第19卷第11期
1995年11月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.19, No.11
Nov., 1995

动力系统的正则量子对称性质*

李 子 平[1)]

(北京工业大学应用物理系 北京 100022)

1994-11-28 收稿

摘 要

分别从正规和奇异拉氏量系统的相空间生成泛函出发，导出了增广相空间中整体对称下的正则形式Ward恒等式. 考虑对应的定域变换，得到了量子水平的守恒荷，给出了正则形式的量子Noether定理. 讨论了在核子和π介子相互作用中的初步应用.

关键词 约束系统的Dirac理论，生成泛函，Ward 恒等式，Noether定理.

1 引 言

在动力系的经典理论中，对称性和守恒律的联系通常是由Noether定理给出的. 传统的讨论均是通过位形空间中的变量来表述. 近来研究了相空间中正则形式的Noether定理并给出了应用[1,2]. 在动力系的量子理论中，路径积分量子化有其显著的优点(特别是对非Abel规范场)，由它可方便地导出理论的Feynman规则，证明理论的规范无关性和么正性等等[3,4]. 从Green函数的生成泛函导出理论的Feynman规则和Ward恒等式，通常也是在位形空间中来讨论的[5,6]. 它仅适用于对正则动量的路径积分为Gauss型的情形. 当相空间生成泛函对动量的路径积分不能简单地被积出，化为用拉氏量(或有效拉氏量)表达的位形空间生成泛函时，其相空间中定域变换下正则形式的Ward恒等式已经给出[7-9]. 这里着重研究正规和奇导拉氏量系统正则形式的整体对称性质，建立量子水平的正则形式Ward恒等式和Noether定理.

在本文的第2节中，基于正规拉氏量系统Green函数的相空间生成泛函在积分变量变换下的不变性，考虑增广相空间中保持系统正则作用量不变的整体对称变换，导出了相应正则形式的Ward恒等式. 在第3节中，将该整体对称变换定域化，从相空间生成泛函在此定域变换下的不变性，导出了正规系统正则形式的量子Noether定理. 在第4节中，将上述结果推广到奇异拉氏量系统. 用奇异拉氏量描述的系统，在相空间中为约束Hamilton系统[4]. 所有定域不变的系统均属于此种类型. 从奇异拉氏量系统Green函数的相空间生成泛函出发，在增广相空间中保持有效正则作用量不变的整体变换下，仍导出了奇异拉氏量系统正则形式的Ward恒等式和正则形式的量子Noether定理，得

---

* 国家自然科学基金和北京市自然科学基金资助.

1) CCAST 成员.

到了系统的量子守恒荷(无反常情形). 与正规拉氏量系统不同, 量子守恒荷的存在不仅需要求变换保持正则作用量不变, 而且还需要求约束在变换下不变等等. 可见经典理论中对称性所联系的守恒荷, 在量子理论中不一定再保持. 在第 5 节中讨论了在 $\pi-N$ 赝标耦合理论中的初步应用.

2　整体对称性和正则Ward 恒等式

设场 $\varphi(x)$的拉氏量密度为 $\mathscr{L}(\varphi, \varphi_{,\mu})$, $\varphi_{,\mu}=\partial_\mu\varphi=\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi$, $x=(t, \vec{x})$. 平坦时空度规为 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(+---)$. 场 $\varphi(x)$的正则动量为 $\pi(x)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}(x)$. 为明确起见, 在第 2 节和第 3 节中先讨论正规拉氏量系统, 第 4 节以后再研究奇异拉氏量系统. 对于正规拉氏量描述的系统, 其 Hess 矩阵非退化[4], 场的正则 Hamilton 量

$$H_c[\varphi, \pi]=\int d^3x\mathscr{H}_c=\int d^3x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{L})$$

是独立变量φ, π 的泛函. 采用路径积分量子化, 在路径积分中不仅经典"轨道"是允许的, 而且其他一切可能"轨道"也是允许的, 只是各自有不同的权重. 系统的量子跃迁幅一般由 Hamilton 量给出. 我们对正则变量 $\varphi(x)$和 $\pi(x)$分别引入外源 $J(x)$和 $K(x)$, 那么相空间 Green 函数的生成泛函为[7,8]

$$Z[J, K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\{i[I^p+\int d^4x(J\varphi+K\pi)]\},\tag{1a}$$

其中

$$I^p=\int d^4x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c),\tag{1b}$$

为系统的正则作用量. Green 函数是生成泛函对外源 $J(x)$求多次泛函微商后, 再让外源 $J=K=0$ 来确定的. 对正则动量引入外源, 不影响对 Green 函数的计算. 量子系统的信息完全由生成泛函(1)所确定. 当生成泛函(1a)式对动量的积分为 Gauss 型时, 可作出对正则动量的路径积分, 将其化为位形空间生成泛函, 其位形空间中的有效拉氏量可能与原始拉氏量不同(体现了量子效应). 传统的关于 Ward 恒等的讨论, 就是通过位形空间变量来表达的. 当相空间生成泛函(1a)对动量的路径积分不能积出时, 或积分很复杂难于积出时, 在相空间中来分析系统的正则对称性质就尤为重要.

先考虑系统在增广相空间中整体对称变换下的性质, 其无穷小变换为

$$\begin{cases} x^{\mu\prime}=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma\tau^{\mu\sigma}, \\ \varphi'(x')=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_\sigma S^\sigma\varphi(x), \\ \pi'(x')=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+\varepsilon_\sigma U^\sigma\pi(x), \end{cases}\tag{2}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(\sigma=1, 2, \cdots, r)$为无穷小参数, $\tau^{\mu\sigma}$, S^σ 和 U^σ 为 x, φ, π 的函数. 变换(2)式包括了时空对称群和内部对称群的变换. 在(2)式变换下, 正则作用量(1a)的变分为[4]

$$\begin{aligned}\delta I^p&=\int d^4x\left\{\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}\delta\varphi+\frac{\delta I^p}{\delta\pi}\delta\pi+\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c)\Delta x^\mu]+D(\pi\delta\varphi)\right\}\\&=\int d^4x\varepsilon_\sigma\left\{\frac{\delta I^p}{\delta\varphi}(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\frac{\delta I^p}{\delta\pi}(U^\sigma\pi-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\right.\end{aligned}$$

$$+\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_c)\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\},\tag{3}$$

其中

$$\delta\varphi=\Delta\varphi-\varphi_{,\mu}\Delta x^\mu,\quad \delta\pi=\Delta\pi-\pi_{,\mu}\Delta x^\mu,\tag{4}$$

$$\frac{\delta I^P}{\delta\varphi}=-\dot{\pi}-\frac{\delta H_c}{\delta\varphi},\quad \frac{\delta I^P}{\delta\pi}=\dot{\varphi}-\frac{\delta H_c}{\delta\pi},\tag{5}$$

而 $\mathrm{D}=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$. 假设变换(2)的 Jacobi 行列式为 1 (例如，内部空间中的幺正群变换). 相空间生成泛函(1a)式在(2)式变换下是不变的，于是有

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp(\mathrm{i}\{I^P+\delta I^P+\int\mathrm{d}^4x[J\varphi+K\pi+\varepsilon_\sigma J(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})$$
$$+\varepsilon_\sigma K(U^\sigma\pi-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\varepsilon_\sigma\partial_\mu((J\varphi+K\pi)\tau^{\mu\sigma})]\}).\tag{6}$$

如果在(2)式变换下，正则作用量 I^P 不变，由(6)式，得

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\{\mathrm{i}[I^P+\int\mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)]\}$$
$$\cdot(1+\mathrm{i}\varepsilon_\sigma\int\mathrm{d}^4x\{J(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+K(U^\sigma\pi-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\partial_\mu[(J\varphi+K\pi)\tau^{\mu\sigma}]\})$$
$$=\left(1+\mathrm{i}\varepsilon_\sigma\int\mathrm{d}^4x\left\{J\left(S^\sigma\frac{\delta}{\delta J}-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J}\right)+K\left(U^\sigma\frac{\delta}{\delta K}-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta K}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\delta J}+K\frac{\delta}{\delta K}\right)\right]\right\}\right)\Bigg|_{\substack{\varphi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}}Z[J,K].\tag{7}$$

这样我们就得到：系统在增广相空间整体对称变换(2)式下，当变换的 Jacobi 行列式为 1 时，其相空间生成泛函应满足如下方程

$$\int\mathrm{d}^4x\left\{J\left(S^\sigma\frac{\delta}{\delta J}-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta J}\right)+K\left(U^\sigma\frac{\delta}{\delta K}-\tau^{\mu\sigma}\partial_\mu\frac{\delta}{\delta K}\right)\right.$$
$$\left.+\partial_\mu\left[\tau^{\mu\sigma}\left(J\frac{\delta}{\delta J}+K\frac{\delta}{\delta K}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\varphi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta J}\\ \pi\to\frac{\delta}{\mathrm{i}\delta K}}}Z[J,K]=0.\tag{8}$$

$(\sigma=1,2,\cdots,r)$

(8)式可称为系统整体对称下的相空间广义 Ward 恒等式. 对广义 Ward 恒等式(8)关于外源 $J(x)$ 求多次泛函微商，然后让外源 $J=K=0$，就可导出 Green 函数间的一些关系式.

3 量子守恒荷

对称性和守恒律的联系在经典理论中通常由 Noether 定理给出. 这里我们来导出量子理论中相空间中的 Noether 定理. 我们仍假设系统具有整体变换(2)式下的对称性，即正则作用量(1b)式在(2)式变换下不变. 将变换(2)式定域化，即把 ε_σ 视为时空点的函数. 考虑如下定域变换

$$\begin{cases}x^{\mu\prime}=x^\mu+\Delta x^\mu=x^\mu+\varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma},\\ \varphi'(x')=\varphi(x)+\Delta\varphi(x)=\varphi(x)+\varepsilon_\sigma(x)S^\sigma\varphi(x),\\ \pi'(x')=\pi(x)+\Delta\pi(x)=\pi(x)+\varepsilon_\sigma(x)U^\sigma\pi(x),\end{cases}\tag{9}$$

其中 $\varepsilon_\sigma(x)(\sigma=1, 2, \cdots, r)$为无穷小任意函数，它们及其微商在四维时空区域的边界上为零．在(9)式变换下，正则作用量(1b)的变分为

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4 x\varepsilon_\sigma(x)\left\{\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\varphi}(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+\frac{\delta I^{\mathrm{p}}}{\delta\pi}(U^\sigma\pi-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\right.$$
$$\left.+\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\right\}$$
$$+\int \mathrm{d}^4x\{[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]\partial_\mu\varepsilon_\sigma(x)+\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\mathrm{D}\,\varepsilon_\sigma(x)\}. \tag{10}$$

由于正则作用量(1b)在整体变换(2)下不变，因而(10)式中的第一个积分为零．根据 $\varepsilon_\sigma(x)$的边界条件，(10)式又可写为

$$\delta I^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\{[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]\,\partial_\mu\varepsilon_\sigma(x)+\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\,\mathrm{D}\varepsilon_\sigma(x)\}$$
$$=-\int \mathrm{d}^4x\varepsilon_\sigma(x)\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}. \tag{11}$$

生成泛函(1a)在(9)式变换下的不变性，有

$$Z[J,K]=\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+J\varphi+K\pi]\}$$
$$\cdot(1-\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\varepsilon_\sigma(x)\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]$$
$$+J(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})+K(U^\sigma\pi-\pi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})\}$$
$$+\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\partial_\mu[(J\varphi+K\pi)\varepsilon_\sigma(x)\tau^{\mu\sigma}]). \tag{12}$$

对(12)式关于 $\varepsilon_\sigma(x)$求泛函微商，然后让 $J=K=0$，得

$$\int\mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}$$
$$\cdot\exp\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\}=0, \tag{13}$$

从而

$$\langle 0|\mathrm{T}^*\{\partial_\mu[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]+\mathrm{D}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]\}|0\rangle=0, \tag{14}$$

其中 $|0\rangle$代表场的基态，T^*为一种特定形式的编时乘积[5]．(14)式又可写为

$$\partial_\mu\langle 0|\mathrm{T}[(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{c}})\tau^{\mu\sigma}]|0\rangle+\mathrm{D}\langle 0|\mathrm{T}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,\mu}\tau^{\mu\sigma})]|0\rangle=0. \tag{15}$$

在四维时空中取一柱体，柱轴沿 t 轴方向，下底 V_1 代表 $t=t_1$ 的超平面，上底 V_2 代表 $t=t_2$ 的超平面．在此四维柱体上对(15)式积分，并让柱侧面趋于无穷远．利用四维 Gauss 定理以及柱侧面趋于无穷时场在其上为零的条件，得

$$\int_V \mathrm{d}^3x\langle 0|\mathrm{T}[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}\tau^{0\sigma}]|0\rangle=\mathrm{const}\quad(\sigma=1, 2, \cdots, r). \tag{16}$$

这样我们就得到了相空间中量子情形下的 Noether 定理：假如系统的正则作用量(1b)在增广相空间中的变换(2)下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么该系统必存在守恒量(16)．这个守恒量恰为经典相空间 Noether 定理[1] 的量子理论表述，它表明在增广相空间具有整体对称性的系统，其守恒量算符在基态的期望值为常数．对无反常的系统，此结论成立．从相空间对称性的分析出发，导出上述守恒量(16)的突出优点在于勿需作出相空间生成泛函中对动量的路径积分．

4　奇异拉氏量系统

用奇异拉氏量 $\mathscr{L}(\psi^\alpha, \psi^\alpha_{,\mu})(\alpha=1, 2, \cdots, n)$描述的系统，其 Hess 矩阵是退化的[4]．过渡到正则形式描述时，在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统[4]．

设 $\Lambda_k(\psi^\alpha, \pi_\alpha)\approx 0\ (k=1, 2, \cdots, K_0)$为系统的第一类约束，$\theta_i(\psi^\alpha, \pi_\alpha)\approx 0\ (i=1, 2, \cdots, I_0)$为系统的第二类约束. 在约束 Hamilton 的路径积分量子化理论中，相应于每一个第一类约束，须选取适当的规范条件. 设与第一类约束相应的规范条件为 $\Omega_k(\psi^\alpha, \pi_\alpha)\approx 0\ (k=1, 2, \cdots, K_0)$. 对场量 ψ^α 和它的正则动量 π_α 分别引入外源 J_α 和 K^α，那么奇异拉氏量系统 Green 函数的相空间生成泛函为[7,8]

$$Z[J, K, \xi, \overline{\eta}, \eta, \overline{\zeta}, \zeta]=\int \mathscr{D}\psi^\alpha \mathscr{D}\pi_\alpha \mathscr{D}\lambda_m \mathscr{D}C^\alpha \mathscr{D}\overline{C}^\alpha \mathscr{D}p_\alpha \mathscr{D}\overline{p}_\alpha$$
$$\cdot\exp\{\mathrm{i}[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J_\alpha\psi^\alpha+K^\alpha\pi_\alpha+\xi^m\lambda_m+\overline{\eta}_\alpha C^\alpha+\overline{C}^\alpha\eta_\alpha+\overline{\zeta}^\alpha p_\alpha+\overline{p}_\alpha\zeta^\alpha)]\}, \tag{17a}$$

其中 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 为有效正则作用量，

$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x\{\pi_\alpha\dot{\psi}^\alpha-\mathscr{H}_{\mathrm{c}}+\lambda_i\theta_i+\lambda_k\Lambda_k+\lambda_l\Omega_l$$
$$+\int \mathrm{d}^4y[\overline{C}_k(x)\{\Lambda_k(x), \Omega_1(y)\}C_1(y)+\frac{1}{2}\overline{C}_i(x)\{\theta_i(x),\theta_j(y)\}C_j(y)]\}, \tag{17b}$$

$\lambda_m(x)=(\lambda_i(x), \lambda_k(x), \lambda_l(x))$，$\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 为场相应的正则 Hamilton 量密度，$p_\alpha(x)$和$\overline{p}_\alpha(x)$分别为鬼场 $C^\alpha(x)$和$\overline{C}^\alpha(x)$的正则动量，$\{\ ,\ \}$为场的 Poisson 括号. 为简化记号，令 $\varphi=\{\psi^\alpha, \lambda_m, C^\alpha, \overline{C}^\alpha)$，$\pi=(\pi_\alpha, p_\alpha, \overline{p}_\alpha)$，$\varphi$ 的外源记为 $J=(J^\alpha, \xi^m, \overline{\eta}_\alpha, \eta_\alpha)$，$\pi$ 的外源为 $K=(K^\alpha, \overline{\zeta}^\alpha, \zeta^\alpha)$. 这样 (17)式可简写为

$$Z[J, K]=\int \mathscr{D}\varphi\mathscr{D}\pi\exp\{\mathrm{i}[I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}+\int \mathrm{d}^4x(J\varphi+K\pi)]\}, \tag{18a}$$
$$I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}=\int \mathrm{d}^4x(\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}). \tag{18b}$$

与第 2 节和第 3 节中完全类似的讨论，可以得到：如果有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 在增广相空间中的整变换 (如 (2)式那样)下不变，且变换的 Jacobi 行列式为 1，那么奇异拉氏量系统的相空间生成泛函仍满足相空间的广义 Ward 恒等式 (8)，并且存在相应的守恒荷：

$$\int_V \mathrm{d}^3x\langle 0|T[\pi(S^\sigma\varphi-\varphi_{,k}\tau^{k\sigma})-\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}\tau^{0\sigma}]|0\rangle=\mathrm{const}. \tag{19}$$
$$(\sigma=1, 2, \cdots, r)$$

值得注意的是 (19)式中出现的是 $\mathscr{H}_{\mathrm{eff}}$ 与 (16)式中的 $\mathscr{H}_{\mathrm{c}}$ 是不同的. 在内部对称变换下(如么正变换)，$\tau^{\mu\sigma}=0$，(16)式和 (19)式在形式上才一样. 在整体变换下保持系统有效正则作用量不变，不仅需要保持正则作用量不变，而且还需要保持约束不变等等，且变换的 Jacobi 行列式为 1，才能保证守恒荷 (19)式的存在，这些都与正规拉氏量系统不同. 从上面得到的结果我们还看到：经典理论中的对称所联系的守恒量在量子理论中不一定再保持，因为经典的整体正则对称变换保持了正则作用量 I^{p} 不变，它不定能保持量子化后的有效正则作用量 $I_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{p}}$ 不变，且该变换的 Jacobi 行列式也不一定为 1. 但是在某些情形下，经典正则对称性和它所对应的守恒量在量子理论中仍然是保持的. 例如，对仅含第二类约束 θ_i 的系统，当$\{\theta_i, \theta_j\}$与场量无关时，在此情形下可将因子 $\det|\{\theta_i, \theta_j\}|$ 从生成泛函中略去，而勿需引入鬼场 $C^\alpha(x)$，$\overline{C}^\alpha(x)$，如果在场量的内部对称变换下(乘子场不改变)，系统的正则作用量和约束条件均不变，那么，由 (19)式可见，经典正则形式守恒量[1] 在量子理论中仍然是保持的 (无反常情形).

5 π－N 赝标耦合

核子和 π 介子赝标耦合的拉氏量密度为

$$\mathscr{L}(x)=\overline{\psi}(x)(\mathrm{i}\gamma_\mu\partial^\mu-m)\psi(x)-\frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi(x))^2-\frac{1}{2}\mu^2(\varphi(x))^2$$
$$-\frac{\lambda}{4!}(\varphi(x))^4-\mathrm{i}g\overline{\psi}(x)\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}(x)\psi(x), \tag{20}$$

其中 $\psi(x)$ 为同位旋量

$$\psi(x)=\begin{pmatrix}\psi_\mathrm{p}(x)\\ \psi_\mathrm{n}(x)\end{pmatrix}, \tag{21}$$

$\varphi(x)$ 为同位矢量

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \varphi_3(x)\end{pmatrix},\ \varphi^{\pm}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x)\pm\mathrm{i}\varphi_2(x)),\ \varphi_0(x)=\varphi_3(x) \tag{22}$$

$\vec{\tau}$ 为同位旋矩阵．标积和矢积均是在同位旋空间中施行的．

场 $\psi(x)$，$\overline{\psi}(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的正则共轭动量分别为

$$\pi_\psi(x)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\psi}(x)=\mathrm{i}\overline{\psi}(x)\gamma_0, \tag{23}$$
$$\pi_{\overline{\psi}}(x)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\overline{\psi}}(x)=0, \tag{24}$$
$$\pi(x)=\partial\mathscr{L}/\partial\dot{\varphi}(x)=\dot{\varphi}(x). \tag{25}$$

系统的正则 Hamilton 量密度为

$$\mathscr{H}_\mathrm{c}(x)=\pi_\psi(x)\dot{\psi}(x)+\pi_{\overline{\psi}}(x)\dot{\overline{\psi}}(x)+\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\mathscr{L}(x)$$
$$=\frac{1}{2}(\pi^2+\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi+\mu^2\varphi^2)+\frac{\pi}{4!}\varphi^4+\frac{1}{2}\pi_\psi\gamma^0\gamma_k(\partial^k\psi)$$
$$-\frac{1}{2}(\partial^k\pi_\psi)\gamma^0\gamma_k\psi-im\pi_\psi\gamma^0\psi+g\pi_\psi\gamma^0\gamma_5\vec{\tau}\cdot\vec{\varphi}\psi. \tag{26}$$

初级约束为

$$\Phi_1^0=\pi_\psi-\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma_0\approx 0, \tag{27}$$
$$\Phi_2^0=\pi_{\overline{\psi}}\approx 0. \tag{28}$$

总 Hamilton 量为

$$H_\mathrm{T}=\int\mathrm{d}^3x(\mathscr{H}_\mathrm{c}+\lambda_1\Phi_1^0+\lambda_2\Phi_2^0). \tag{29}$$

初级约束的自洽性条件：

$$\{\Phi_i^0,\ H_\mathrm{T}\}\approx 0\quad(i=1,\ 2) \tag{30}$$

给出拉氏乘子 $\lambda_1(x)$ 和 $\lambda_2(x)$ 适合的方程，不导致新的次级约束．Φ_1^0 和 Φ_2^0 为第二类约束，它们的 Poisson 括号 $\{\Phi_1^0,\ \Phi_2^0\}$ 与场量无关，其行列式 $\det|\{\Phi_1^0,\ \Phi_2^0\}|$ 可从生成泛函中略去，勿需引入鬼场 $C^\alpha(x)$ 和 $\overline{C}^\alpha(x)$．系统的有效正则作用量为

$$I_\mathrm{eff}^\mathrm{P}=\int\mathrm{d}^4x[\pi_\psi\dot{\psi}+\pi_{\overline{\psi}}\dot{\overline{\psi}}+\pi\dot{\varphi}-\mathscr{H}_\mathrm{c}-\lambda_1\Phi_1^0-\lambda_2\Phi_2^0]. \tag{31}$$

此有效正则作用量 (31) 在下列相空间中内部变换

$$\psi_\mathrm{p}(x)\to \mathrm{e}^{-\mathrm{i}e\theta}\psi_\mathrm{p}(x),\ \pi_\mathrm{p}(x)\to \mathrm{e}^{+\mathrm{i}e\theta}\pi_\mathrm{p}(x),$$
$$\psi_\mathrm{n}(x)\to\psi_n(x),\ \pi_\mathrm{n}(x)\to\pi_n(x), \tag{32}$$
$$\varphi^{\pm}(x)\to \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}e\theta}\varphi^{\pm}(x),\ \pi^{\pm}(x)\to \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}e\theta}\pi^{\pm}(x)$$

下是不变的，其中 θ 为参数．即系统的正则作用量和约束 Φ_1^0，Φ_2^0 在(32)式变换下均是不变的．由 (19) 式，得

$$Q=e\int\mathrm{d}^3x\langle 0|T[\overline{\psi}_\mathrm{p}\gamma^0\psi_\mathrm{p}+(\vec{\varphi}\times\vec{\pi})_3]|0\rangle=\mathrm{const} \tag{33}$$

(33)式为电荷守恒的量子表述形式.

值得指出的是：传统的由位形空间生成泛函出发，用泛函积分方法导出守恒流以及矢量流和轴矢流之间的关系等等，常常忽视了对约束的处理[5]. 文献[5]中所讨论的拉氏量，实际上是奇异拉氏量，系统在相空间中存在约束. 应该按约束 Hamilton 系统理论来实现量子化，如何将其化为位形空间中的生成泛函，不作任何说明而忽略对约束的讨论不能认为是严格的.

参 考 文 献

[1] Ziping Li, *Int. J. Theor. Phys.*, **32** (1993) 201.

[2] 李子平，中国科学，**A9** (1992) 977.

[3] G. Costa, M. Tonin, *Riv. Nuovo Cim.*, **5** (1975) 29.

[4] 李子平，"经典和量子约束系统及其对称性质"，北京工业大学出版社，1993年.

[5] H. Suura, B. L. Young, *Phys. Rev.*, **D8** (1973) 4353.

[6] T. Lhallabi, *Int. J. Theor. Phys.*, **28** (1989) 875.

[7] Ziping Li, *Acta Physica Sinica (Overseas Edition)*, **3** (1994) 481.

[8] 李子平，高能物理与核物理，**17** (1994) 693.

[9] Ziping Li, *Europhys. Lett.*, **27** (1994) 563.

Canonical Quantal Symmetry in a Dynamical System

Li Ziping

(*Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing* 100022)

Received 28 November 1994

Abstract

Starting from phase-space generating functional for the system with regular and singular Lagrangian respectively, the canonical Ward identities under the global symmetry transformation in phase space are deduced. The corresponding local transiormation is studied, the conserved charge is obtained at quantum level and the canonical Noether theorem in quantum case is given. The preliminary application of the results to a system of interacting nucleons and pions is discussed.

Key words Dirac's theory of constrained system, generating functional, Ward identity, Noether theorem.