第17卷 第11期
1993年11月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 11
Nov., 1993

JBD 直线宇宙弦的量子束缚态*

章世伟
（上海市化工学校 200333）
王仁川
（中国科技大学天体物理中心，合肥 230026）

摘 要

本文探讨了在 Jordan-Brans-Dicke 理论中，直线宇宙弦能否有量子束缚态的问题，并求解了 Klein-Gordon 方程与 Dirac 方程，发现确有束缚态解，而且可能有无限多个. 近似地计算了较低能级的能谱. 估算了 π 介子和电子离宇宙弦最近的束缚态位置，它们分别位于 10^{-13}cm 内和 10^{-7}cm 处，后者的轨道速度为 $10^{-4}c$.

直线宇宙弦的引力场描述的是一个大范围内平坦的 Minkowskian 空间，但移去大小为 $2\pi\delta=8\pi G\eta^2$ 的亏角. 亏角的出现使弦具有引力透镜效应，但双像的分离角实在太小以致观察上至今未能确证[1]. 在直线宇宙弦的引力场中短程线仍为直线，试探粒子感受不到引力，因而不存在束缚轨道[1]. 然而对于其它引力理论中的直线宇宙弦，上述论断是不适用的. 最近 Gundlach 及 Ortiz[2]研究了局部宇宙弦与 Jordan-Brans-Dicke 引力理论相耦合的问题，他们发现这种理论中直线宇宙弦的外部度规可表达为寻常宇宙弦度规乘上共形因子($\sqrt{\lambda}\,\eta\rho)^{2\alpha}$. 此处 $\sqrt{\lambda}\,\eta$ 为弦宽度倒数，ρ 为柱坐标中的径向距离，$\alpha=\pi\delta\beta^2\sim10^{-9}$，其中 $\beta^2\sim10^{-3}$为 JBD 理论中的耦合参数. 他们发现该共形因子的存在将导致试探粒子有经典束缚轨道，轨道线速度小于 $10^{-3}c$. 这就为宇宙弦的存在提供了又一种判据. 文[2]曾考虑过银河系中心是 JBD 直线宇宙弦的可能性，结论是 η 的典型值尚须提高一个量级方能解释太阳绕银心的运动.

本文旨在研究上述经典束缚运动的量子对应，除了理论上的意义之外，还试图通过提供一个粒子云集直线宇宙弦的具体图像，以求进一步找出宇宙弦存在的新的判据. 作为第一步，本文求解了在 JBD 直线宇宙弦的背景空时中的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程. 求解过程中发现，上述共形因子的出现使该方程径向部分的有效势变为无限深的势阱，因而存在束缚态解且束缚态个数可能有无限多。本文计算了束缚态的中心位置，近似地求得了较低能级的能谱，并估算了 π 介子和电子最靠近弦的束缚态位置及轨道线速度.

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文 1992 年 6 月 30 日收到.

1. JBD 直线宇宙弦引力场中 Klein-Gordon 方程的束缚态解

JBD 直线宇宙弦是 Einstein 引力理论中直线宇宙弦的推广. 文[2]从 JBD 引力场(度规 $g_{\mu\nu}$及标量场)与 $U(1)$规范场相耦合出发,导出了代表直线宇宙弦的解. 弦处于 z 轴,其宽度由$(\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}$表征,典型的 GUT 尺度给出$(\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}\sim 10^3 l_{\rm pl}$. Higgs 场集中在弦内部,在弦外其能动张量很快衰减至零,故可略去弦物质的任何影响,为了求得 Klein-Gordon 场以及下节 Dirac 场的束缚解,严格的处理方法应是将它们与引力场,规范场再耦合,求出有物理意义的联立解. 但考虑到 JBD 引力理论是一种度规理论,即引力场的标量部分的作用隐含在度规内,再者弦外部弦物质又可忽略,于是我们可近似地在文[2]给出的弦外部度规所描述的背景空时中来求解 Klein-Gordon 方程及 Dirac 方程.

如文[2]所示,JBD 直线宇宙弦的外部度规为

$$ds^2 = \Omega^2(\rho)[-dt^2 + d\rho^2 + (1-\delta)^2\rho^2 d\phi^2 + dz^2]. \tag{1}$$

单位取 $c=\hbar=1$,亏角 $\Delta=2\pi\delta=8\pi G\eta^2$,共形因子 $\Omega^2(\rho)=(\sqrt{\lambda}\eta\rho)^{2\alpha}$. 这里 $\alpha=\pi\delta\beta^2$,β^2 系 JBD 理论中的耦合参数. 观察给出 $\beta<0.032$[3],典型的 GUT 尺度给定 $\delta\sim 10^{-6}$,$(\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}\sim 10^3 l_{\rm pl}$,因而 $\alpha\sim 2\times 10^{-9}$.

现在考察度规(1)背景中 Klein-Gordon 方程的定态解

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g}\Phi^{,\mu}) - m^2\Phi = 0. \tag{2}$$

$$\Phi = \phi(\rho,\varphi,z)e^{-i\omega t}. \tag{3}$$

考虑到直线弦无限长,可认为 ϕ 与 z 无关. 将(1),(3)代入(2)式,方程化为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2} + \frac{(1+2\alpha)}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho} + \frac{1}{(1-\delta)^2\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + [\omega^2 - m^2\Omega^2(\rho)]\phi = 0. \tag{4}$$

分离变量,令 $\phi(\rho,\varphi)=R(\rho)F(\varphi)$,得角向部分的方程及解为

$$\frac{d^2F}{d\varphi^2} + l^2(1-\delta)^2F = 0.$$

$$F(\varphi) = e^{il(1-\delta)\varphi}. \tag{5}$$

周期性边界条件 $F(0)=F(2K\pi)$要求 $l(1-\delta)=K=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$,可见亏角 δ 的出现使轨道量子数 l 不再是整数[4],

$$l = 0,\ \pm(1-\delta)^{-1},\ \pm 2(1-\delta)^{-1},\cdots\cdots. \tag{6}$$

径向方程为

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{(1+2\alpha)}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + [\omega^2 - \frac{l^2}{\rho^2} - m^2\Omega^2(\rho)]R = 0. \tag{7}$$

可藉标准变换除去一阶导数项,将方程化为 Schrödinger 型

$$G(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}(1+2\alpha)}R(\rho).$$

$$\frac{d^2G}{d\rho^2} + [\omega^2 - V(\rho)]G = 0. \tag{8}$$

$$V(\rho) = \frac{1}{4\rho^2}(4l^2 + 4\alpha^2 - 1) + m^2\Omega^2(\rho) \backsim \frac{1}{4\rho^2}(4l^2 - 1) + m^2\Omega^2(\rho). \tag{9}$$

先讨论 $l\neq 0$ 的情形. 由于 $V(\rho)$中第一项单调下降,第二项单调上升,$V(\rho)$形似无限深的

势阱,故存在束缚态且数目可能无限多.从$\frac{dV}{d\rho}|_{\rho=\rho_0}=0$可求得势阱位置$\rho_0\backsim\frac{1}{m}\sqrt{\frac{4l^1-1}{4\alpha}}$.为准确计算束缚态能谱须借数值法求解,但不难近似地找出低能级的能谱.为此可在ρ_0附近用抛物线逼近$V(\rho)$,将方程(8)化为谐振子势类型.于是得较低能级束缚态的能谱

$$\omega^2=m^2\left\{1+\alpha\left[1+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{4l^2-1}}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}.\ N=0,1,2\cdots\cdots;l=\pm 1,\pm 2\cdots\cdots. \tag{10}$$

为取得直观图像,以π介子为例,$m_\pi=10^{-20}l_{pl}^{-1}$,取$l=\pm1$,得$\rho_0\sim1.7\times10^{-9}$cm.由$\langle L_z\rangle\sim\rho_0m_\pi V\sim\hbar$,得线速度$V\sim6\times10^{-5}c$.当$l=0$,(9)式代表的有效势$V(\rho)$是单调上升的曲线,因为$V(O^+)\sim-\infty,V(\infty)\sim\infty,V'(\rho)>0,V''(\rho)<0$.类似于氢原子基态,方程(8)也应存在束缚态,只要波函数$R(\rho)$无奇性.事实上,当$\rho\to0$时,$G(\rho)\backsim\sqrt{\rho}$,$R(\rho)\sim\rho^{-\frac{1}{2}}G(\rho)$$\backsim$常数.注意到束缚态必须使$\omega^2\geqslant0$,用WKB方法得到的近似能谱为

$$\omega^2=4m^2\left\{\left[\frac{3}{4}\left(N+\frac{3}{4}\right)\right]^{2/3}-\frac{1}{2}\right\}.\ N=0,1,2\cdots\cdots \tag{11}$$

计算表明,最低能级对应于$N=0$,$\omega^2\backsim0.72\text{m}^2$,不难给出转折点位于$0.68\text{m}^{-1}$处.对于$\pi$介子,这样一个最靠近弦的束缚态将集中在$10^{-13}$cm内.

2. JBD直线宇宙弦引力场中Dirac方程的束缚态解.

如同上节,我们在背景引力场中求介Dirac方程.弯曲时空中广义协变的Dirac方程为

$$[\gamma^\mu(x)(\partial_\mu-\Gamma_\mu)+m]\psi(\rho,\varphi,t)=0. \tag{12}$$

其中,联络

$$8\Gamma_\mu=[\partial_\mu\gamma_\lambda(x)]\gamma^\lambda(x)-\gamma^\lambda(x)\partial_\mu\gamma_\lambda(x)+\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}[\gamma^\nu(x)\gamma_\lambda(x)-\gamma_\lambda(x)\gamma^\nu(x)]. \tag{13}$$

式中$\gamma^\mu(x)$为弯曲时空中的Dirac矩阵,满足

$$\{\gamma^\mu(x),\gamma^\nu(x)\}=2g^{\mu\nu}(x),\ (\mu,\nu=0,1,2,3)$$
$$\gamma_\mu(x)=g_{\mu\nu}(x)\gamma^\nu(x). \tag{14}$$

满足此反对易关系的一组解是:$\gamma^0(x)=\Omega^{-1}(\rho)\tilde{\gamma}^0$;$\gamma^1(x)=\Omega^{-1}(\rho)\tilde{\gamma}^1$;$\gamma^2(x)=\Omega^{-1}(\rho)\rho^{-1}(1-\delta)^{-1}\tilde{\gamma}^2$;$\gamma^3(x)=\Omega^{-1}(\rho)\tilde{\gamma}^3$.此处$\tilde{\gamma}^\mu$为平空间中的Dirac矩阵.具体计算给出[5].

$$\Gamma_0=\frac{\alpha}{2\rho}\tilde{\gamma}^0\tilde{\gamma}^1;\ \Gamma_1=0;\ \Gamma_2=\frac{(1-\delta)}{2}(1+\alpha)\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^2;\ \Gamma_3=\frac{\alpha}{2\rho}\tilde{\gamma}^1\tilde{\gamma}^3. \tag{15}$$

为求Dirac方程的定态解,令

$$\psi(\rho,\varphi,t)=\phi(\rho,\varphi)e^{-i\omega t}. \tag{16}$$

利用(15)式及$\beta=-i\tilde{\gamma}^0$,Dirac方程(12)式可化为

$$\left\{\omega+[\partial_\rho+\frac{1}{2\rho}(1+3\alpha)]\beta\tilde{\gamma}^1+\frac{1}{(1-\delta)\rho}\partial_\varphi\beta\tilde{\gamma}^2+m\Omega(\rho)\beta\right\}\phi(\rho,\varphi)=0. \tag{17}$$

分离变量,令

$$\phi(\rho,\varphi)=\begin{bmatrix}u_1(\rho)\\u_2(\rho)\\u_3(\rho)\\u_4(\rho)\end{bmatrix}e^{il(1-\delta)\varphi} \tag{18}$$

其中 $e^{il(1-\delta)\varphi}$为 $\hat{L}_z=-i\hbar\partial_\varphi$ 的本征态,周期性边界条件使

$$l=0,\ \pm(1-\delta)^{-1},\ \pm 2(1-\delta)^{-1},\cdots\cdots \tag{19}$$

取 $\beta=\begin{pmatrix} I, & O \\ O, & -I \end{pmatrix}$,$\beta\tilde{\gamma}^j=-i\begin{pmatrix} O, & \sigma_j \\ \sigma_j & O \end{pmatrix}$,$\sigma_j$ 为 Pauli 矩阵. Dirac 方程(17)可化为径向方程组

$$[\omega+m\Omega(\rho)]u_1-i(\partial_\rho+\frac{1}{2\rho})u_4-\frac{il}{\rho}u_4=0 \tag{20.1}$$

$$[\omega+m\Omega(\rho)]u_2-i(\partial_\rho+\frac{1}{2\rho})u_3+\frac{il}{\rho}u_3=0 \tag{20.2}$$

$$[\omega-m\Omega(\rho)]u_3-i(\partial_\rho+\frac{1}{2\rho})u_2-\frac{il}{\rho}u_2=0 \tag{20.3}$$

$$[\omega-m\Omega(\rho)]u_4-i(\partial_\rho+\frac{1}{2\rho})u_1+\frac{il}{\rho}u_1=0 \tag{20.4}$$

这实际上是 u_1 与 u_4 耦合(20.1;20.4)及 u_2 与 u_3 耦合(20.2;20.3)的两组方程. 前者将给出 $s_z=½$的解(取 $u_2=u_3=0$),后者将给出 $s_z=-½$的解(取 $u_1=u_4=0$). 先考虑 $s_z=\frac{1}{2}$的情形. 消去 u_1 可将(20.1)及(20.4)化为 u_4 的二阶方程,再作变换

$u_4(\rho)=\sqrt{\omega+m\Omega(\rho)}\,g_4(\rho)$. 可得 Sehrödinger 型径向方程

$$\frac{d^2g_4(\rho)}{d\rho^2}+[\omega^2-\overline{V}(\rho)]g_4(\rho)=0.$$

$$\overline{V}(\rho)=m^2\Omega^2(\rho)+\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{\rho^2}-\frac{1}{\rho^2}\frac{\alpha(l-1)m\Omega(\rho)}{\omega+m\Omega(\rho)}+O(\alpha^2). \tag{21}$$

由于式中第三项远小于第二项,

$$\overline{V}(\rho)\sim m^2\Omega^2(\rho)+\frac{(l+\frac{1}{2})^2}{\rho^2}. \tag{22}$$

同样可由(20.2)及(20.3)两式得到 u_3 的二阶方程. 但容易看出,只需将 l 换成$-l$,就可将 u_4 与 u_1 分别换成 u_3 与 u_2 而保持方程不变,由此可知有效势应为

$$\overline{V}(\rho)\sim m^2\Omega^2(\rho)+\frac{(-l+½)^2}{\rho^2}=m^2\Omega^2(\rho)+\frac{\left(l-\frac{1}{2}\right)^2}{\rho^2}. \tag{23}$$

注意到 $j_z=l+s_z$,两种自旋取向的有效势可统一为

$$\overline{V}(\rho)\sim m^2\Omega^2(\rho)+j_z^2/\rho^2. \tag{24}$$

显然,$\overline{V}(\rho)$也构成无限深的势阱,也应有束缚态且可能个数无限多. 如同 Klein-Gordon 情形那样处理,得到势阱位置 $\rho_0\sim\frac{1}{m}\frac{|j_z|}{\sqrt{\alpha}}$. 低能级束缚态能谱为

$$\omega^2=m^2+\left\{1+\alpha\left[1+\frac{2\sqrt{2}}{|j_z|}\left(N+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}.\quad N=0,1,2,\cdots \tag{25}$$

以电子为例,$m_e=4\times10^{-23}l_{pl}^{-1}$,最靠近弦的束缚态取$|j_z|=½$,得 $\rho_0\sim3\times10^{-7}$cm. $|j_z|=½$对应于三种情形:$l=0$;$l=1,S_z=-½$及 $l=-1,S_z=½$. 在后两种情形下轨道速度 $V\backsim$

$10^{-4}c$.

3. **结论**

在JBD引力理论中,直线宇宙弦周围存在试探粒子的束缚轨道[2],本文进一步确证了量子束缚态的存在,这有可能为观察宇宙弦提供一个新的途径.本文求解了Klein-Gordon方程及Dirac方程,找到了束缚态的位置,并近似地给出了低能级束缚态的能谱.计算表明,离宇宙弦最近的π介子束缚态局限于10^{-13}cm区域内,而离弦最近的电子束缚态在10^{-7}cm处,其轨道速度为$10^{-4}c$.

作者对蒋元方教授提出的宝贵意见表示感谢.

参　考　文　献

[1] Vilenkin, A, *Phys. Rep.*, **121**(1985), 263. Hawking, S. W., Three Hundred Years of Gravitation (1987) Cambridge University Press, New York.

[2] Gundlach, C. and Ortiz, M. E. *Phys. Rev.*, **D42**(1990), 2521.

[3] Reasenberg, R. D. et al., *Astrophys.*, **JL219**(1979), 234.

[4] Aryal, M. et al., *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 2263.

[5] Su Rukeng, *KE XUE TONG BAO*, **28**(1983), 1323.

The Quantum Bound States Around the JBD Straight Cosmic String

ZHANG SHIWEI

(*Shanghai School of Chemical Technology, Shanghai* 200333)

WANG RENCHUAN

(*Center of Astrophysics University of Science and Technology of China, Hefei* 230026)

ABSTRACT

In this paper, the existence of bound state solution to Klein-Gordon and Dirac equations under the JBD Straight Cosmic String background is investigated. We prove the existence of such bound states, and point out that the number of which might be infinite. The location and spectrum of bound states of lower energy are calculated. The nearest bound state to string of meson is located within the region 10^{-13}cm. For electron, the nearest one is located at 10^{-7} cm, with orbit velocity $10^{-4}c$. The discovery of quantum bound states mentioned might provide a new mechanism for the observation of the cosmic string.