基础量子力学却有很深的影响,其中尤为 Wu 与 Yang[11] 的工作,上面的模型将简单地实现吴-杨单极场，而其起源完全是几何的,或者说来源于 Berry 联络,而非别的途径.

采用球极坐标,有 $\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$，于是体系(7)的瞬时本征态为

$$\chi_+(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix}, \quad \chi_-(\boldsymbol{n}) = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/2}\end{pmatrix}. \tag{8}$$

上述本征矢实际上可差一任意相位，其相应本征值为 $\pm B$. Berry 联络 1-形式定义为 $A_{ij} = i\left\langle\chi_i\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right|\chi_j\right\rangle\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$，$(i,j = +,-)$，于是有

$$A_{++}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2}\cos\theta d\varphi, \quad A_{+-}(\boldsymbol{n}) = -\frac{1}{2}\sin\theta d\varphi - \frac{i}{2}d\theta,$$

$$A_{-+}(\boldsymbol{n}) = -\frac{1}{2}\sin\theta d\varphi + \frac{i}{2}d\theta, \quad A_{--}(\boldsymbol{n}) = -\frac{1}{2}\cos\theta d\varphi. \tag{9}$$

在球极坐标下,余标架 1-形式为 $\sigma^r = dr$, $\sigma^\theta = r d\theta$, $\sigma^\varphi = r\sin\theta d\varphi$, 而联络 1-形式应为

$$A_{ij} = A_{ijr}\sigma^r + A_{ij}\theta\sigma^\theta + A_{ij\varphi}\sigma^\varphi. \tag{10}$$

比较(9)与(10)式得非零的联络为

$$A_{++\varphi} = \frac{\cos\theta}{2r\sin\theta},$$

$$A_{+-\varphi} = -\frac{1}{2r}, \quad A_{+-\theta} = -\frac{i}{2r},$$

$$A_{-+\varphi} = -\frac{1}{2r}, \quad A_{-+\theta} = \frac{i}{2r},$$

$$A_{--\varphi} = -\frac{\cos\theta}{2r\sin\theta}. \tag{11}$$

不幸的是, $A_{++\varphi}$ 与 $A_{--\varphi}$ 在南北两极点 $(\theta = 0, \pi)$ 处有奇性. 对于此球对称体系,各向同性,这类奇性联络在物理上难以接受. 为看出其本质,注意到量子力学态函数具有 $U(1)$ 不确定性,因而作规范变换如下 $\chi'_\pm(\boldsymbol{n}) = e^{-i\varphi/2}\chi_\pm(\boldsymbol{n})$, 相应于(11)式有

$$A'_{++\varphi} = \frac{1+\cos\theta}{2r\sin\theta}, \quad A'_{--\varphi} = \frac{1-\cos\theta}{2r\sin\theta}. \tag{12}$$

而 $A'_{-+} = A_{-+}, A'_{+-} = A_{+-}$. 我们发现 $A'_{++\varphi}$ 在 $\theta = 0$ 处, $A'_{--\varphi}$ 在 $\theta = \pi$ 处仍有奇性.

再作如下规范变换 $\chi''_\pm(\boldsymbol{n}) = e^{i\varphi/2}\chi_\pm(\boldsymbol{n})$, 得到

$$A''_{++\varphi} = \frac{-1+\cos\theta}{2r\sin\theta}, \quad A''_{--\varphi} = -\frac{1+\cos\theta}{2r\sin\theta}. \tag{13}$$

且 $A''_{+-} = A_{+-}$, $A''_{-+} = A_{-+}$, 现在 $A''_{++\varphi}$ 在 $\theta = \pi$, $A''_{--\varphi}$ 在 $\theta = 0$ 处有奇性.

事实上,采用传统的观念无法克服这个困难. 必须用纤维丛的观念来处理这个体系,这是由于 Berry 联络在此等效为一单极子势. 而在单极子附近的波函数必须采用截面的概念[11]. 其实,(11)—(13)式中 Berry 联络的奇异性均是表观的,究其物理实质是量子化轴的选取破坏了量子力学 $U(1)$ 对称性. 我们发现(11)式正是 Schwinger 势,而(12)和(13)式是 Wu-Yang 的单极子势.

现将本征矢(8)作用到 Pauli 矩阵的表示空间,即使 σ_3 对角化,此时有矩阵值联络 1-形式

$$\begin{aligned} A &= A_\varphi\sigma^\varphi + A_\theta\sigma^\theta \\ &= \frac{1}{2}\cos\theta d\varphi\sigma_3 - \frac{1}{2}\sin\theta d\varphi\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 d\theta. \end{aligned} \tag{14}$$

这里采用的是 Schwinger 势,但不影响物理. 曲率 2-形式由 $F = dA + iA\wedge A$, 有

$$F = -\cos\theta d\theta\wedge d\varphi\sigma_1 - \sin\theta d\theta\wedge d\varphi\sigma_3. \tag{15}$$

在球极坐标中,曲率 2-形式为 $F = F_{\theta\varphi}\sigma^\theta\wedge\sigma^\varphi = F_{\theta\varphi}r^2\sin\theta d\theta\wedge d\varphi$, 于是曲率为

$$F_{\theta\varphi} = -\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\sigma_1 - \frac{1}{r^2}\sigma_3.$$

其分量形式为

$$F_{++\theta\varphi} = -F_{--\theta\varphi} = -F_{++\varphi\theta} = F_{--\varphi\theta} = -\frac{1}{r^2},$$

$$F_{+-\theta\varphi} = F_{-+\theta\varphi} = -F_{+-\varphi\theta} = -F_{-+\varphi\theta} = -\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\theta. \tag{16}$$

发现曲率的对角项随角度无奇性，但非对角项却有奇性，这是值得深究的问题．重要的一点是 Berry 联络在此完全以非阿贝尔形式出现．

利用(4)式，如果整个体系的态函数可写为 $\Psi(t) = \Psi_+(t)\chi_+ + \Psi_-(t)\chi_-$，那么关于 $\Psi_\pm(t)$ 的方程如下

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi_+(t)\\ \Psi_-(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}H_{++} & H_{+-}\\ H_{-+} & H_{--}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_+(t)\\ \Psi_-(t)\end{pmatrix} \tag{17}$$

其中 H_{ij} 如下

$$H_{++} = \frac{1}{2M}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}_{++})^2 + \frac{1}{2M}\boldsymbol{A}_{+-}\cdot\boldsymbol{A}_{-+} + v(\boldsymbol{r}) + B$$

$$H_{--} = \frac{1}{2M}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}_{--})^2 + \frac{1}{2M}\boldsymbol{A}_{+-}\cdot\boldsymbol{A}_{-+} + v(\boldsymbol{r}) - B$$

$$H_{+-} = -\frac{1}{2M}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}_{++})\cdot\boldsymbol{A}_{+-} - \frac{1}{2M}\boldsymbol{A}_{+-}\cdot(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}_{--})$$

$$H_{-+} = -\frac{1}{2M}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}_{--})\cdot\boldsymbol{A}_{-+} - \frac{1}{2M}\boldsymbol{A}_{-+}\cdot(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}_{++}) \tag{18}$$

假如磁场 B 足够强，而粒子运动足够慢，那么可使用 Born-Oppenheimer 近似，此时(17)式中的非对角无 H_{+-} 与 H_{-+} 可略去，也即 Ψ_+ 与 Ψ_- 间的跃迁可忽略．由于 Ψ_+ 与 Ψ_- 的讨论是一样的，故仅讨论 $\Psi_+(t)$．在(18)式的 H_{++} 与 H_{--} 中，有一项 $\boldsymbol{A}_{+-}\cdot\boldsymbol{A}_{-+}$ 将提供一标量势，文献中一直未注意．

3　吴-杨单极场中的波函数

为解 H_{++}，采用文献[12]的办法，这是由于 A_{++} 关于角度有奇性，取吴-杨的单极子势(12)和(13)式则可回避这个问题，其代价是传统的波函数应以波函数截面来取代，详细的讨论见文献[11,12]，但在此不得不重述一些内容以至完整．现在原点外的区域分为 R_a, R_b：

$$R_a:\ 0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}\pi + \delta,\ 0 < r,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$R_b:\ \frac{1}{2}\pi - \delta < \theta \leqslant \pi,\ 0 < r,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,$$

$$R_{ab}:\ \frac{1}{2}\pi - \delta < \theta < \frac{1}{2}\pi + \delta,\ 0 < r,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{19}$$

这里 $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}\pi$.

在我们的情形,非零矢势为

$$(A_\varphi)_a=\frac{-1+\cos\theta}{2r\sin\theta},$$
$$(A_\varphi)_b=\frac{1+\cos\theta}{2r\sin\theta},\tag{20}$$

其中

$$(A_\mu)_a=(A_\mu)_b+\mathrm{i}S_{ab}\frac{\partial S_{ab}^{-1}}{\partial x^\mu}.\tag{21}$$

这里 $S=S_{ab}=\mathrm{e}^{-i\varphi}$ 是 R_a 和 R_b 两区域中波函数截面的转换函数,也即

$$\Psi_a=S_{ab}\Psi_b=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\Psi_b.\tag{22}$$

可见体系等效地处于原点有一磁荷 $q=-\frac{1}{2}$ 的单极场中.

假设 $v(\boldsymbol{r})$ 是球对称的,且除 $r=0$ 外无奇性,则 $\Psi_+(t)$ 满足

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_+(t)=\frac{1}{2M}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{A}_{++})^2\Psi_+(t)+\frac{1}{4Mr^2}\Psi_+(t)\\+v(r)\Psi_+(t)+B\Psi_+(t)\end{aligned}\tag{23}$$

为解此体系先定义

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{A}_{++})+\frac{\boldsymbol{r}}{2r}\tag{24}$$

易证

$$[\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}]=\mathrm{i}\boldsymbol{L},\tag{25}$$

即 $\boldsymbol{L}$ 构成角动量算符,由于 $[r^2,\boldsymbol{L}]=0$, 选择坐标表象,先研究 $\boldsymbol{L}$, 可证明 $[L^2,L_z]=0$, 即 L^2 和 L_z 可同时对角化,其共同本征函数为

$$L^2Y_{-\frac{1}{2},l,m}=l(l+1)Y_{-\frac{1}{2},l,m},L_3Y_{-\frac{1}{2},l,m}=mY_{-\frac{1}{2},l,m}.\tag{26}$$

这里 $l=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\cdots,\ m=-l,-l+1\cdots l,\ Y_{-\frac{1}{2},l,m}$ 称为单极谐和函数,满足

$$mY_{-\frac{1}{2},l,m}=L_zY_{-\frac{1}{2},l,m}=\left(-\mathrm{i}\partial\varphi+\frac{1}{2}\right)Y_{-\frac{1}{2},l,m}\quad(\text{在 }R_a),$$
$$mY_{-\frac{1}{2},l,m}=L_zY_{-\frac{1}{2},l,m}=\left(-\mathrm{i}\partial\varphi-\frac{1}{2}\right)Y_{-\frac{1}{2},l,m}\quad(\text{在 }R_b).\tag{27}$$

可证明

$$Y_{-\frac{1}{2},l,m}=\Theta_{-\frac{1}{2},l,m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-\frac{1}{2})\varphi}\quad(\text{在 }R_a),$$
$$Y_{-\frac{1}{2},l,m}=\Theta_{-\frac{1}{2},l,m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(m+\frac{1}{2})\varphi}\quad(\text{在 }R_b).\tag{28}$$

其中 $\Theta_{-\frac{1}{2},l,m}=\Theta_{-\frac{1}{2},l,m}(\theta)$ 满足

$$\begin{aligned}\left[l(l+1)-\frac{1}{4}\right]\Theta_{-\frac{1}{2},l,m}=\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\left(m-\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2\right]\\\times\Theta_{-\frac{1}{2},l,m}.\end{aligned}\tag{29}$$

此方程的明确解可在文献[12]中找到, $Y_{-\frac{1}{2},l,m}$ 构成了截面的角向部分的完全集,为解方

程(23)，首先，有

$$(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{A}_{++})^2=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\boldsymbol{L}^2-\frac{1}{4}\right] \tag{30}$$

如写

$$\Psi_+(t)=R(r)Y_{-\frac{1}{2},l,m}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(E+B)t}, \tag{31}$$

则得到关于 $R(r)$ 的本征方程

$$\left[-\frac{1}{2Mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{l(l+1)+\frac{1}{4}}{2Mr^2}+v(r)-E\right]R(r)=0. \tag{32}$$

4 Berry 联络诱导的谐振子

为看清 Berry 联络对物理结果的影响，可以考察不同的势 $v(r)$，在此举一最简单的例子，$v(r)=\frac{1}{2}M\omega^2r^2$，此时 $R(r)$ 的方程变为

$$R''+\frac{2}{r}R'+\left(k^2-\alpha^4r^2-\frac{l(l+1)+\frac{1}{4}}{r^2}\right)R=0 \tag{33}$$

此处 l 取半整数值，与通常的谐振子不同，而 $\alpha^2=M\omega$，$k^2=2\alpha^2E/\omega$. 如记 $l(l+1)+\frac{1}{4}=\nu_l(\nu_l+1)$，这里仅需正根 $\nu_l=\frac{-1+\sqrt{4l(l+1)+2}}{2}$，由于我们的讨论限于低激发态，因而 Berry 联络诱导的标量势效应是明显的.

考察 $R(r)$ 的渐近行为有

$$R(r)=r^{\nu_l}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2r^2}u(r), \tag{34}$$

其中 $u(r)$ 满足

$$u''+\frac{2}{r}(\nu_l+1-\alpha^2r^2)u'+[k^2-2\alpha^2(\nu_l+3/2)]U=0 \tag{35}$$

通过变量替换 $\zeta=\alpha^2r^2$，$s=K^2/2\alpha^2=E/\omega$，得 u 的方程

$$\zeta\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\zeta^2}+\left[\left(\nu_l+\frac{3}{2}\right)-\zeta\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\zeta}+\left(\frac{s}{2}-\frac{\nu_l+3/2}{2}\right)u=0. \tag{36}$$

其解为合流超几何函数

$$u=F\left(\frac{1}{2}\left(\nu_l+\frac{3}{2}-s\right),\quad \nu_l+\frac{3}{2},\ \zeta\right). \tag{37}$$

根据渐近条件，(37)式中 U 关于 ζ 的级数必须截断，从而得能量量子化条件

$$\frac{1}{2}\left(\nu_l+\frac{3}{2}-s\right)=-n_r,\quad n_r=0,1,2\cdots.$$

或能谱为

$$E=E_{n_r\nu_l}=\left(2n_r+\nu_l+\frac{3}{2}\right)\omega. \tag{38}$$

尽管能量仍取量子化值,但其谱值作非线性分布,其基态为 $E_{0\frac{1}{2}}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{3}{2}\right)\omega$, Berry 联络的效应相当于给粒子提供了一个排斥势,从而能谱仅上移,基态增加了 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\omega$. 同样的现象在双原子分子也被论证过[8]. 虽然本文讨论的体系被深为研究,只有在具体的物理体系中找到其应用,本文的结论将是极有意义的.

5 讨 论

(1) 在非简并体系中, Berry 联络一直被视作 Abel 联络,通过本文的论述发现,在一般情形,其形式表现为非 Abel 的,原因是非对角的 Berry 联络往往被忽略.

(2) 由于 Berry 联络的作用相当于一单极子加一标量势,因而角动量取半整数量子化值,且能谱呈非线性排列,这种现象的解释是 Born-Oppenheimer 近似破缺了自旋的 $SU(2)$ 对称性,从而自旋转化成为轨道角动量,有趣的是(6),(7)两式中轨道角动量并不出现于哈密顿中.

(3) Berry 联络与吴-杨单极场的统一说明拓扑特性在量子力学中的深刻意义.

(4) 可以考察不同的中心势,特别如 $v(r)=0$, 将是一散射问题,采用文献[13]的办法,可计算出由 Berry 联络引起的散射截面.

参 考 文 献

[1] M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. Lond*, **A392**(1984) 45.
[2] B. Simon, *Phys. Rev. Lett*, **51**(1983) 2167.
[3] F. Wilczeck, A. Zee, *Phys. Rev. Lett*, **52**(1984) 2111.
[4] Y. Aharonov, J. Anandan, *Phys. Rev. Lett*, **58**(1987) 1593.
[5] J. Samuel, R. Bhandri, *Phys. Rev. Lett*, **60**(1988) 2339.
[6] M. Born, J. R. Oppenheimer, *Ann. Physik*, **84**(1927) 457.
[7] J, Moody, et al, *Phys. Rev. Lett*, **56**(1986) 893.
[8] A. Bohm. et. al, *J. Math. Phys*, **33**(1992) 977.
[9] Y. Aharonov. et al, *Phys. Rev. Lett*, **65**(1990) 3065.
[10] Y. Aharonov, A. Stern, *Phys. Rev. Lett*, **69**(1992) 3593.
[11] T. T. Wu, C. N. Yang, *Phys. Rev*, **D12**(1975) 3845.
[12] T. T. Wu, C. N. Yang, *Nucl. Phys*, **B107**(1976) 365.
[13] Y. Kazama, et al, *Phys. Rev*, **D15**(1977) 2287.

Berry's Connection and Wu-Yang's Monopole Potential

Shen Yuelin
(*Physics Department, Beijing Normal University, Beijing* 100875)

Ni Guangjiong
(*Physics Department, Fudan University, Shanghai* 200433)

Received 4 April 1994

Abstract

By studying the Born-Oppenheimer equation for a neutral spin-1/2 particle moving in a spherically symmetrical magnetic field, the non-Abelian Berry's connection in the internal space is found. In the adiabatic approximation, it displays the role of Wu-Yang's monopole. The dynamics for the configurational space is studied by using the concept of section in fibre bundle. Though the angular momentum and energy are quantized, their values are moved. The origination of this phenomenon is geometrical.

Key words Born-Oppenheimer equation, Berry's connection, Wu-Yang's potential of monopole, sections of fibre bundle.