

转动区偶偶核正宇称态的八极关联效应

钱 诚 德

(上海交通大学应用物理系 上海 200030)

1993 年 2 月 1 日收到

摘 要

运用了 $U_{sdpf}(16)$ 相互作用玻色子模型讨论了八极自由度 P 和 f 玻色子对转动区偶偶核正宇称态的效应。结果表明, 偶数个 P 和 f 玻色子的组态能够混入到通常的基态带, β 和 γ 振动带, 并且自然地形成 $K^\pi = 1^+, 3^+$ 等转动带。这一结果与 $U_{sdg}(15)$ -IBM 相类似。本文还简要地给出了基态带间的 $E2$ 约化跃迁几率, 其结果与 $U_{sd}(6)$ -IBM 相一致。

关键词 $U_{sdpf}(16)$ -IBM, 八极关联, $^{176}\text{Hf}, K^\pi = 1^+, 3^+$ 转动带。

1 引 言

相互作用玻色子模型 (简称 IBM^[1]) 成功地对偶偶核低集体运动态进行了描述。最近的一些研究工作表明, 在 IBM 中, 除了 sd 玻色子外, 同时引入 P 和 f 玻色子已越来越显得是必要的。特别地, J. Engel 和 F. Iachello 运用了 $U_{sdpf}(16)$ -IBM, 在单玻色子能量 $\epsilon_s \approx \epsilon_d \approx \epsilon_p \approx \epsilon_f$ 情况下, 对于核素 ^{218}Ra , 考虑了多个 P 和 f 玻色子的作用。他们指出: 少量的 pf 玻色子成分会混入到正宇称基态带中去, 如基态的八极关联^[2]。此外, $U_{sd}(6)$ -IBM 虽然在描述核的四极振动或形变上取得了很大成功, 但是不能解释转动核区的正宇称奇 K 带, 如 $K^\pi = 1^+, 3^+$ 带。为了讨论这类激发带, 有些作者在原有 IBM 中引入了十六极自由度 (g 玻色子)^[3,4]。然而, 我们的工作表明, 如果不引入 g 玻色子, 而只考虑偶数个 pf 玻色子的相互作用, 也会自然地产生出奇 K^π 转动带, 如 $K^\pi = 1^+, 3^+$ 带。所以, 这些奇 K^π 带同时也可以被看作是转动核中, 偶数个 pf 玻色子的关联效应。本文的目的是运用 $U_{sdpf}(16)$ -IBM, 在单玻色子能量 $\epsilon_p \approx \epsilon_f \gg \epsilon_s \approx \epsilon_d$ 的情况下, 讨论偶数个负宇称 pf 玻色子的相互作用对转动核正宇称态能谱的影响。

2 模型和对称性

为了构造唯象模型, 假设这个相互作用玻色子系统的玻色子符合 IBM 的基本假定^[1], 体系的玻色子可以占据四种能级, 即 s 态 ($J^\pi = 0^+$), d 态 ($J^\pi = 2^+$), p 态 ($J^\pi = 1^-$) 和 f 态 ($J^\pi = 3^-$)。这个系统具有 $U_{sdpf}(16)$ 群动力学对称性。在单玻色子能量 $\epsilon_p \approx \epsilon_f \gg \epsilon_s \approx \epsilon_d$ 的情况下, 正宇称 s, d 玻色子和负宇称 p, f 玻色子将被分成两个子

系统,它们之间通过相互作用进行耦合,即体系具有 $U_{sd}(6) \otimes U_{pf}(10)$ 群动力学对称性. 把这个系统分两种情况进行考虑: (1) 当玻色子数 $n_s + n_d = N, n_p + n_f = 0$ 时, 系统具有 $U(6)$ 群动力学对称性. 这就是大家所熟悉的 $U_{sd}(6)$ -IBM 中的正宇称态. (2) 虽然 d 玻色子在描述正宇称态上有着重要的意义, 但这里为了避免 d 玻色子的作用, 以便直接讨论多个 p f 玻色子相互作用对态的影响, 又基于单玻色子能量 $\varepsilon_p \approx \varepsilon_f \gg \varepsilon_s \approx \varepsilon_d$ 的情况, 我们把 d 玻色子数固定^[2], 考虑玻色子数 $n_s + n_p + n_f = N, n_d = 0$ 的情况, 体系具有 $U_{sdpf}(16) \supset U_d(5) \otimes U_{spf}(11)$ ^[5] 群链的动力学对称性. 这样的多个 s, p 和 f 玻色子相互作用系统可以被用来同时描述正负宇称态, 其中的正宇称态将混入到通常的 $U_{sd}(6)$ -IBM 正宇称态中去. 系统中 s 玻色子与 p, f 玻色子宇称不同, 它们之间可以通过耦合处理. 这样, 体系具有 $U_{spf}(11) \supset U_s(1) \otimes U_{pf}(10)$ 群动力学对称性. 其中, s 玻色子可以使系统的总玻色子数守恒, 而对能级的分裂没有影响. 所以, 系统的动力学对称性主要取决于 $U_{pf}(10)$ 群的性质. $U_{pf}(10)$ 群包含有 $U_{sd}(6)$ 群中的三种子群链^[2,6,7]

$$U_{pf}(10) \supset SU_{pf}(5) \supset SO(5) \supset SO(3). \quad (1)$$

$$U_{pf}(10) \supset SU_{pf}(3) \supset SO(3). \quad (2)$$

$$U_{pf}(10) \supset SO_{pf}(6) \supset SO(5) \supset SO(3). \quad (3)$$

这样由 s, p 和 f 相互作用玻色子系统所描述的正宇称态就可以和 $U_{sd}(6)$ -IBM 的三种极限情况进行比较. 其中 $U_{pf}(10) \supset SU_{pf}(3) \supset SO(3)$ 极限对应于转动极限, 本文将运用这个子群链对转动核进行讨论.

3 $U_{spf}(11)$ -IBM 及 $SU_{pf}(3)$ 转动极限

为了构造体系的哈密顿算符, 定义球面张量算符如下:

$$\text{产生算符} \quad s^+, p_\mu^+, f_\mu^+ (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3). \quad (4)$$

$$\text{消灭算符} \quad \tilde{s} = s, \tilde{p}_\mu = (-1)^{l-\mu} p_{-\mu} (\mu = 0, \pm 1), \\ \tilde{f}_\mu = (-1)^{l-\mu} f_{-\mu} (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3). \quad (5)$$

它们满足对易关系:

$$[s, s^+] = 1, [p_\mu, p_\mu^+] = \delta_{\mu\mu'}, [f_\mu, f_\mu^+] = \delta_{\mu\mu'}. \quad (6)$$

其余的对易关系均为零. 由它们可以构成产生算符和消灭算符的双线性乘积形式

$$G_{\mu\mu'} = b_\mu^+ b_{\mu'},$$

共 121 个算符, 而这些算符可以看成是 $U_{spf}(11)$ 群的生成元. 为了讨论 p 和 f 玻色子的作用, 采用了以 p 和 f 玻色子作为基本玻色子的相互作用系统, 把 s 玻色子作耦合处理. 由 p 和 f 玻色子组成的系统具有 $U_{pf}(10)$ 群对称性. 由于这个系统态的宇称与 pf 玻色子总数的奇偶性有关^[7,8], 为了讨论正宇称态, 就必须使 $N (= n_p + n_f)$ 为偶数, 考虑到总玻色子数守恒, 可以采用 $U_{spf}(11)$ -IBM.

因为单个 p 和 f 玻色子态具有 $SU(3)$ 群 (3, 0) 不可约表示相同的变换性质, 所以 pf 玻色子算符可以组成 $SU(3)$ 代数, 它的生成元是^[9]

$$\hat{L} = \sqrt{2} (p^+ \tilde{p})^{(1)} + 2\sqrt{7} (f^+ \tilde{f})^{(1)}. \quad (7)$$

$$\hat{Q} = -\frac{9\sqrt{2}}{5} (p^+ \bar{p})^{(2)} - \frac{6\sqrt{7}}{5} (f^+ \bar{f})^{(2)} + \frac{2}{5} \sqrt{42} [(p^+ \bar{f})^{(2)} + (f^+ \bar{p})^{(2)}]. \quad (8)$$

系统的哈密顿算符为

$$\begin{aligned} H_{pf} &= H_p + H_f + V_{pf} \\ &= \varepsilon_p \sum_{m=-1}^{+1} p_m^+ p_m + \varepsilon_f \sum_{m=-3}^{+3} f_m^+ f_m \\ &+ \sum_{L=0,2} \frac{1}{2} (2L+1)^{1/2} C_{pL} [(p^+ p^+)^{(L)} (\bar{p} \bar{p})^{(L)}]^{(0)} \\ &+ \sum_{L=0,2,4,6} \frac{1}{2} (2L+1)^{1/2} C_{fL} [(f^+ f^+)^{(L)} (\bar{f} \bar{f})^{(L)}]^{(0)} \\ &+ \sum_{L=0,2} \frac{1}{2} (2L+1)^{1/2} C_{pfL} [(f^+ f^+)^{(L)} (\bar{p} \bar{p})^{(L)} + (p^+ p^+)^{(L)} (\bar{f} \bar{f})^{(L)}]^{(0)} \\ &+ \sum_{L=2,4} v_L [(f^+ f^+)^{(L)} (\bar{f} \bar{p})^{(L)} + (f^+ p^+)^{(L)} (\bar{f} \bar{f})^{(L)}]^{(0)} \\ &+ u_2 [(p^+ p^+)^{(2)} (\bar{f} \bar{p})^{(2)} + (f^+ p^+)^{(2)} (\bar{p} \bar{p})^{(2)}]^{(0)}. \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\varepsilon_p, \varepsilon_f, C_{pL}, C_{fL}, C_{pfL}, v_L, u_2$ 等为参量。在 $SU(3)$ 极限情况下,体系的哈密顿算符可以写为

$$H = -\kappa \sum_{ij} \hat{Q}_i \cdot \hat{Q}_j - \kappa' \sum_{ij} \hat{L}_i \cdot \hat{L}_j. \quad (10)$$

其中 \hat{L}_i 是第 i 个玻色子的角动量算符, \hat{Q}_i 是第 i 个玻色子的四极算符, κ 表示四极-四极相互作用强度, κ' 表示角动量-角动量相互作用强度。

这种形式的哈密顿算符 H , 在 $SU(3)$ 群中是对角的。 H 的本征态可以用子群链 $SU(10) \supset SU(3) \supset SO(3)$ 中表征各子群的不可约表示的量子数来标记。态的波函数可以用 $|[N](\lambda\mu)KLM\rangle$ 表示。这里 $[N]$ 表示 $SU(10)$ 群的全对称不可约表示, $(\lambda\mu)$ 是 $SU(3)$ 群的不可约表示, L, M 分别代表体系的总角动量和它在 z 方向上的投影, 即分别是 $SO(3)$ 群和 $SO(2)$ 群的量子数。这里的 K 为 L 在本体轴上投影的附加量子数。

把 H 作用到态 $|[N](\lambda\mu)KLM\rangle$ 上得到能量的本征值为:

$$E([N](\lambda\mu)KLM) = \alpha L(L+1) - \beta C(\lambda\mu). \quad (11)$$

其中 $C(\lambda\mu) = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3(\lambda + \mu), \alpha = \frac{3}{4} \kappa - \kappa', \beta = \kappa$ 。能量对 K, M 是简并的。

把 H 作用到态 $|[N-1](\lambda\mu)KLM\rangle$ 上还可以得到另一组能量本征值为:

$$E([N-1](\lambda\mu)KLM) = \alpha' L(L+1) - \beta' C(\lambda\mu), \quad (12)$$

其中 α', β' 为参量。 $\alpha' = \frac{3}{4} \kappa'' - \kappa''', \beta' = \kappa''$ 。

可以证明, 当 $N \geq 4^{[9]}$ 时, $SU(10)$ 群的全对称表示 $[N]$ 对于 $SU(3)$ 的分解中, 按照 $SU(3)$ 群不可约表示的二次 Casimir 算符本征值, 由大到小的顺序排列, 前四个 $SU(3)$ 表示是 $(3N, 0), (3N - 4, 2), (3N - 6, 3)$ 和 $(3N - 8, 4)$. 表示越大对应于带首能量越低. 最低能带对应于 $(3N, 0)$ 表示, 由 $SU(3) \supset SO(3)$ 的约化分支律得到态的角动量为:

$$L = 0, 2, 4, \dots, 3N - 2, 3N. \quad (N \text{ 为偶数}); \quad (13)$$

$$L = 1, 3, 5, \dots, 3N - 2, 3N. \quad (N \text{ 为奇数}). \quad (14)$$

所以, 最低能带的态的角动量值将随总玻色子数 N 的奇偶性而不同. 在这一点上, $U_{pf}(10)$ -IBM 显著地不同于 $U_{sd}(6)$ -IBM. 当总玻色子数 N 为偶数时, 采用 $U_{pf}(10)$ -IBM, 可以得到低激发态中的正宇称能谱.

为了便于与 $SU(6) \supset SU(3)$ 约化的分支律进行比较, 把 $SU(10) \supset SU(3)$ 约化的结果分成两组:

$$[N]_{SU(10)} \supset \begin{cases} (3N, 0) \oplus (3N - 4, 2) \oplus (3N - 8, 4) \oplus (3N - 12, 6) \oplus \dots \\ (3N - 6, 0) \oplus (3N - 10, 2) \oplus \dots \\ (3N - 12, 0) \oplus \dots \\ \dots \end{cases}$$

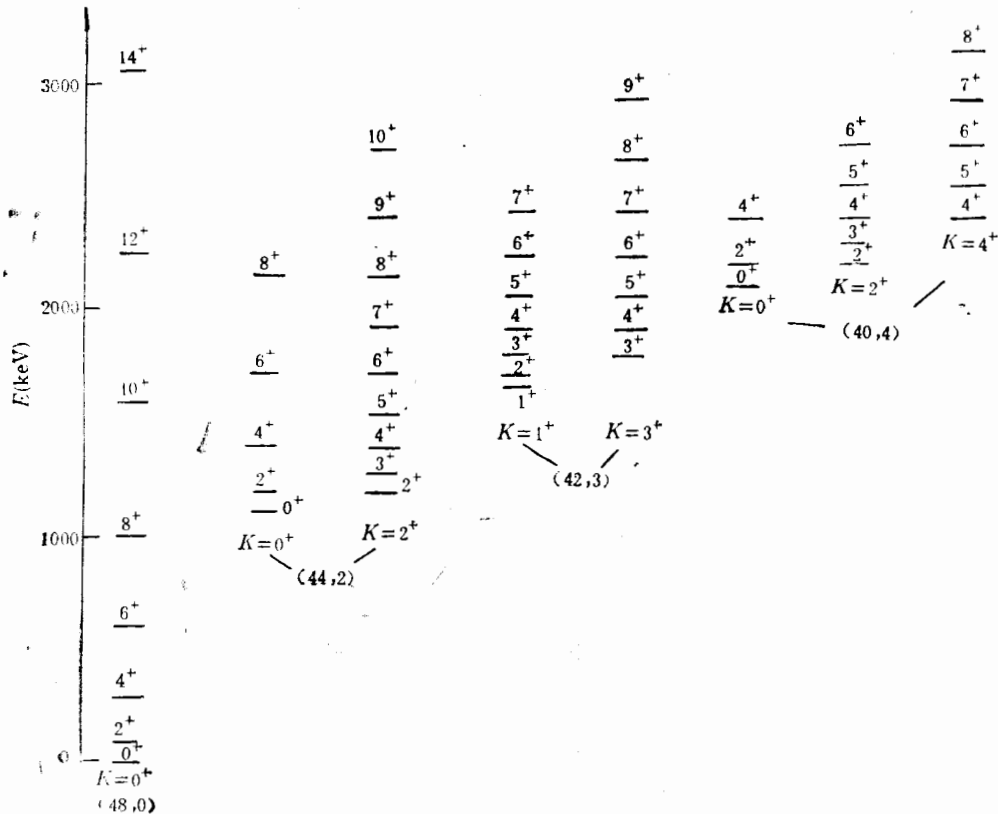


图1 具有 $SU(3) \subset U(10)$ 极限的典型理论能谱
 $N = 16$, 括号内 λ 和 μ 的值标记 $SU(3)$ 表示 (λ, μ)

$$\oplus \left[\begin{array}{l} (3N-6, 3) \oplus (3N-8, 1) \oplus \dots \\ (3N-9, 3) \oplus \dots \end{array} \right. \quad (15)$$

其中前组中的 $SU(3) (\subset SU(10))$ 表示可以与 $SU(6) \supset SU(3)$ 的约化结果对应, 它们的对应项包含了相同的低角动量值, 而后组中的 $SU(3)$ 表示却没有对应的项. 这样从能谱看 $U_{pf}(10) \supset SU(3)$ 中除了包含 $U_{sd}(6) \supset SU(3)$ 中所有的态以外, 还增加了一些能谱, 如与 $(3N-6, 3)$ 表示对应的转动带. 从 $SU(3) \supset SO(3)$ 约化分支律可以看出, 这正与 $K^\pi = 1^+, 3^+$ 转动带相对应. 这样, $U_{pf}(10)$ -IBM 中的态的一部分将混入到通常的 $U_{sd}(6)$ -IBM 相应的态中去, 另外, 这个模型还会形成一些奇 K^π 转动带.

从上面的讨论中, 我们可以看出, 总玻色子数 N 为偶数时, $U_{pf}(10)$ -IBM 能够描述正宇称态. 如图 1. 为了使 N 为奇数时, 也能描述正宇称态, 我们可以采用引入 s 玻色子的 $U_{s, pf}(11)$ -IBM, 并且做如下考虑:

(1) 当 N 为偶数时, 取特殊情况 $n_s = 0, n_p + n_f = N$, 其中 n_s, n_p, n_f 分别表示 s, p, f 玻色子数. 总玻色子数 N 守恒. $n_s + n_p + n_f = N$. 体系的哈密顿算符 $H = H_{pf}$. 系统具有 $U_{pf}(10)$ 群动力学对称性. 可以直接运用 $U_{pf}(10)$ -IBM 中 N 为偶数的结果.

(2) 当 N 为奇数时, 取特殊情况 $n_s = 1$. 此时 $n_p + n_f = N - 1$. 体系的哈密顿算符, 除了 pf 算符项以外, 还出现与一个 s 玻色子算符有关的项. 把 s 玻色子与 pf 玻色子之间用耦合处理. 这时系统就具有 $U_{s, pf}(11) \supset U_s(1) \otimes U_{pf}(10)$ 群链对称性. 体系的哈密顿算符 $H = H_s + H_{pf} + V_{s, pf}$, 即

$$H = H_{pf} + \epsilon_s + u_{2p} [(s^+ \tilde{s})^{(0)} (p^+ \tilde{p})^{(0)}]^{(0)} + u_{2f} [(s^+ \tilde{s})^{(0)} (f^+ \tilde{f})^{(0)}]^{(0)}. \quad (16)$$

其中 $\epsilon_s, u_{2p}, u_{2f}$ 为参量. 因为 $(s^+ \tilde{s})^{(0)} = \hat{n}_s, (p^+ \tilde{p})^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \hat{n}_p, (f^+ \tilde{f})^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{7}} \hat{n}_f$, 其中 \hat{n}_s, \hat{n}_p 和 \hat{n}_f 分别表示 s, p 和 f 玻色子数算符. 由于 \hat{n}_s 的本征值为 1, 而后两项可以合并到 H_{pf} (9) 式中, ϵ_s 可以吸收到结合能中去, 所以在 $SU(3)$ 极限情况下, 可以得到下面形式的体系哈密顿算符:

$$H = \left(\frac{3}{4} \kappa'' - \kappa''' \right) \hat{L}^2 - \kappa' \hat{C}(\lambda \mu). \quad (17)$$

其中 $\hat{C}(\lambda \mu)$ 为 $SU(3)$ 群二次 Casimir 算符, 由于参数 ϵ_p, ϵ_f 已改变, 所以参数 κ, κ' 也要相应地改变为 κ'', κ''' , 把上式改记为:

$$H = \alpha' \hat{L}^2 - \beta' \hat{C}(\lambda \mu), \quad (18)$$

其中 $\alpha' = \frac{3}{4} \kappa'' - \kappa''', \beta' = \kappa'$. 此时体系的波函数为 $|[N-1](\lambda \mu)KL', s; LM\rangle$, 这个波函数是由 $|[N-1](\lambda \mu)KL'\rangle$ 与 $|s00\rangle$ 耦合而成的. 因为 s 玻色子的角动量 $L=0, L$ 的 z 分量 $M=0$, 所以耦合后的波函数形式较简单:

$$\begin{aligned} |[N-1](\lambda \mu)KL', s; LM\rangle &= |[N-1](\lambda \mu)KL'\rangle |s00\rangle \\ &= |[N-1](\lambda \mu)KLM\rangle. \end{aligned} \quad (19)$$

把 H 作用在态 $|[N-1](\lambda \mu)KL', s; LM\rangle = |[N-1](\lambda \mu)KLM\rangle$ 上得到能量的本征值为

$$E([N-1](\lambda \mu)KL', s; LM) = E([N-1](\lambda \mu)KLM)$$

5 E2 跃迁

在 $SU(3)$ 极限下,一般的 $E2$ 跃迁算符可以写为

$$\hat{T}^{(E2)} = \alpha_2 \hat{Q}^{(2)}. \quad (21)$$

其中 $\hat{Q}^{(2)}$ 是 $SU(3)$ 的一个生成元, α_2 是 $E2$ 的有效电荷,因此, $\hat{T}^{(E2)}$ 也是 $SU(3)$ 的一个生成元.

虽然,在 $U_{pf}(10)$ -IBM 和 $U_{sd}(6)$ -IBM 中的 $\hat{T}^{(E2)}$ 算符形式上不同,但是它们具有相同的 $SU(3)$ 变换性质. 运用文献[1]中所叙述的计算方法,就可以得到 $\hat{Q}^{(2)}$ 的约化矩阵元,特别重要的是在基态带间 $E2$ 跃迁的约化跃迁几率 B_g , [注意到基态带所对应的表示为 $(3N, 0)$ 而不是 $(2N, 0)$, 得到

$$B_g(E2, L+2 \rightarrow L) = \alpha_2^2 \frac{3}{4} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)} (3N-L)(3N+L+3), \quad (22)$$

和基态带中各态的电四极矩为

$$Q(L) = -\alpha_2 \left(\frac{16\pi}{40}\right)^{1/2} \frac{L}{2L+3} (6N+3). \quad (23)$$

而由几何模型 (Bohr & Mottelson, 1975) 得出的结果是

$$B_g(E2, L+2 \rightarrow L) = \frac{5}{16\pi} e^2 Q_0^2 \frac{3}{2} \frac{(L+2)(L+1)}{(2L+3)(2L+5)}, \quad (24)$$

和

$$Q(L) = -eQ_0 \frac{L}{2L+3}. \quad (25)$$

比较(23)和(25)式,我们可以看到,在 $SU(3)$ 极限下内禀电四极矩所起的作用是

$$eQ_0 \rightarrow \alpha_2 \left(\frac{16\pi}{40}\right)^{1/2} (6N+3). \quad (26)$$

由此可以看出 $B_g(E2)$ 与玻色子数的平方成正比,因而在 $SU(3)$ 极限下, $U_{pf}(10)$ -IBM 和 $U_{sd}(6)$ -IBM 一样,也能得到强 $E2$ 跃迁的结论;此外,它还可以得出类似于 $U_{sd}(6)$ -IBM 的,关于 β 带间, γ 带间的 $E2$ 跃迁几率公式等,值得注意的它还可以讨论 $K^\pi = 1^+, 3^+$ 奇 K 带间的跃迁几率,这也是在 $U_{sd}(6)$ -IBM 中无法讨论的,限于篇幅不在这里一一叙述.

6 结论与讨论

从 $U_{pf}(11)$ -IBM 的 $SU(3)$ 极限中,可以看到,偶数个 pf 玻色子的相互作用会形成正宇称态. 它们中的一部分组态将混入到通常的 $U_{sd}(6)$ -IBM 的正宇称低集体运动态中去,如基态转动带, β, γ 振动转动带等,形成了正宇称态的八极关联,其中特别地存在着基态的八极关联. 另外,它们还会自然地形成简并的带首为奇 K 的转动带,如 $K^\pi = 1^+, +3$ 带等. 这样 $U_{pf}(11)$ -IBM 一方面与 $U_{sd}(6)$ -IBM 对于正宇称转动带的描述是相容

的,另一方面它还会产生 $U_{sd}(6)$ -IBM 中所缺少的有意义成分。在这一点上, $U_{sp}(11)$ -IBM 与 $U_{sdg}(15)$ -IBM 具有相类似的结果。

所以,在实验上,核素中所出现的 $K^\pi = 1^+, 3^+$ 等转动带也可以被看作是正宇称态中存在八极关联的效应,为进一步讨论核的八极激发性质提供了信息。

从基态带的 $E2$ 跃迁来看, $U_{sp}(11)$ -IBM 与 $U_{sd}(6)$ -IBM 也是一致的,关于电磁跃迁,将在另外的文章中给予进一步的讨论。

作者对周孝谦教授的有益讨论表示感谢。作者还要对孙洪洲教授、韩其智教授和沈洪清教授等对本文的许多有益建议表示感谢。

参 考 文 献

- [1] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys.*, **99** (1976) 253; **111** (1978) 201; **123** (1979) 468.
- [2] J. Engel and F. Iachello, *Nucl. Phys.*, **A472** (1987) 61.
- [3] H. C. Wu, *Phys. Lett.*, **110B** (1982) 1.
- [4] 曾家刚、廖继志, *高能物理与核物理*, **11**(1987)409.
- [5] D. Kusnezov, *J. Phys.*, **A23** (1990) 5673.
- [6] 吴华川, *高能物理与核物理*, **10**(1986)605.
- [7] Sun Hongzhou et al., *Chin. J. Nucl. Phys.*, **13** (1991) 121.
- [8] Qian Chengde *Chin. J. Nucl. Phys.*, **12**(1990) 193.
- [9] 钱诚德, *原子核物理*, **4**(1982)223.
- [10] D. J. Horen, *Nucl. Data Sheets*, **19**(1976) 383.

Effects of Positive-Parity States Octupole Correlations for Even-Even Nuclei in Rotational Regions

Qian Chengde

(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

Received on February 1, 1993

Abstract

Within the framework of the $U_{sdpf}(16)$ interacting boson model, effects of the octupole degree of freedom p- and f-bosons on the positive-parity states of even-even nuclei in rotational regions are discussed. It is shown that configurations of an even number of p- and f-bosons not only can be incorporated into the usual ground state band, β - γ -vibrational bands, but also naturally form the $K^\pi = 1^+, 3^+$ rotational bands etc. This result is similar to that of the $U_{sdg}(15)$ -IBM. Besides, $E2$ transition probabilities are discussed briefly.

Key words $U_{sdpf}(16)$ -IBM, octupole correlations, ^{176}Hf , $K^\pi = 1^+, 3^+$ rotational bands.