第 18 卷 第 1 期 高能物理与核物理 Vol. 18, No. 1
1994 年 1 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Jan., 1994

具有旋量场的量子虫洞*

王文福[1)] 陶才德[2)] 沈有根[3,4)]

1.(西南石油学院基础科学系 四川南充 637001)
2.(四川师范学院物理系 四川南充 637002)
3.(中国科学院上海天文台 上海 200030)

1992 年 7 月15日收到

摘 要

本文利用 Hawking-Page 的边界条件讨论了具有费米场的量子虫洞，导出了相应的 Wheeler-De Witt 方程，计算了虫洞波函数，由虫洞波函数的分析，发现虫洞在 $a=0$ 处出现几率密度为零，虫洞基态最可几半径为 Planck 尺度.

关键词 虫洞，Wheeler-De Witt 方程，Planck 长度.

1 引 言

众所周知：Wheeler-De Witt 方程[1]存在有这样两类解[2,3]，其中一类是量子宇宙学解，给出一个合理的宇宙波函数，能与宇宙演化相吻合，在经典禁戒区，波函数呈指数衰减型，而在经典允许区，波函数呈振荡型；而另一类是量子虫洞解，它们在经典允许区（对应于 a 由 $r_0\sim l_P$. l_P 为 Planck 尺度），波函数呈振荡型，而在经典禁戒区（对应于 a 由 $r_0\to\infty$）. 波函数呈指数衰减型，这正是 Baby 宇宙以及相应的虫洞的一个较为合理的图象[4].

所谓量子虫洞是指具有确定边界条件的 Wheeler-De Witt 方程的解[1,3]，Hawking，Page 等人指出[5,6]，这类边界条件是波函数在大的三维空间中指数衰减，并当三维空间趋于零时应以某种适当的方式保持正则.

在本文中，我们讨论了与封闭的 Robertson-Walker 时空有最小耦合的自旋为 1/2，3/2 的无质量旋量场的 Wheeler-De Witt 方程，应用量子力学中波函数应满足的标准条件(连续，单值，有限)得到了 Wheeler-De Witt 方程的解，这个解满足 Hawking 提出的虫洞波函数必须满足的边界条件，因而是量子虫洞解。通过对波函数的分析，发现 $a=0$ 处虫洞存在的几率密度为零，而虫洞基态最可几半径为 planck 尺度. 这表明量子效应能使虫洞保持稳定. 这与我们在标量场中所得到的结论是一致的[7].

---

* 国家自然科学基金资助.

4) 中国科学院理论物理所，北京 100080.

2 具有自旋为 $\frac{1}{2}$ 的旋量场的量子虫洞

在这节中，我们讨论与封闭的 Robertson-Walker 时空有最小耦合的自旋为 1/2 的无质量旋量场的量子虫洞。

2.1 Wheeler-De Witt 方程

我们考虑体系的作用量为[8]

$$S = \int \sqrt{-g}\left\{\frac{R}{16\pi G} - \frac{i}{2} e^{\mu a}[\bar{\psi}\gamma_a \nabla_\mu - \text{H.C.}]\right\} \mathrm{d}^4 x. \tag{1}$$

式中，R 是曲率标量，旋量 ψ 的协变导数为

$$\nabla_\mu \psi = (\partial_\mu - iB_\mu)\psi, \tag{2}$$

其中 $B_\mu = \frac{1}{4} e_{\beta a} e^{\beta}_{b;\mu} \sigma^{ab} \equiv \frac{1}{4}\omega_{ab\mu}\sigma^{ab}$，正交标架 $e^{\mu a}$ 满足

$$e^{\mu a} e_{\mu b} = \delta^a_b, \quad e^a_\mu e_{\nu b} = g_{\mu\nu}. \tag{3}$$

习知，Robertson-Walker 时空的线元为

$$\mathrm{d}S^2 = -N^2 \mathrm{d}t^2 + a^2 \Delta_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j. \tag{4}$$

此处 $\Delta_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 - r^2}$，$r^2 = x_i x^i$，$i, j, k = 1, 2, 3$。其中，$N$ 和 a 仅为时间 t 的函数，ψ 也仅为时间 t 的函数。(1)式对空间积分后可得微超空间的作用量为[8]

$$S = \frac{1}{2}\int \left\{ l_P^{-2}\left[\frac{a\dot{a}^2}{N} - Na\right] + ia^3[\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi] + i\frac{3}{2\sqrt{2}} a^2 N \bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi \right\} \mathrm{d}t, \tag{5}$$

其中 $l_P = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}$ 是 Planck 长度。由(5)式我们可求得 a, ψ, ψ^+ 共轭动量为

$$\Pi_a = \frac{a\dot{a}}{l_P^2 N}, \quad \Pi_\psi = \frac{-ia^3\psi^+}{2}, \quad \Pi_{\psi^+} = \frac{ia^3\psi}{2}, \tag{6}$$

由(5)，(6)两式可求得体系的正则 Hamiltonian 为

$$H = H_G + H_F, \tag{7}$$

$$H_G = \frac{1}{2}\left[l_P^2 \frac{\Pi_a^2}{a} + l_P^{-2} a\right], \quad H_F = i\varphi^+ \frac{3}{4\sqrt{2}\, a}\gamma_5 \varphi, \tag{8}$$

其中 $\varphi^+ = a^{\frac{3}{2}}\psi^+$，$\varphi = a^{\frac{3}{2}}\psi$，$H_G$ 和 H_F 分别表示引力部分和旋量场部分的 Hamiltonian。取其经典约束为零，将经典量 $\Pi_a, a, \varphi^+, \varphi$ 算符化后即可完成由经典力学向量子力学的过渡，所得到的量子力学的基本方程为

$$\hat{H}(\hat{\Pi}_a, \hat{a}, \hat{\varphi}^+, \hat{\varphi})\Psi = 0. \tag{9}$$

其中 $\hat{\Pi}_a, \hat{a}, \hat{\varphi}^+, \hat{\varphi}$ 分别表示与经典量 Π_a，a，φ^+，φ 相应的算符，Ψ 是量子化体系的波函数，因为物质场算符 $\hat{\varphi}^+$，φ^+ 和 $\hat{a}$ 对易[8]，所以我们能够将 Ψ 写成 $\hat{H}_F$ 的本征函数与标度因子 a 的函数的乘积，即

$$\Psi = \phi_F \phi_G(a), \tag{10}$$

$$\hat{H}_F \phi_F = \epsilon_F \phi_F, \tag{11}$$

$$\epsilon_F = n_F \lambda(a) = n_F \cdot \frac{3}{4\sqrt{2}\,a}, \quad n_F = \pm 2, \pm 1, 0, \tag{12}$$

作代换 $\Pi_a = -i\dfrac{\partial}{\partial a}$，由(9)式可得到 ϕ_G 所满足的 Wheeler-De Witt 方程

$$\left[a^{-p}\frac{\partial}{\partial a}a^{p}\frac{\partial}{\partial a} - l_p^{-4}a^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}l_p^{-2}n_F\right]\phi_G = 0, \tag{13}$$

其中 p 表示量子引力中的算符次序的模糊，取 $p = -1$[9]，方程(13)可化简为

$$\left[\frac{d^2}{da^2} - \frac{1}{a}\frac{d}{da} - l_p^{-4}a^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}l_p^{-2}n_F\right]\phi_G = 0. \tag{14}$$

2.2 Wheeler-De Witt 方程的解

令 $a^2 = x$，由方程(14)可得

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4}l_p^{-4} - \frac{3}{8\sqrt{2}}l_p^{-2}n_F\frac{1}{x}\right]\phi_G = 0. \tag{15}$$

当 $x \to \infty$ 时，方程(15)的渐近解为

$$\phi_G \propto \exp\left(-\frac{x}{2}l_p^{-2}\right). \tag{16}$$

于是方程(15)的解可写为

$$\phi_G = \exp\left(-\frac{x}{2}l_p^{-2}\right)f(x). \tag{17}$$

将(17)式代入方程(15)可得

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - l_p^{-2}\frac{d}{dx} - \frac{3l_p^{-2}}{8\sqrt{2}}n_F\frac{1}{x}\right]f(x) = 0. \tag{18}$$

我们用幂级数解法求解方程(18)，设

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu x^{\nu+s}. \tag{19}$$

其中，$b_0 \neq 0$。为了保证解在 $x = 0$ 处有限，有 $s \geqslant 0$。将(19)式代入方程(18)，由 $x^{\nu+s-1}$ 的系数为零可得到 b_ν 应满足关系式

$$b_{\nu+1} = \frac{(\nu+s) + 3n_F/8\sqrt{2}}{(\nu+s+1)(\nu+s)}l_p^{-2}b_\nu, \tag{20}$$

当 $\nu \to \infty$ 时，有

$$\frac{b_{\nu+1}}{b_\nu} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \frac{1}{\nu}l_p^{-2}, \tag{21}$$

所以级数(19)在 $\nu \to \infty$ 时的行为与 $\exp(l_p^{-2}x)$ 相同。因而

$$\phi_G = \exp\left(-\frac{x}{2}l_p^{-2}\right)f(x). \tag{22}$$

在 $x \to \infty$ 时，趋于无穷大，这与波函数的有限性相矛盾，因此级数(19)只应包含有限项。

令级数(19)在 $\nu = n_r$ 时中断，则由系数 $b_{n_r+1} = 0$ 可得

$$n_r + s = -\frac{3}{8\sqrt{2}} n_F. \tag{23}$$

另一方面，级数(19)是从 $\nu = 0$ 开始，所以 b_{-1} 必需等于零．以 $\nu = -1$ 代入(20)式可得

$$s(s-1) = 0. \tag{24}$$

因为 n_r 必须为整数，所以由(23)式和(24)式可得

$$s = 0, \quad n_r = 0. \tag{25}$$

其中已取 $n_F = 0$．由(25)式可得 $n_F = 0$ 时的波函数为

$$\phi_G = N_1 \exp\left(-\frac{a^2}{2} l_P^{-2}\right). \tag{26}$$

其中，N_1 为归一化常数．这个解包括原点 $(a = 0)$ 在内的各点正则，在 $a \to \infty$ 时指数衰减，这正好是 Hawking 等所指出的虫洞波函数必须满足的边界条件，因而是量子虫洞解．

下面我们考虑在 $a \to a + da$ 球壳内的几率，由(27)式我们有

$$W_0 = N_1^2 \cdot 3\pi^2 a^2 \exp(-l_P^{-2} a^2), \tag{27}$$

因而有

$$W_0 \xrightarrow[a \to 0]{} 0, \tag{28}$$

这可以解释为虫洞半径不可能为零．几率极大值的位置满足

$$\frac{dW_0}{da} = 0. \tag{29}$$

由(27)式和(29)式可得

$$a_0 = l_P. \tag{30}$$

上式表明量子虫洞的最可几半径为 Planck 长度的数量级．它表明量子效应可以避免虫洞因引力作用塌缩，从而保持了虫洞的稳定性．

3　具有自旋为 3/2 的旋量场的量子虫洞

在这节中，我们讨论与封闭的 Robertson-Walker时空有最小耦合的自旋为 $\frac{3}{2}$ 的无质量旋量场 (Rarita-Schwinger 场)的量子虫洞．

3.1　Wheeler-De Witt方程

我们考虑的体系是与 Robertson-Walker 时空有最小耦合的自旋为 3/2 的 Rarita-Schiwnger 场，其作用量由引力场部分的作用量 S_G 和自旋为 3/2 的物质场的作用量 S_m 两部分构成[10]

$$S = S_G + S_m. \tag{31}$$

其中，

$$S_G = \int d^4x \sqrt{-g}\, \frac{R}{16\pi G}, \tag{32}$$

$$S_m = \int d^4x \left[-\frac{i}{2} e^{\lambda\mu\nu\rho} \bar{\phi}_\lambda \gamma_5 \gamma_\mu \widetilde{D}_\nu \phi_\rho + \text{H.C.} \right],$$

$$\widetilde{D}_\nu = \partial_\nu - \frac{i}{4} \omega_{\nu ab} \sigma^{ab}, \quad \omega_{\nu ab} = e_{\lambda a} e^\lambda_{b;\nu},$$

$$e^{\lambda\mu\nu\rho} = e^\lambda_a e^\mu_b e^\nu_c e^\rho_d e^{abcd}, \tag{33}$$

e^{abcd} 是全反对称符号,且 $e^{0123}=1$,希腊字母 $\mu,\nu,\rho\cdots=0,\cdots,3$ 是黎曼指标,拉丁字母 $a,b,c,\cdots=0,\cdots,3$ 是切空间指标,R 是标量曲率. 标架场 $e^{\mu a}$ 满足

$$e^{\mu a} e_{\mu b} = \delta^a_b, \quad e^a_\mu e_{\nu a} = g_{\mu\nu}. \tag{34}$$

由于我们选取的 Robertson-Walker 时空是空间均匀的,Einstein 场方程就要求物质场 ϕ 也仅为时间的函数. 因此我们可假定物质场 ϕ 的切空间分量 ϕ_m 仅为时间 t 的函数,即 $\phi_m=\phi_m(t)$,若再合理地假定 $\gamma^i\phi_i=0$ $(i=1,2,3)$. 由(31)式对空间积分后可得微超空间的作用量为[10]

$$S = \frac{1}{2}\int dt \left\{ l_P^{-2}\left[\frac{a\dot{a}^2}{N} - Na\right] - ia^3(\phi_i^+\dot{\phi}_i - \dot{\phi}_i^+\phi_i) \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2} iNa^2\phi_i^+\gamma_5\phi_i \right\}, \tag{35}$$

类似于第 2.1 节中步骤,我们可求得体系的 Hamilton,并进而导出 Wheeler-De Witt 方程为

$$\left[\frac{d^2}{da^2} - \frac{1}{a}\frac{d}{da} - l_P^{-4}a^2 - \frac{3}{2} l_P^{-2} n_m\right]\phi_G = 0, \tag{36}$$

其中 $n_m=\pm4,\pm3,\pm2,\pm1,0$.

3.2 Wheeler-De Witt 方程的解

令 $l_P^{-2}a^2=x$,由方程(36)可解

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{4} - \frac{3}{8}\frac{n_m}{x}\right]\phi_G = 0, \tag{37}$$

类似于第 2.2 节中幂级数解法,我们有

$$\phi_G = N_2 \exp\left(-\frac{1}{2} l_P^{-2} a^2\right). \tag{38}$$

N_2 为归一化常数,此解是量子虫洞解.

同样我们可得到量子虫洞的最可几半径为 Planck 长度的结论.

4 讨 论

本文在耦合旋量场 $\left(\text{自旋分别为 } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 下得到的关于量子虫洞的最可几半径为 Planck 尺度结论与我们在物质场为共形标量场下得到的有关结论是一致的[7],与 Visser

等人计算结果亦相符合[11]。

参　考　文　献

[1] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.*, **160** (1967) 1113.
[2] J. B. Hartle and S. W. Hawking, *Phys. Rev.*, **D28** (1983) 2960.
[3] S. W. Hawking and D. N. Page, Preprint, NSF-ITP-90-76.
[4] 沈有根，丁浩刚，中国科学，A辑，(待发表)
[5] S. W. Hawking, *Mod. Phys. Lett.*, **A5** (1990) 453.
[6] S. W. Hawking and D. N. Page, *Phys. Rev.*, **D42** (1990) 2655.
[7] 沈有根，天文学报，**33**(1992)146。
[8] T. Christodoulakis and J. Zanelli, *Phys. Rev.*, **D29** (1984) 2738.
[9] A. Vilenkin, *Phys. Rev.*, **D37** (1988)888.
[10] T. Christodoulakis and G. G. Papadopoulos, *Phys. Rev.*, **D38** (1988) 1063.
[11] M. Visser, *Phys. Rev.*, **D43** (1991) 402.

Quantum Wormhole with Spinor Field

Wang Wenfu[1] Tao Caide[2] Shen Yougen[3]

1) (*Department of Fundamental Science, Southwestern Petroleum Institute, Nanchong* 637001)

2)(*Department of Physics, Sichuan Normal College, Nanchong* 637002)

3)(*Shanghai Observatory, Academia Sinica, Shanghai* 200030)

Received on July 15, 1992

Abstract

Using the Hawking-Page boundary condition, we discuss the quantum wormhole with spinor field. The corresponding Wheeler-De witt equation is derived, and the wave function of the wormhole calculated. After analysing the wormhole's wave function, we found that the probability density of the wormhole appearing at $a=0$ is zero, and the minimal radius of the wormhole is on the Planck scale.

Key Words Wormhole, Wheeler-De Witt equation, Planck length.