第 19 卷 第 1 期 高能物理与核物理 Vol. 19, No. 1
1995 年 1 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1995

有横向耦合的束流系统的匹配问题

徐 建 铭[1)]
(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

1993-11-12 收稿

摘 要

分析了不同起始情况的束流通过有横向耦合的束流系统后发射度的变化，给出了束流有效发射度的边界方程式及匹配条件.

关键词 束流系统，横向耦合，束流发射度，匹配，接受度.

在横向运动间既无耦合又无关联的情况下，束流在 x 及 y 方向的发射度边界常用下式表示.

$$\gamma_u u^2 + 2\alpha_u u u' + \beta_u u'^2 = \varepsilon_u, \tag{1}$$

式中 u 代表 x 或 y，β_u、α_u 及 γ_u 是 u 方向的 Twiss 参数，它们是 z 的函数. z 轴是束流运动方向. "′"代表对 z 进行微分. 束流发射度的面积是 $\pi\varepsilon_u$，是一个常数. 进行横向匹配时，则调节束流系统的参数，使得在系统末端的 Twiss 参数等于后续系统接受度的相应参数. 很多粒子动力学程序如 SYNCH、MAD、TRANSPORT 等都有此功能.

束流通过存在横向耦合的系统后，不论起始情况横向运动间有无关联或耦合，粒子运动都会发生横向耦合，束流的有效发射度将增大. 增大情况除和系统的参数有关外，还与束流起始情况有关.

1 束流的起始条件

束流起始条件有三种不同情况，分述如下.

(1) 起始束流的 x、y 方向运动有耦合. 则束流在 (x_0, x_0', y_0, y_0') 四维空间的分布边界是一个四维椭球. 这种情况在不少文章里已详细讨论过[1-3]，有些粒子动力学程序也能对这种束流通过有横向耦合的系统后的性能及匹配进行计算，例如 TRANSPORT 程序[1,2]. 束流的起始性能可以用它的起始特性矩阵 σ_0 描述，起始束流分布边界方程如下式：

$$X_0^T \sigma_0^{-1} X_0 = 1, \tag{2}$$

式中向量 X_0 为，

1) 通讯地址：北京中关村 2732 信箱物理室徐清转，邮编 100080.

$$X_0=\begin{pmatrix}x_0\\x_0'\\y_0\\y_0'\end{pmatrix},\tag{3}$$

σ_0 是一个 4 × 4 对称矩阵.

(2) 起始束流 x, y 方向有关联但无耦合. 这是上一情况的特例,在此情况下, σ_0 如下式所示:

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}\varepsilon_{x0}\beta_{x0} & -\varepsilon_{x0}\alpha_{x0} & 0 & 0\\ -\varepsilon_{x0}\alpha_{x0} & \varepsilon_{x0}\gamma_{x0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{y0}\beta_{y0} & -\varepsilon_{y0}\alpha_{y0}\\ 0 & 0 & -\varepsilon_{y0}\alpha_{y0} & \varepsilon_{y0}\gamma_{y0}\end{pmatrix},\tag{4}$$

而束流分布边界方程为式 (2). 式中 β_{x0}、α_{x0} 等是在起始点的 Twiss 参数, 而 ε_{x0} 和 ε_{y0} 分别是起始点 x 及 y 方向束流的有效发射度.

(3) 起始束流 x、y 方向既无关联也无耦合. 在这种情况下,束流在四维相空间的分布边界由下面两个联立方程描述:

$$(x_0 \quad x_0')\begin{pmatrix}\gamma_{x0} & \alpha_{x0}\\ \alpha_{x0} & \beta_{x0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_0'\end{pmatrix}=\varepsilon_{x0};\tag{5-a}$$

$$(y_0 \quad y_0')\begin{pmatrix}\gamma_{y0} & \alpha_{y0}\\ \alpha_{y0} & \beta_{y0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_0\\y_0'\end{pmatrix}=\varepsilon_{y0},\tag{5-b}$$

式 (5-a) 和 (5-b) 分别描述四维空间中的两个椭圆形截面的柱体,两个柱体相交,它们的共占体积就是束流的分布范围. 这种束流 x 方向的发射度是 ε_{x0}, 和粒子 y 方向参数 y_0、y_0' 无关. y 方向的发射度是 ε_{y0},和 x_0 及 x_0' 无关. 这一点和(1),(2)两种情况大不相同. 在前两种情况中,具有不同的 y_0、y_0' 值的粒子在 (x_0,x_0') 相平面上分布区也不同. 只有 $y_0=0, y_0'=0$ 的粒子在 (x_0,x_0') 相平面上才分布在面积为 $\pi\varepsilon_{x0}$ 的椭圆里, y_0 及 y_0' 为某一定值的粒子在 x 方向的发射度小于 ε_{x0}. 位于 y 方向分布区边界上的粒子, 即 y_0 及 y_0' 满足椭圆方程

$$\gamma_{y0}y_0^2+2\alpha_{y0}y_0y_0'+\beta_{y0}y_0'^2=\varepsilon_{y0}\tag{6}$$

的粒子在 x 方向的发射度为零,即都位于 $x_0=0$, $x_0'=0$ 轴线上. 在 y 方向相空间上粒子的分布也有类似情况.

2 存在横向耦合的系统对束流发射度的影响

设系统的 4 × 4 转换矩阵为 M, 在系统末端的 X 向量如下式所示:

$$X=MX_0.\tag{7}$$

(1) 起始束流 x 和 y 方向有耦合或关联,即上节情况(1)和(2). 在此情况下,系统末端束流的特性矩阵 σ 为:

$$\sigma=M\sigma_0M^T,\tag{8}$$

束流在相空间的分布范围是一个四维椭球,它的边界方程如下式,

$$X^T\sigma^{-1}X = 1. \tag{9}$$

束流在 (x,x') 相平面上的投影发射度或有效发射度的边界方程为：

$$\sigma_{22}x^2 - 2\sigma_{12}xx' + \sigma_{11}x'^2 = \varepsilon_x^2, \tag{10}$$

有效发射度是 ε_x，如下式所示：

$$\varepsilon_x^2 = \sigma_{22}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2. \tag{11}$$

同样，在 (y,y') 相平面上有效发射度边界方程和有效发射度 ε_y 分别如下式表示：

$$\sigma_{44}y^2 - 2\sigma_{34}yy' + \sigma_{33}y'^2 = \varepsilon_y^2, \tag{12}$$

$$\varepsilon_y^2 = \sigma_{33}\sigma_{44} - \sigma_{34}^2. \tag{13}$$

上式中 σ_{11}—σ_{44} 都是 σ 矩阵的相应矩阵元。以上这些关系在文献[1—3]中已论述了。

为了便于和起始束流既无关联又无耦合的情况相比较，下面给出起始束流 x 和 y 方向只有关联的一些 σ 矩阵元的表示式。把式(4)代入式(8)便得到下面一些表示式。

$$\sigma_{11} = \varepsilon_{x0}(\beta_x + \Delta\beta_x), \tag{14}$$

$$\sigma_{12} = -\varepsilon_{x0}(\alpha_x + \Delta\alpha_x), \tag{15}$$

$$\sigma_{22} = \varepsilon_{x0}(\gamma_x + \Delta\gamma_x), \tag{16}$$

式中 β_x、α_x 和 γ_x 是在束流系统没有横向耦合，且 x 方向转换矩阵仍是 M_x 时，在系统末端应有的 Twiss 参数值。而 M_x 如下式所示：

$$M_x = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

$\Delta\beta_x$，$\Delta\alpha_x$ 及 $\Delta\gamma_x$ 则是耦合作用引起的变化量。它们的表示式如下(在式(17)及以后的表示式中，m_{11}，$m_{12}\cdots m_{44}$ 是M转换矩阵的矩阵元)：

$$\beta_x = m_{11}^2\beta_{x0} - 2m_{11}m_{12}\alpha_{x0} + m_{12}^2\gamma_{x0}, \tag{18}$$

$$\alpha_x = -m_{11}m_{21}\beta_{x0} + (m_{11}m_{22} + m_{12}m_{21})\alpha_{x0} - m_{12}m_{22}\gamma_{x0}, \tag{19}$$

$$\gamma_x = m_{21}^2\beta_{x0} - 2m_{21}m_{22}\alpha_{x0} + m_{22}^2\gamma_{x0}, \tag{20}$$

$$\Delta\beta_x = \frac{\varepsilon_{y0}}{\varepsilon_{x0}}(m_{13}^2\beta_{y0} - 2m_{13}m_{14}\alpha_{y0} + m_{14}^2\gamma_{y0}), \tag{21}$$

$$\Delta\alpha_x = \frac{\varepsilon_{y0}}{\varepsilon_{x0}}[-m_{13}m_{23}\beta_{y0} + (m_{13}m_{24} + m_{14}m_{23})\alpha_{y0} - m_{14}m_{24}\gamma_{y0}], \tag{22}$$

$$\Delta\gamma_x = \frac{\varepsilon_{y0}}{\varepsilon_{x0}}(m_{23}^2\beta_{y0} - 2m_{23}m_{24}\alpha_{y0} + m_{24}^2\gamma_{y0}). \tag{23}$$

在 y 方向也有类似的表示式，

$$\sigma_{33} = \varepsilon_{y0}(\beta_y + \Delta\beta_y), \tag{24}$$

$$\sigma_{34} = -\varepsilon_{y0}(\alpha_y + \Delta\alpha_y), \tag{25}$$

$$\sigma_{44} = \varepsilon_{y0}(\gamma_y + \Delta\gamma_y). \tag{26}$$

同样，β_y，α_y，γ_y 是系统没有耦合作用，且 y 方向转换矩阵仍是 M_y 时，在系统末端应有的 Twiss 参数值，而 $\Delta\beta_y$，$\Delta\alpha_y$ 及 $\Delta\gamma_y$ 则表示耦合作用的影响。M_y 及 β_y—$\Delta\gamma_y$ 的表示式分别是，

$$M_y = \begin{pmatrix} m_{33} & m_{34} \\ m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\beta_y = m_{33}^2\beta_{y0} - 2m_{33}m_{34}\alpha_{y0} + m_{34}^2\gamma_{y0}, \tag{28}$$

$$\alpha_y = -m_{33}m_{43}\beta_{y0} + (m_{33}m_{44} + m_{34}m_{43})\alpha_{y0} - m_{34}m_{44}\gamma_{y0}, \tag{29}$$

$$\gamma_y = m_{43}^2\beta_{y0} - 2m_{43}m_{44}\alpha_{y0} + m_{44}^2\gamma_{y0}, \tag{30}$$

$$\Delta\beta_y = \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{y0}}(m_{31}^2\beta_{x0} - 2m_{31}m_{32}\alpha_{y0} + m_{32}^2\gamma_{y0}), \tag{31}$$

$$\Delta\alpha_y = \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{y0}}[-m_{41}m_{31}\beta_{x0} + (m_{31}m_{42} + m_{32}m_{41})\alpha_{x0} - m_{32}m_{42}\gamma_{x0}], \tag{32}$$

$$\Delta\gamma_y = \frac{\varepsilon_{x0}}{\varepsilon_{y0}}(m_{41}^2\beta_{x0} - 2m_{41}m_{42}\alpha_{x0} + m_{42}^2\gamma_{x0}). \tag{33}$$

把式(14)—(16)代入式(11)，式(24)—(26)代入式(13)便得到这种起始束流在存在横向耦合的系统末端的发射度 ε_{xc} 和 ε_{yc}，如下式所示：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xc}^2 = \varepsilon_{x0}^2[&\beta_x\gamma_x - \alpha_x^2 + \beta_x(\Delta\gamma_x) + \gamma_x(\Delta\beta_x) - 2\alpha_x(\Delta\alpha_x) \\ &+ (\Delta\beta_x)(\Delta\gamma_x) - (\Delta\alpha_x)^2],\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yc}^2 = \varepsilon_{y0}^2[&\beta_y\gamma_y - \alpha_y^2 + \beta_y(\Delta\gamma_y) + \gamma_y(\Delta\beta_y) - 2\alpha_y(\Delta\alpha_y) \\ &+ (\Delta\beta_y)(\Delta\gamma_y) - (\Delta\alpha_y)^2].\end{aligned} \tag{35}$$

(2)起始束流 x 和 y 方向既无关联也无耦合. 从式(7)得到，

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = M_x\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{13} & m_{14} \\ m_{23} & m_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}, \tag{36}$$

因此，

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = M_x^{-1}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} - M_x^{-1}\begin{pmatrix} m_{13} & m_{14} \\ m_{23} & m_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}. \tag{37}$$

或者

$$x_0 = \frac{m_{22}}{|M_x|}(x - \Delta x) - \frac{m_{12}}{|M_x|}(x' - \Delta x'), \tag{38}$$

$$x_0' = -\frac{m_{21}}{|M_x|}(x - \Delta x) + \frac{m_{11}}{|M_x|}(x' - \Delta x'). \tag{39}$$

式中 $|M_x| = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$，如果束流系统没有横向耦合，则 $|M_x| = 1$. 而

$$\Delta x = m_{13}y_0 + m_{14}y_0', \tag{40}$$

$$\Delta x' = m_{23}y_0 + m_{24}y_0'. \tag{41}$$

是耦合项. 把式(38)(39)代入式 (5-a)，便得到这种起始束流在系统末端有效发射度的边界方程：

$$\gamma_x(x - \Delta x)^2 + 2\alpha_x(x - \Delta x)(x' - \Delta x') + \beta_x(x' - \Delta x')^2 = |M_x|^2\varepsilon_{x0}. \tag{42}$$

上式中 β_x、α_x 及 γ_x 的表示式为(18)—(20).

从式 (42) 可知，这种起始束流通过有横向耦合的系统以后，在系统末端对有不同 y_0 及 y_0' (从而不同的 Δx 及 $\Delta x'$) 初始值的粒子在 (x, x') 相平面上分布在形状相似，但中心在 Δx 及 $\Delta x'$ 的椭圆内. $y_0 = 0$，$y_0' = 0$ 的粒子的分布区为下述椭圆：

$$\gamma_x x^2 + 2\alpha_x xx' + \beta_x x'^2 = |M_x|^2\varepsilon_{x0}. \tag{43}$$

而 $y_0 = y_{01}, y_0' = y_{01}'$ 的粒子的分布范围则为下式所描述的椭圆，

$$\gamma_x(x-\Delta x_1)^2+2\alpha_x(x-\Delta x_1)(x'-\Delta x_1')+\beta_x(x'-\Delta x_1')^2=|M_x|^2\varepsilon_{x0},\tag{44}$$

式中

$$\Delta x_1=m_{13}y_{01}+m_{14}y_{01}',\tag{45}$$

$$\Delta x_1'=m_{23}y_{01}+m_{24}y_{01}'.\tag{46}$$

式(44)所描述的椭圆和式(43)所描述的形状相似,面积相同,只是式(44)描述的椭圆中心在 $\Delta x_1,\Delta x_1'$，不在原点。所以横向耦合作用使得具有不同的 y 方向起始值的粒子在 x 方向的发射度椭圆有不同的偏心量 Δx 及 $\Delta x'$。

能接收分布在式(42)和(43)所描述的相空间椭圆内的粒子所需要的系统的接受度是下式所描述的椭圆:

$$\gamma_x x^2+2\alpha_x xx'+\beta_x x'^2=|M_x|^2E_x,\tag{47}$$

它和式(42,43)所描述的椭圆形状相似,没有偏心，能包括式(42)所描述之椭圆并与之相切,因而面积较大。从式(47)描述之椭圆包括并切于式(42)所描述之椭圆这一条件,可得到 E_x 的表示式。

$$E_x=\varepsilon_{x0}\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{\Delta x}}{|M_x|^2\varepsilon_{x0}}}\right]^2,\tag{48}$$

$\varepsilon_{\Delta x}$ 的表示式是:

$$\varepsilon_{\Delta x}=\gamma_x(\Delta x)^2+2\alpha_x(\Delta x)(\Delta x')+\beta_x(\Delta x')^2.\tag{49}$$

为了接受所有的粒子,在 Δx 和 $\Delta x'$ 表示式(式(40),(41))中的 y_0 及 y_0' 应满足式 (5-b)，并使 $\varepsilon_{\Delta x}$ 亦即 E_x 为最大。从式 (5-b) 和式(49)能求出对应于最大 E_x 的 y_0 及 y_0'，它们是:

$$y_{0m}=\frac{1}{A_x}\left[-B_x\pm\sqrt{B_x^2-A_xC_x}\right]y_{0m}',\tag{50}$$

$$\begin{aligned}y_{0m}'=A_x\sqrt{\varepsilon_{y0}}\,[\gamma_{y0}(2B_x^2-A_xC_x\mp 2B_x\sqrt{B_x^2-A_xC_x})+2\alpha_{y0}A_x\\ \cdot(-B_x\pm\sqrt{B_x^2-A_xC_x})+\beta_{y0}A_x^2]^{-1/2},\end{aligned}\tag{51}$$

式中

$$A_x=\alpha_{y0}P_x-\gamma_{y0}Q_x,\tag{52}$$

$$B_x=(\beta_{y0}P_x-\gamma_{y0}R_x)/2,\tag{53}$$

$$C_x=\beta_{y0}Q_x-\alpha_{y0}R_x.\tag{54}$$

而

$$P_x=\gamma_x m_{13}^2+2\alpha_x m_{13}m_{23}+\beta_x m_{23}^2,\tag{55}$$

$$Q_x=\gamma_x m_{13}m_{14}+\alpha_x(m_{13}m_{24}+m_{23}m_{14})+\beta_x m_{23}m_{24},\tag{56}$$

$$R_x=\gamma_x m_{14}^2+2\alpha_x m_{14}m_{24}+\beta_x m_{24}^2.\tag{57}$$

于是,

$$\Delta x_m=m_{13}y_{0m}+m_{14}y_{0m}',\tag{58}$$

$$\Delta x_m'=m_{23}y_{0m}+m_{24}y_{0m}'.\tag{59}$$

在系统末端,束流的有效发射度边界是下式所描述的椭圆:

$$\gamma_x x^2+2\alpha_x xx'+\beta_x x'^2=|M_x|^2E_{xm},\tag{60}$$

$$E_{xm} = \varepsilon_{x0}\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{\Delta x,m}}{|M_x|^2\varepsilon_{x0}}}\right]^2. \tag{61}$$

有效发射度的大小是 $|M_x|E_{xm}$. 所以无关联起始束流在系统末端的有效发射度 ε_{xn} 的表示式是:

$$\varepsilon_{xn} = |M_x|\varepsilon_{x0}\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{\Delta x,m}}{|M_x|^2\varepsilon_{x0}}}\right]^2. \tag{62}$$

式中 $\varepsilon_{\Delta x,m}$ 如下式所示:

$$\varepsilon_{\Delta x,m} = \gamma_x(\Delta x_m)^2 + 2\alpha_x(\Delta x_m)(\Delta x'_m) + \beta_x(\Delta x'_m)^2. \tag{63}$$

比较式(62)和式(34)可知横向运动间既不关联又不耦合的起始束流在系统末端的有效发射度 ε_{xn}, 和起始束流有关联在系统末端的有效发射度 ε_{xc} 不相等. 比较式 (60) 和式 (10)及(14)—(16), 可知不同起始情况的束流在系统末端有效发射度的边界椭圆的形状也不相同,尽管它们的起始有效发射度边界形状相同,面积也相等.

在 y 方向也可得到类似的关系式. 在系统末端,束流的有效发射度边界方程是:

$$\gamma_y y^2 + 2\alpha_y yy' + \beta_y y'^2 = |M_y|^2 E_{ym}, \tag{64}$$

$$E_{ym} = \varepsilon_{y0}\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{\Delta y,m}}{|M_y|^2\varepsilon_{y0}}}\right]^2. \tag{65}$$

式中,

$$\varepsilon_{\Delta y,m} = \gamma_y(\Delta y_m)^2 + 2\alpha_y(\Delta y_m)(\Delta y'_m) + \beta_y(\Delta y'_m)^2. \tag{66}$$

而有效发射度 ε_{yn} 为:

$$\varepsilon_{yn} = |M_y|E_{ym} = |M_y|\varepsilon_{y0}\left[1+\sqrt{\frac{\varepsilon_{\Delta y,m}}{|M_y|^2\varepsilon_{y0}}}\right]^2. \tag{67}$$

在式(66)中,

$$\Delta y_m = m_{31}x_{0m} + m_{32}x'_{0m}, \tag{68}$$

$$\Delta y'_m = m_{41}x_{0m} + m_{42}x'_{0m}. \tag{69}$$

而

$$x_{0m} = \frac{1}{A_y}\left(-B_y \pm \sqrt{B_y^2 - A_yC_y}\right)x'_{0m}, \tag{70}$$

$$x'_{0m} = A_y\sqrt{\varepsilon_{x0}}\left[\gamma_{x0}\left(2B_y^2 - A_yC_y \mp 2B_y\sqrt{B_y^2 - A_yC_y}\right) + 2A_y\alpha_{x0}\left(-B_y \pm \sqrt{B_y^2 - A_yC_y}\right) + \beta_{x0}A_y^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{71}$$

其中

$$A_y = \alpha_{x0}P_y - \gamma_{x0}Q_y, \tag{72}$$

$$B_y = (\beta_{x0}P_y - \gamma_{x0}R_y)/2, \tag{73}$$

$$C_y = \beta_{x0}Q_y - \alpha_{x0}R_y. \tag{74}$$

而

$$P_y = \gamma_y m_{31}^2 + 2\alpha_y m_{31}m_{41} + \beta_y m_{41}^2, \tag{75}$$

$$Q_y = \gamma_y m_{31}m_{32} + \alpha_y(m_{31}m_{42} + m_{32}m_{41}) + \beta_y m_{41}m_{42}, \tag{76}$$

$$R_y = \gamma_y m_{32}^2 + 2\alpha_y m_{32}m_{42} + \beta_y m_{42}^2. \tag{77}$$

3 束流通过有横向耦合的系统后的横向匹配

如果起始束流存在横向耦合或关联，在系统末端，束流有效发射度的边界方程是式(10)和(12). 匹配下游束流系统时，要求下游系统入口处的接受度的 β_{xA}、$-\alpha_{xA}$ 及 γ_{xA} 和 σ_{11}、σ_{12} 及 σ_{22} 成比例关系，即

$$\frac{\sigma_{11}}{\beta_{xA}}=\frac{\sigma_{12}}{-\alpha_{xA}}=\frac{\sigma_{22}}{\gamma_{xA}}. \tag{78}$$

接受度的大小应大于或等于有效发射度 $[\sigma_{22}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2]^{\frac{1}{2}}$. 在 y 方向则要求接受度的 β_{yA}, $-\alpha_{yA}$ 和 γ_{yA} 和 σ_{33}、σ_{34} 及 σ_{44} 成比例，即:

$$\frac{\sigma_{33}}{\beta_{yA}}=\frac{\sigma_{34}}{-\alpha_{yA}}=\frac{\sigma_{44}}{\gamma_{yA}}. \tag{79}$$

y 方向接受度的大小应大于或等于 $[\sigma_{33}\sigma_{44}-\sigma_{34}^2]^{1/2}$. 有些粒子动力学程序都有这个匹配功能. 当起始束流只有横向关联没有耦合时，有效发射度边界方程是:

$$\varepsilon_{x0}(\gamma_x+\Delta\gamma_x)x^2+2\varepsilon_{x0}(\alpha_x+\Delta\alpha_x)xx'+\varepsilon_{x0}(\beta_x+\Delta\beta_x)x'^2=\varepsilon_{xc}^2, \tag{80}$$

$$\varepsilon_{y0}(\gamma_y+\Delta\gamma_y)y^2+2\varepsilon_{y0}(\alpha_y+\Delta\alpha_y)yy'+\varepsilon_{y0}(\beta_y+\Delta\beta_y)y'^2=\varepsilon_{yc}^2. \tag{81}$$

上式中 ε_{xc} 及 ε_{yc} 如式(34,35)所示. 因此，对这种起始束流的匹配条件是:

$$\frac{\beta_x+\Delta\beta_x}{\beta_{xA}}=\frac{\alpha_x+\Delta\alpha_x}{\alpha_{xA}}=\frac{\gamma_x+\Delta\gamma_x}{\gamma_{xA}}, \tag{82}$$

$$\frac{\beta_y+\Delta\beta_y}{\beta_{yA}}=\frac{\alpha_y+\Delta\alpha_y}{\alpha_{yA}}=\frac{\gamma_y+\Delta\gamma_y}{\gamma_{yA}}. \tag{83}$$

当起始束流既无横向关联又无耦合时，在系统末端有效发射度边界方程是式(60)和(64)，所要求的匹配条件是:

$$\frac{\beta_x}{\beta_{xA}}=\frac{\alpha_x}{\alpha_{xA}}=\frac{\gamma_x}{\gamma_{xA}}, \tag{84}$$

$$\frac{\beta_y}{\beta_{yA}}=\frac{\alpha_y}{\alpha_{yA}}=\frac{\gamma_y}{\gamma_{yA}}. \tag{85}$$

文献[4,5]已分析了 SYNCH 和 MAD 程序对存在横向耦合的束流系统不能进行恰当的匹配. 一些用 σ 矩阵来描述束流性能并进行匹配的程序也只能匹配起始有横向耦合或关联的束流. 对起始束流既无横向关联又无耦合的情况，应采用前面推导的公式进行匹配. 如式(84),(85)及式(62),(67)所示，起始束流情况不同，在有横向耦合的系统末端有效发射度的大小也不相同，在选定系统孔径时也应注意.

4 实　　例

由于有些公式比较繁琐，为了给一个定量的比较，下面以一个具体的束流系统为例进行计算比较. 它是一个加速器的一段注入系统，由于采用了两块绕束流轴线转 30° 的二极磁铁，使得该系统有了横向耦合作用. 为节省篇幅，略去系统的细节描述，只给出该系

统的横向转换矩阵 M，它是

$$M=\begin{pmatrix}-3.5583 & -2.2528 & 0.2620 & -2.0469\\ -0.4313 & -0.5411 & 0.0155 & 0.5452\\ 0.4617 & 0.4709 & 0.4811 & -1.3337\\ 0.1583 & 0.2611 & 0.0401 & 1.8720\end{pmatrix}. \tag{86}$$

束流的初始参数是：

$$\begin{aligned}&\beta_{x0}=3.875,\ \alpha_{x0}=3.191,\ \gamma_{x0}=2.8858;\\&\beta_{y0}=12.232,\ \alpha_{y0}=0.401,\ \gamma_{y0}=0.0949,\end{aligned} \tag{87}$$

并且 $\varepsilon_{x0}=\varepsilon_{y0}$. 式中长度单位是 m，角度单位是 rad.

把这些初始参数代入式(10)—(35)便得到当起始束流有横向关联时，在系统末端有效发射度的边界方程式，它们是

$$0.0846x^2-2\times 0.1004xx'+11.9407x'^2=1.191\varepsilon_{x0}, \tag{88}$$

$$0.3141y^2+2\times 0.3171yy'+3.5049y'^2=1.025\varepsilon_{y0}. \tag{89}$$

把初始参数代入式(50)—(77)，便得到当起始束流没有横向关联和耦合时在系统末端的有效发射度边界方程，它们是，

$$0.0801x^2-2\times 0.231xx'+13.158x'^2=2.64\varepsilon_{x0}, \tag{90}$$

$$0.306y^2+2\times 0.3571yy'+3.685y'^2=1.79\varepsilon_{y0}. \tag{91}$$

以上结果表明，尽管两种起始束流具有同样的起始 Twiss 参数和同样大小的起始有效发射度，起始没有横向关联的束流和有横向关联的束流通过同样的存在横向耦合的系统，在系统末端有效发射度并不相同，但都比原始发射度增大。不只它们的形状不同，面积也相差不少。这是由于束流通过有横向耦合的系统时，x_0, x_0' 或 y_0, y_0' 值比较大的粒子受耦合作用的影响也比较大。如果起始束流存在横向关联，则 x_0, x_0', y_0, y_0' 值比较大的粒子在相空间分布的区域较小，所以横向耦合对束流发射度增大作用相对较小。而当起始束流没有横向关联时，不论 x_0,x_0',y_0,y_0' 值的大小，粒子分布区相同，所以横向耦合对束流有效发射度的作用相对于前一情况要严重一些。

束流的实际分布情况，既不会横向间全无关联，也不会是理想的四维椭球如四维 σ 矩阵所描述。但有些加速器或束流管道确实考虑矩形截面束流通过，即假定没有横向关联。所以在设计时应充分估计耦合作用的影响。尽可能避免采用引起横向耦合的元件及存在横向耦合的系统。遇到不可避免的耦合情况，如采用斜四极、斜六极铁等，则应充分估计横向耦合对束流发射度的影响，适当选择影响严重的地段的管道孔径，以免成为限制束流的瓶颈。

参考文献

[1] K.L. Brown, SLAC-75, 1972.
[2] K.L. Brown, SLAC-91, 1973.
[3] 魏开煜，带电束流传输理论，科学出版社，1986 年版.
[4] Jianming Xu. BNL-48478, AD/RHIC/-117, 1992.
[5] 徐建铭，高能物理与核物理，18(1994)955.

Matching Problem of Lattice with Transverse Coupling

Xu Jianming

(*The Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100039)

Received 12 November 1993

Abstract

The matching problem of lattice with transverse coupling has been discussed in this paper. The matching conditions and the related equations of the effective beam emittance are given.

Key words lattice, transverse coupling, beam emittance, matching, admittance.