第 16 卷 第 7 期　　高能物理与核物理　　Vol. 16, No. 7
1992 年 7 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　July, 1992

快报

Schwarzchild 解与 Booth 解是任意维 Riemann 时空中的解的一个亏格的证明*

李富斌[1)]
(中国矿业大学数力系，徐州市 221008)

摘　　要

本文通过实例证明了 Schwarzchild 解与 Booth 解是任意空间维 Riemann 时空中的解的一个亏格.

1981 年，Booch 曾通过在一个时间维与 4 个空间维的时空中对 Rieman 几何学的研究证明了广义 Einstein 方程:

$$G_{ij} = 0, (i, j = 0, 1, \cdots, 4); \tag{1}$$

存在一个真空解，并证明了该解与 Einstein-Maxwell 场方程在适当的超曲面上的无质量 Reissner-Nordstrom 解是相关的[1].

本文将要证明: Booth 解与 Schwarzchild 解均为任意维时空中解的一种亏格的特例. 此外，还将证明所有这些解均满足表示其唯一性和固有本性的 Birkhoff 型定理.

在一个时间维与 n 个空间维所组成的 Riemann 时空中，所用的 Cartesian 坐标为:

$$\{x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n\}, (x^0 = ct); \tag{2}$$

其平坦空间的间隔为:

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \cdots - (dx^n)^2, \tag{3}$$

由于当 $n = 3$ 时，$x_3 = \varphi$，$x_2 = \theta$，$x_1 = r$ 与球面极坐标 (r, θ, φ) 极为相似，故将下式:

$$\{R, x_2, x_3, \cdots, x_n\}, (n > 3); \tag{4}$$

定义为一组超球面极坐标. 再借助于如下的一组方程:

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= R \sin x_2 \sin x_3 \cdots \sin x_{n-1} \cos x_n, \\ x^2 &= R \sin x_2 \sin x_3 \cdots \sin x_{n-1} \sin x_n, \\ x^3 &= R \sin x_2 \sin x_3 \cdots \cos x_{n-1}, \\ &\cdots \\ x^n &= R \cos x_2; \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

便可将(3)式变为下式:

本文 1991 年 9 月 23 日收到.
*国家自然科学基金资助项目.
1) 中国高科技中心(世界实验室).

$$ds^2 = c^2dt^2 - dR^2 - R^2[\![dx_2^2 + \sin^2x_2\{dx_3^2 + \sin^2x_3[dx_4^2 + \cdots + \sin^2x_{n-2}(dx_{n-1}^2 + \sin^2x_{n-1}dx_n^2)\cdots]\}]\!]; \tag{6}$$

若令

$$d\Omega^2 = [\![dx_2^2 + \sin^2x_2\{dx_3^2 + \sin^2x_3[dx_4^2 + \cdots + \sin^2x_{n-2}(dx_{n-1}^2 + \sin^2x_{n-1}dx_n^2)\cdots]\}]\!], \tag{7}$$

则(6)式便可简化为如下形式：

$$ds^2 = c^2dt^2 - dR^2 - R^2d\Omega^2. \tag{8}$$

在弯曲时空中只要将 Weinberg 于 1972 年所创立的方法依照如下方式加以简单推广[2]，便可直接证明：通过一个稳态的超球面扰动便可使时空的间隔 ds^2 发生如下变形：

$$ds^2 = e^{2\alpha}c^2dt^2 - e^{2\beta}dR^2 - R^2d\Omega^2. \tag{9}$$

其中

$$\alpha \equiv \alpha(Rt),\ \beta = \beta(R,t); \tag{10}$$

在 $(n+1)$ 维 Riemam 时空中，通过对(9)式所示的度量，并结合方程(1)加以分析．再依据方程(9)与(10)所定义的度量 ds^2，便可给出下列 Christoffel 符号(指标重复并非指求和)：

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_{00}^0 = \alpha_0,\ \Gamma_{01}^0 = \alpha,\ \Gamma_{11}^0 = \beta_0e^{2(\beta-\alpha)},\ \Gamma_{00}^1 = \alpha_1e^{2(\alpha-\beta)},\\
&\Gamma_{01}^1 = \beta_0,\ \Gamma_{11}^1 = \beta_1,\ \Gamma_{kk}^1 = g_{kk}e^{-2\beta}/R,\ (2 \leqslant k \leqslant n),\\
&\Gamma_{m1}^m = 1/R, \Gamma_{mk}^m = \cot x_k, (2 \leqslant k \leqslant m),\\
&\Gamma_{kk}^m = -\cot x_m g^{mm}g_{kk},\ [(m+1) \leqslant k \leqslant (n-1)], m \geqslant 2;
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

与下列的 Ricci 张量：

$$\left.\begin{aligned}
&R_{00} = e^{2(\alpha-\beta)}[\alpha_{11} + \alpha_1(n-1)/R + \alpha_1\alpha_1 - \alpha_1\beta_1] - \beta_{00} + \alpha_0\beta_0,\\
&R_{01} = \beta_0(n-1)/R, R_{0j} = 0, (j \neq 0,1);\\
&R_{11} = e^{2(\beta-\alpha)}(\beta_{00} + \beta_0\beta_0 - \beta_0\alpha_0) - \alpha_{11} + \beta_1(n-1)/R - \alpha_1\alpha_1 + \beta_1\alpha_1,\\
&R_{ij} = 0, (j \neq 0,1),\\
&R_2^j = \delta_2^j\left[e^{-2\beta}\left(\frac{\alpha_1}{R} - \frac{\beta_1}{R} + \frac{(n-2)}{R^2}\right) - \left(\frac{n-2}{R^2}\right)\right], (i,j \geqslant 2).
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

在方程(11)与(12)中，

$$\alpha_0 = \partial(\alpha)/\partial x^0,\ \alpha_1 = \partial(\alpha)/\partial R, \text{etc.} \tag{13}$$

由上述这些结果便可断定：

$$\partial\beta(R,t)/\partial t = 0, \tag{14}$$

从而有[3]：

$$\beta \equiv \beta(R), \tag{15}$$

$$\beta(R) = -\alpha(R), \tag{16}$$

此外，

$$\frac{1}{R^{n-1}}\frac{d}{dR}\left(R^{n-1}\frac{d}{dR}\right)e^{2\alpha} = 0, \tag{17}$$

$$e^{2\alpha}\left[\frac{2\alpha_1}{R} + \frac{n-2}{R^2}\right] = \frac{n-2}{R^2}, \tag{18}$$

显然,方程(17)是一个用径向参数 R 所表示的 n 维 Laplace 方程,其解为:

$$e^{2\alpha} = A + \frac{B}{R^{n-2}},$$

方程(18)能确保方程(19)中的导数 A 满足下式:

$$A = 1, \tag{20}$$

从而使其解获得渐进平直度.

当 $n = 3$ 时,由方程(19)所表示的解就是 Schwarzchild 解;当 $n = 4$ 时,是 Boo 解. 就唯一性而言,这些解的固有性质也是满足 Birkhoff 定理的.

下面将通过对任意空间维 Riemann 时空的研究导出令人满意的牛顿势概念.

企图寻找(4+1)维时空解的愿望使人们产生了许多迄今尚未证实的猜想. 在这些猜想中, 最令人关注的是如何从任意空间维 Riemann 几何学中导出牛顿的势概念. 而从(4+1)维时空中所求得的解与在合适的超曲面上的大质量 Reissner-Nordstrom 解是相关的. 不过, 上述问题的最终结果将表明: (3+1) 维时空中的 Schwarzchild 解也是(4+1)维时空中的解.

为此,只要给出间隔 ds_1^2:

$$ds_1^2 = e^{2\alpha}c^2dt^2 - e^{-2\alpha}dR^2 - R^2d\Omega^2, \tag{21}$$

和 ds_2^2:

$$ds_2^2 = e^{2\bar{\alpha}}c^2dt^2 - e^{-2\bar{\alpha}}dR^2 - R^2d\Omega^2 - (dx^{n+1})^2, \tag{22}$$

由此发现:

$$e^{2\alpha} = 1 + \frac{B}{R^{n-2}}, \tag{23}$$

另外,由于

$$g_{n+1,n+1} = -1, \tag{24}$$

故容易证得:

$$\bar{\alpha} = \alpha. \tag{25}$$

参 考 文 献

[1] D. J. Booth, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **14**(1981), 2325.
[2] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, London, Wiley, (1972), 175.
[3] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, The classical theory of fields, Oxford, Pergamon, (1975), 326.

Solutions in Riemannian Space-Time of Arbitrary Dimension

Li Fubin

(*The Mathematical-Mechanical Department, China University of Mining Technology, Xuzhou* 221008)

Abstract

By analysing specific examples, it is shown that the Schwarzchild solution and the Booth's solution are a genus of solutions in space-time of arbitrary spatial dimension.