第16卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 16, No. 4
1992年4月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Apr., 1992

高亏格黎曼面上 Liouville 系统的可积性
I. 经典情形

陈一新　高洪波
(浙江大学、浙江近代物理中心，杭州 310027)

摘　要

本文借助于黎曼面单值化理论，讨论了亏格 $g>1$ 黎曼面上 Liouville 方程一般解的性质，计算了经典的交换矩阵，并得出了自由场表述，进而证明了高亏格黎曼面上 Liouville 系统的经典可积性。

一、引　言

自从 Polyakov[1] 关于二维量子引力的论文发表以来，Liouville 系统的经典和量子理论的研究引起人们越来越浓厚的兴趣[2]。这一方面是因为非临界弦理论自然包括 Liouville 模，因而二维引力必然要耦合于物质场。对一般二维世界面上的 Liouville 场论本身的研究因此成为必不可少的。另一方面，作为一个共形不变的场论，Liouville 理论是一类重要的共形场论——Toda 场论的简单情况。最近的工作[3]表明，这些理论中的(量子)交换代数 (exchange algebra) 与量子群[4]具有密切的联系。从特定的物理系统得出的 R 矩阵可以适当地构造出量子群。已知的共形场论和二维引力模型中出现的量子群类型还不很多。是否有更多的量子群对称性"隐藏"在物理系统中？这显然是一个有趣的问题。

在共形场论和二维引力理论的研究中，由于数学的局限，人们多半考虑(拓扑)平凡的二维流形。然而有足够的理由认为一般二维曲面(黎曼面)上的共形场论具有更广泛的意义[5]。在二维离散引力的矩阵模型研究中，双标度极限[6]使得任意亏格的贡献都进入配分函数，因而可以建立低维弦的非微扰理论。相应地，在连续引力 Liouville 理论中如果能发展一种适用于任意亏格的一般黎曼面上 Liouville 系统的经典和量子反问题方法，将无疑有助于二维引力(尤其是强耦合区)问题的解决。

在文献[7]中，Zograf 和 Takhtajan 讨论了黎曼面单值化与 Liouville 方程的联系，并得出了亏格大于 1 的黎曼面覆盖空间上的一般形式的 Liouville 作用量，其变分给出 Liouville 方程。根据单值化定理的一个古老的结论，亏格大于 1 的黎曼面上总存在唯一的与复结构相容的常负曲率度量，作为诱导的 Poincarè 度量，它是 Liouville 方程的一

本文 1991 年 4 月 19 日收到。

般解. Zograf 和 Takhtajan 进而证明，这个解依赖于 $3g-3$ 个复参量. 有趣的是这个解与平直时空中 Liouville 方程的一般解具有类似的性质，如：能-动张量都可表为 Schwartz 微分. 这提示一般黎曼曲面上 Liouville 理论同样是完全可积的. 本文的目的正是在经典情况下证明这一点，并给出经典交换矩阵的详细结果. 有关量子情形的结果我们将在以后的文章中发表.

在下一节里,我们把有关的数学知识作一复习，介绍文献[7]中的一些重要内容；第三节阐述如何应用反问题方法建立一般黎曼面上 Liouville 系统的经典 Hamiltonian 程式,讨论 T 矩阵 Poisson 括号的 r 矩阵表示,展示 Liouville 场量的线性化过程. 通过线性化边界条件给出新的基本场量与 $3g-3$ 个 Schottky 空间参量的联系；第四节给出一般黎曼面上 Liouville 系统的经典交换代数的计算结果；在第五节中对本文得到的一些主要结果进行总结和讨论.

二、Schottky 群和黎曼面的单值化

所谓带标记的(marked)黎曼面 M，是指选定了 M 中的一点 x_0，并且赋予了基本群 $\pi_1(M,x_0)$的一组特定的生成元 $\alpha_i,\beta_i,i=1,\cdots g$,的黎曼面. 我们可以在 x_0 点处沿着M上 $2g$ 个同调闭曲线 α_i,β_i 将这个曲面剪开,并平摊在(扩充)复平面上某个子区域内. 因此任一亏格 $g>1$ 的黎曼面都可以经过“剪开”的反过程,由这些复(子)区域(或称为覆盖空间)得到. 著名的单值化定理就是上述事实的严格数学表述. 按照该定理,“剪开”的反手续指的是覆盖映射;而覆盖空间可以是以下三种之一：1) Poincarè 上半平面 H；2)开圆盘 Δ;以及 3) 扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}$ 本身.

比较常见的覆盖空间是上半平面 H，相应的覆盖映射 $\pi_\Gamma:H\to M$ 的自同构群 Γ 为 Fuchsian 群,它是 PSL$(2,R)$ 的正常不连续子群,并且同构于基本群 $\pi_1(M,x_0)$.令 A_i, B_i 为 Γ 的生成元,它们满足一个关系式:

$$\prod_{i=1}^{g} A_i^{-1}B_i^{-1}A_iB_i=1, \tag{2.1}$$

Γ 在 H 上的作用由(实)分式线性变换 γ 实现:

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}, z\in H, ad-cb=1. \tag{2.2a}$$

$$\mathrm{tr}\,\gamma>2. \tag{2.2b}$$

式(2.2b)意味着 Fuchsian 群 Γ 的元素 γ 均为双曲型.

由离散群理论[8]可知,Klein 群的元素按照其在 $\hat{\mathbb{C}}$ 中的固定点性态或者其矩阵迹的值分布可以划分为椭圆变换($\mathrm{tr}\gamma\in[0,2)$),抛物变换($\mathrm{tr}\gamma=2$),双曲变换($\mathrm{tr}\gamma\in(2,+\infty)$)以及严格斜驶变换($\mathrm{tr}\gamma\notin[0,+\infty)$)诸四种. 全部由严格斜驶变换构成的 Klein 群称为 Schottky 群,记为 Σ.

除了 Fuchsian 群单值化以外,另一种很有用的单值化是利用 Schottky 群作用，以扩充复平面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbf{CP}^1\cup(\infty)$ 作为覆盖空间而得到 $g>1$ 的黎曼面.

每一个严格斜驶变换仅有两个互不等同的固定点[8]，$\gamma(\xi_{1,2})=\xi_{1,2}$，$\xi_1\neq\xi_2$. 因此

Schottky 群的每个生成元 L 可由其固定点 ξ_1，ξ_2 以及一个常量因子 λ 唯一确定（准确到 $SL(2,\mathbf{C})$共轭变换）：

$$\frac{L(w)-\xi_1}{L(w)-\xi_2}=\lambda\frac{w-\xi_1}{w-\xi_2},\quad 0<|\lambda|<1, w\in\hat{\mathbb{C}}, \tag{2.3}$$

显而易见：

$$\begin{aligned}\xi_{1,2}&=\frac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c},\\ \lambda+\frac{1}{\lambda}&=(a+d)^2-2.\end{aligned}\tag{2.4}$$

让我们选取一组 Schottky 群 Σ 的自由生成元 $L_1, \cdots L_g$（这样的 Σ 称作带标记的 Schottky 群），相应的亏格为 g 的带标记的黎曼面可如下得到．

Σ 把 $\hat{\mathbb{C}}$ 映到 $\hat{\mathbb{C}}$．除掉有限个 Σ 的极限点集合，$\hat{\mathbb{C}}$ 中的子集 $\Omega\subset\hat{\mathbb{C}}$ 称为(正常不连续)群 Σ 的不连续区域．Σ 在 Ω 上自由作用，且由单值化定理，Ω/Σ 为一亏格 g 的黎曼面．群 Σ 的基本域为 $\hat{\mathbb{C}}$ 中由 $2g$ 条互不相交的 Jordon 曲线 $A_1,\cdots A_g$，$A'_1,\cdots A'_g$ 围成的区域 $D=\bigcup\limits_{i=1}^{g}D_i\cup D'_i$．一个重要的事实是，$L_i$ 将域 D_i 的内部映到 D'_i 的外部，并且 $A'_i=-L_i(A_i)$，L_i 的作用使得 A_i 和 A'_i 反定向．

(2.3)式说明 Schottky 群可由 $3g$ 个复参量表征．事实上独立的参量个数是 $3g-3$，因此存在从带标记的 Schottky 群 $\{\Sigma, L_i\}$ 到 $\mathbf{C}^{3g-3}$ 中某个子集的自然同构：

$$\{\Sigma, L_i\}\longmapsto(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)},\lambda_i)\in S_g\subset\mathbf{C}^{3g-3}, \tag{2.5}$$

空间 S_g 称为 Schottky 空间．

正如在引言中提到的，任一 $g>1$ 黎曼面 M 上存在唯一的常负曲率度量．令 $ds^2=h\mathrm{d}w\mathrm{d}\bar{w}$，经过简单计算可知，高斯曲率标量为

$$K=-\frac{1}{h}\partial_w\partial_{\bar{w}}\ln h. \tag{2.6}$$

若令 $h=\mathrm{e}^{\varphi}$（对应于共形平度量），则常负曲率的要求推出 Liouville 方程：

$$\partial_w\partial_{\bar{w}}\varphi=e^{\varphi} \tag{2.7}$$

（为方便起见，我们作了曲率的归一化）．Schottky 群单值化的好处在于，它给出方程(2.7)在覆盖空间 $\Omega\subset\hat{\mathbb{C}}$ 上的一类光滑函数解 $\varphi(w)$，形如：

$$\mathrm{e}^{\varphi(w)}=\frac{|\partial_w f(w)|^2}{(\mathrm{Im}f(w))^2},\quad w\in\Omega\subset\hat{\mathbb{C}}. \tag{2.8}$$

因为 Poincarè 度量在 Σ 下不变，故有 φ 的 Schottky 群变换性质：

$$\mathrm{e}^{\varphi(Lw)}=\mathrm{e}^{\varphi(w)}|L'(w)|^{-2}, L\in\Sigma, \tag{2.9}$$

这说明 e^{φ} 与 Σ 的权-4 自守形式有相同变换性质．

(2.8)式中 f 为 Ω 到上半平面 H 的共形映射(f^{-1} 为多值函数)，其 Schwartz 微分恰恰是 Liouville 场 $\varphi(w)$ 的能-动张量：

$$\varphi(f)=\varphi_{ww}-\frac{1}{2}\varphi_w^2\triangleq T_{\mathrm{Liou}}. \tag{2.10}$$

基于这些事实，在 $\varphi(w)$ 如(2.9)式变换的前提下，Zograf 和 Takhtajan 给出了如

下的一般黎曼面上的 Liouville 作用量:

$$S(\varphi)=\frac{1}{2}\int_D(\varphi_w\varphi_{\bar w}+e^{\varphi})d^2w$$

$$-\frac{i}{2}\sum_{i=2}^{g}\int_{A_i}(\varphi\bar L_i''/\bar L_i'd\bar w-\varphi L_i''/L_i'dw)$$

$$+\frac{i}{2}\sum_{i=2}^{g}\int_{A_i}(\log|L_i'|^2)\bar L_i''/\bar L_i'd\bar w-4\pi\sum_{i=2}^{g}\log\cdot|l_i|^2,$$

$$l_i=\frac{1-\lambda_i}{\sqrt{\lambda_i}(\xi_1^i-\xi_2^i)}. \tag{2.11}$$

不难看出,变分 $\delta S=0$ 推出方程(2,7),并且作用量 $S(\varphi)$ 不依赖于基本域D的特殊选取,因此是黎曼面上普适的 Liouville 作用量. 值得指出,Liouville 场φ除了依赖 $w\in\Omega$ 外,还依赖于 Schottky 空间 S_g 中的 $3g-3$ 个坐标!

三、Liouville 方程的经典反问题

在上一节中,我们利用单值化理论给出了黎曼面覆盖空间上的 Liouville 方程及其一般解. 从通常做 Liouville 理论反问题的经验可知[9],形如(2.8)式的一般解正是建立其 Hamilton 程式并完成正则变量与作用-角变量之间转换的出发点.

(A) Lax pair 和零曲率条件

为了表述问题清晰和方便起见,我们引入φ的耦合常数β,并利用 Poincarè 度量的共形不变性,在覆盖空间Ω中引入复坐标关系 $\ln w=t+ix$, $\ln\bar w=t-ix$. 则 Liouville 方程(2.7)化为:

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}-\frac{2}{\beta}e^{\beta\varphi}=0. \tag{3.1}$$

注意到 $\varphi(w)$ 作为Ω上的光滑函数,自然有:

$$\begin{aligned}\varphi(x,t)&=\varphi(x+\text{绕 }A_i,t)=\varphi(x+\text{绕 }A_i',t)\\ \pi(x,t)&\equiv\partial_t\varphi(x,t)=\pi(x+\text{绕 }A_i,t)=\pi(x+\text{绕 }A_i',t).\end{aligned} \tag{3.2}$$

方程(3.1)的可积性可以由线性化方程来体现:

$$\begin{aligned}\partial_xF(x,t)&=U(x,t)F(x,t)\\ \partial_tF(x,t)&=V(x,t)F(x,t),\end{aligned} \tag{3.3}$$

式中

$$U(x,t)=\begin{bmatrix}-\frac{\beta}{4}\pi(x,t) & -\frac{1}{2}e^{\beta\varphi(x,t)/2}\\ \frac{1}{2}e^{\beta\varphi(x,t)/2} & \frac{\beta}{4}\pi(x,t)\end{bmatrix}, \tag{3.4a}$$

$$V(x,t)=\begin{bmatrix}-\frac{\beta}{4}\varphi_x(x,t) & -\frac{1}{2}e^{\beta\varphi(x,t)/2}\\ -\frac{1}{2}e^{\beta\varphi(x,t)/2} & \frac{\beta}{4}\varphi_x(x,t)\end{bmatrix}. \tag{3.4b}$$

零曲率条件

$$\partial_t U(x,t) - \partial_x V(x,t) + [U(x,t), V(x,t)] = 0 \tag{3.5}$$

直接给出 Liouville 方程(3.1)． 值得强调的是，矩阵 U，V 不依赖于谱参量． 这是 Liouville 系统的一个重要特征．

(B) Liouville 系统的 Hamilton 表述

由经典反散射理论知，经典 r 矩阵在反向题求解中扮演着特别重要的角色．它有两个最重要的作用：1)用来计算 monodromy 矩阵的转换系数的 Poisson 括号；2)Poisson 括号的 r 矩阵表示可以代替可积系统的零曲率条件．那么完成经典可积系统的反散射问题转化为求 r 矩阵和 T 矩阵问题．下面我们将求出覆盖空间 Ω 上 Liouville 系统的 r 矩阵及 Poisson 括号的 r 矩阵表达式．

T 矩阵定义为：

$$T(x,x_0) = P\exp\left(\int_{x_0}^{x} U(x',t)\mathrm{d}x'\right), \tag{3.6}$$

式中 P 表示路径编序． 为了求得 T 矩阵 Poisson 括号的 r 矩阵表示，我们应首先计算 $U(x,t)$的 Poisson 括号．利用基本的正则 Poisson 括号 $\{\varphi(x,t), \pi(x,t)\} = \delta(x-y)$ 及表式(3.4a)，经直接计算得：

$$\{U(x,t)\otimes, U(y,t)\} = [r, U(x,t)\otimes 1 + 1\otimes U(y,t)]\delta(x-y), \tag{3.7}$$

(3.7)式中 1 代表 2×2 单位矩阵，我们采用了反散射方法中熟知的张量积记号． 经典 r 矩阵为：

$$r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\alpha} & 2\tilde{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\alpha} = \frac{\beta^2}{8}. \tag{3.8}$$

利用 T 矩阵的超定域性(ultra-locality)，从(3.7)式我们求得 T 矩阵 Poisson 括号的 r 矩阵表示：

$$\{T(x,x_0)\otimes, T(x,x_0)\} = [r, T(x,x_0)\otimes T(x,x_0)]. \tag{3.9}$$

更一般的 T 矩阵 Poisson 括号的 r 矩阵表示式为：

$$\{T(x)\otimes, T(y)\} = (T(x,y)\otimes 1)[r, T(y)\otimes T(y)], x > y; \tag{3.10a}$$

$$\{T(x)\otimes, T(y)\} = (1\otimes T(y,x))[r, T(x)\otimes T(x)], x < y. \tag{3.10b}$$

(3.10)式来自于 T 矩阵的性质 $T(x) = T(x,y)T(y), x > y$ 及(3.9)式． 若将 T 矩阵应用转换系数写出：

$$T(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

则(3.10)确定了转换系数 $A(x), B(x), C(x)$ 和 $D(x)$之间的 Poisson 括号．我们可以通过变量代换将 Liouville 系统线性化．完成线性化的第一步是引入变量：

$$u(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad v(x) = \frac{D(x)}{C(x)}, \tag{3.12}$$

应用(3.10)式给出的转换系数间的 Poisson 括号,经过冗长但直接的计算,我们求得关于 u、v 的基本 Poisson 括号如下:

$$
\begin{aligned}
\{u(x),u(y)\} &= \tilde{\alpha}\,\mathrm{sign}\,(x-y)(u(x)-u(y))^2-\tilde{\alpha}(u^2(x)-u^2(y)),\\
\{v(x),v(y)\} &= -\tilde{\alpha}\,\mathrm{sign}\,(x-y)(v(x)-v(y))^2-\tilde{\alpha}(v^2(x)-v^2(y)),\\
\{u(x),v(y)\} &= -2\tilde{\alpha}(u^2(x)-u(x)v(y)).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

利用 φ,π 的边界条件(3.2)式及 T 矩阵的表达式,我们可以求得 T 矩阵的周期性质:

$$T(x+\text{绕 } A_i\,(\text{或 } A_i'))=T(x,x_0)T^{A_i}(\text{或 } A_i'),\tag{3.14}$$

$T^{A_i}(T_{A_i'})$称作绕 $A_i(A_i')$ 一周的 monodromy 矩阵. 记

$$T^{A_i}=\begin{bmatrix}\alpha_i & \beta_i\\ \gamma_i & \delta_i\end{bmatrix},\quad T^{A_i'}=\begin{bmatrix}\alpha_i' & \beta_i'\\ \gamma_i' & \delta_i'\end{bmatrix},\tag{3.15}$$

那么我们从(3.14)可以给出 $u(x)$,$v(x)$的边界条件:

$$
\begin{aligned}
u(x+\text{绕 } A_i) &= T_P^{A_i}(u(x)),\ v(x+\text{绕 } A_i)=T_P^{A_i}(v(x)),\\
u(x+\text{绕 } A_i') &= T_P^{A_i'}(u(x)),\ v(x+\text{绕 } A_i')=T_P^{A_i'}(v(x)).
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

式中 $T_P^{A_i}$,$T_P^{A_i'}$ 以分式线性变换作用在 $u(x)$、$v(x)$上,其矩阵表示为:

$$T_P^{A_i}=\begin{bmatrix}\delta_i & \beta_i\\ \gamma_i & \alpha_i\end{bmatrix},\quad T_P^{A_i'}=\begin{bmatrix}\delta_i' & \beta_i'\\ \gamma_i' & \alpha_i'\end{bmatrix}.\tag{3.17}$$

这样,我们就完成了变量代换的第一步,φ,$\pi\to u$,v。

(C) u,v 边界条件的线性化与 Schottky 空间参量

从(3.16)式看出,u,v 满足复杂的边界条件. 为了给出 Liouville 系统的自由场表述及计算其经典交换代数,线性化的边界条件是十分必要的. (3.16)的线性化可以通过对角化 $T_P^{A_i}$ 来完成。注意到在覆盖空间 Ω 上,带标记的 Schottky 群有 $2g$ 个固定点,我们可以借助于这 $2g$ 个独立的固定点来对角化矩阵 $T_P^{A_i}$. 记 $z_{1,i}$,$z_{2,i}(i=1,\cdots g)$ 为相应于 $T_P^{A_i}$ 的 $2g$ 个固定点,即

$$T_P^{A_i}(z_{1,2,i})=z_{1,2,i},\quad i=1,\cdots g.\tag{3.18}$$

显而易见:

$$z_{1,i}=\frac{\delta_i-\alpha_i+\sqrt{(\alpha_i+\delta_i)^2-4}}{2\gamma_i},\quad z_{2,i}=\frac{\delta_i-\alpha_i-\sqrt{(\alpha_i+\delta_i)^2-4}}{2\gamma_i}.\tag{3.19}$$

完成变量代换

$$u(x)\to u_i(x)=\frac{u(x)-z_{1,i}}{u(x)-z_{2,i}},\ v(x)\to v_i(x)=\frac{v(x)-z_{1,i}}{v(x)-z_{2,i}}.\tag{3.20}$$

新的变量 u_i,v_i 服从准周期边界条件:

$$
\begin{aligned}
u_i(x+\text{绕 } A_i) &= e^{-2p_i}u_i(x),\\
v_i(x+\text{绕 } A_i) &= e^{-2p_i}v_i(x).
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

式中,参量 p_i 由下述关系给出:

$$e^{p_i}=\delta_i-z_{1,i}\gamma_i;\ e^{-p_i}=\delta_i-z_{2,i}\gamma_i.\tag{3.22}$$

应用(3.19)和(3.22)式,我们得到:

$$e^{2p_i}+e^{-2p_i}=(\delta_i+\alpha_i)^2-2.\tag{3.23}$$

回忆第二节中 Schottky 空间参量 $(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)},\lambda_i)$ 的表示式(2.4)，不难看出 $(z_{1,i},z_{2,i},p_i)$ 与 $(\xi_1^{(i)},\xi_2^{(i)},\lambda_i)$的一一对应关系。

现在我们可以来线性化 $u(x)$的绕 A_i' 圈的边界条件。首先需求得绕 A_i' 的 monodromy 矩阵与绕 A_i 的 monodromy 矩阵的变换关系。所需的技巧是 schottky 群作用下 $\varphi(x,t)$ 和 $\pi(x,t)$ 的变换性质(2.9)式。应用(3.6)式作积分变量代换得：

$$
\begin{aligned}
&T(L_i(x),L_i(x_0))=P\exp\left[\int_{x_0}^{x}U(x',t)\mathrm{d}x'+\int_{x_0}^{x}K_i(x',t)\mathrm{d}x'\right],\\
&K_i(x',t)=\frac{1}{2}\left(\frac{L_i^{-1''}(t+ix')}{L_i^{-1'}(t+ix')}+\frac{\bar{L}_i^{-1''}(t+ix')}{\bar{L}_i^{-1'}(t+ix')}\right)\sigma_3.
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

上式中 $L^{-1'}$ 是指对复变量的求导，$\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. 我们希望建立 $T(L_i(x),L_i(x_0))$与 $T(x,x_0)$ 的联系，注意到 K_i 是与基本场量无关的，利用 Lax pair 方程的规范协变性，可以将(3.24)式中 $K_i(x,t)$ 的贡献规范掉。完成这一过程需细心注意 $K_i(x,t)$ 的奇异性质，即其沿 A_i 圈积分具有非零残数。我们将直接利用 T 矩阵的规范协变性。设

$$T(L_i(x),L_i(x_0))=G_i(x,x_0)\tilde{T}_i(x,x_0),\tag{3.25}$$

使得 $G_i(x,x_0)$ 满足：

$$G_i^{-1}(x,x_0)\partial_xG_i(x,x_0)=G_i^{-1}(x,x_0)K_i(x,t)G_i(x,x_0).\tag{3.26}$$

应用(3.24)—(3.26)式，我们得到 $\tilde{T}_i(x,x_0)$ 满足的方程：

$$\partial_x\tilde{T}_i(x,x_0)=G_i^{-1}(x,x_0)U(x,t)G_i(x,x_0),\tag{3.27}$$

利用(3.27)式 $\tilde{T}$ 的解形式，我们可以将 $T(L_i(x),L_i(x_0))$ 写作(用了形式级数展开)：

$$
\begin{aligned}
T(L_i(x),L_i(x_0))&=G_i(x,x_0)P\exp\left[\int_{x_0}^{x}G_i^{-1}(x',x_0)U(x',t)G_i(x',x_0)\mathrm{d}x'\right]\\
&=T(x,x_0)G_i(x_0,x_0).
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

注意到 $K_i(x,t)$ 的奇异性，$G_i(x_0,x_0)$ 并不恒等于单位矩阵。(3.26)式的一般解形式为：

$$
\begin{aligned}
G_i(x,x_0)&=P\exp\left[\int_{x_0}^{x}K_i(x',t)\mathrm{d}x'+\int_{A_i^m}K_i(x',t)\mathrm{d}x'\right]\\
&=P\exp\left[\int_{x_0}^{x}K_i(x',t)\mathrm{d}x'\right]\begin{pmatrix}e^{-4m\pi}&0\\0&e^{4m\pi}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

式中 A_i^m 指绕 $A_i m$ 圈，$m\in\mathbf{Z}$. 对不同的 m 取值，上式给出不等价的 $G_i(x,x_0)$ 的解，其根源在于 $K_i(x,t)$ 的奇异性，(3.29)式中我们已计入了 $K_i(x_i,t)$ 绕 A_i 的残数。利用 A_i' 与 A_i 的关系：$A_i'=-L_i(A_i)$，以及(3.28)、(3.29)式，我们得到 monodromy 矩阵的变换关系为：

$$T^{A_i'}=T^{A_i}\begin{bmatrix}e^{-4m\pi}&0\\0&e^{4m\pi}\end{bmatrix},\tag{3.30}$$

因此，我们可将 u 绕 A_i' 的边界条件改写为

$$
\begin{aligned}
&u(x+\text{绕 }A_i')=e^{8m\pi}T_P^{A_i}(u(x));\\
&v(x+\text{绕 }A_i')=e^{8m\pi}T_P^{A_i}(v(x)).
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

从(3.20)、(3.21)和(3.31)式不难看出这样的事实：应用变量代换将 $u(x)$ 绕 A_i 圈的边界条件线性化同时，亦将 $u(x)$绕 A_i' 圈的边界条件线性化，结果是：

$$u_i(x+\text{绕 }A_i')=\mathrm{e}^{-2p_i+8m\pi}u_i(x);$$
$$v_i(x+\text{绕 }A_i')=\mathrm{e}^{-2p_i+8m\pi}v_i(x). \tag{3.32}$$

在结束本段之前，我们强调这样的事实：由(3.19)和(3.22)式，$z_{1,i}$、$z_{2,i}$ 和 p_i 依赖于 monodromy 矩阵 T^{A_i} 的矩阵元，因此它们在经典 Hamilton 表述中应看作动力学变量。我们计算了它们之间的 Poisson 括号，发现它们均是正合的，即 Poisson 括号全为零。但它们与 $u(x)$ 的 Poisson 括号非零。我们在计算 $u_i(x)$ 的 Poisson 括号时必须考虑这一因素。

(D) 线性化场量的基本 Poisson 括号和 Liouville 系统的自由场表述

以上我们已经给出了场量 u_i,v_i 的线性化边界条件。下面我们将给出 u_i,v_i 之间的基本 Poisson 括号。由于篇幅限制，我们略去计算的中间过程，在给出结果前说明其来由和计算办法。注意到(3.12)和(3.19)式，$z_{1,i},z_{2,i}$ 和 $u(x),v(x)$ 均依赖于 T 矩阵的矩阵元，故它们的 Poisson 括号可由(3.9)，(3.10)算得，最后再利用(3.20)和(3.13)式算出 $u_i(x)$，$v_i(x)$ 的 Poisson 括号。我们计算了所有这些 Poisson 括号，最后结果是：

$$\{u_i(x),u_i(y)\}=\tilde{\alpha}\,\mathrm{sign}\,(x-y)(u_i(x)-u_i(y))^2+\tilde{\alpha}\mathrm{cth}(p_i)(u_i^2(x)-u_i^2(y)),$$
$$\{v_i(x),v_i(y)\}=-\tilde{\alpha}\mathrm{sign}(x-y)(v_i(x)-v_i(y))^2-\frac{\tilde{\alpha}(v_i(x)-v_i(y))}{\mathrm{e}^{-2p_i}-1} \tag{3.33}$$
$$\cdot[(v_i(x)-1)(v_i(y)-\mathrm{e}^{-2p_i})+(v_i(y)-1)(v_i(x)-\mathrm{e}^{-2p_i})],$$
$$\{u_i(x),v_i(y)\}=\frac{-2\tilde{\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2p_i}}u_i(x)(v_i(y)-1)(v_i(y)+\mathrm{e}^{-2p_i}).$$

应用(3.16)及(3.20)式，我们有：

$$u_i(0)=z_{1,i}/z_{2,i},\quad v_i(0)=1. \tag{3.34}$$

从(3.21)以及 $v_i(0)=1$，利用(3.33)后两式，我们求得 p_i 与 u_i,v_i 的 Poisson 括号如下：

$$\{p_i,v_i(x)\}=0,\quad \{p_i,u_i(x)\}=-2\tilde{\alpha}u_i(x), \tag{3.35}$$

利用(3.33)式，我们算得下述 Poisson 括号：

$$\{\ln u_i'(x),\ln u_i'(y)\}=-2\tilde{\alpha}\,\mathrm{sign}\,(x-y),$$
$$\{\ln v_i'(x),\ln v_i'(y)\}=2\tilde{\alpha}\,\mathrm{sign}(x-y)+\frac{4\tilde{\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2p_i}}(v_i(x)-v_i(y)), \tag{3.36}$$
$$\{\ln u_i'(x),\ln v_i'(y)\}=\frac{-2\tilde{\alpha}}{1-\mathrm{e}^{-2p_i}}(2v_i(y)+\mathrm{e}^{-2p_i}-1).$$

再一次引进场变量代换：

$$P_{1,i}(x)=u_i''(x)/u_i'(x);\quad P_{2,i}(x)=v_i''(x)/v_i'(x). \tag{3.37}$$

从(3.36)式得 $P_{1,i}$ 和 $P_{2,i}$ 的 Poisson 括号：

$$\{P_{1,i}(x),P_{1,i}(y)\}=4\tilde{\alpha}\delta'(x-y);\{P_{1,i}(x),P_{2,i}(y)\}=0,$$
$$\{P_{2,i}(x),P_{2,i}(y)\}=-4\tilde{\alpha}\delta'(x-y);\{p_i,P_{1,2,i}(x)\}=0. \tag{3.38}$$

可从(3.21)得到 $P_{1,2,i}$ 的边界条件：

$$P_{1,i}(x+\text{绕 }A_i(\text{或 }A_i'))=P_{1,i}(x),$$
$$P_{2,i}(x+\text{绕 }A_i(\text{或 }A_i'))=P_{2,i}(x). \tag{3.39}$$

即周期边界条件。$P_{1,2,i}$ 具有如下重要性质：

$$\begin{aligned}&\int_{A_i} P_{1,i}(x)dx = \int_{A_i} P_{2,i}(x)dx = -2p_i\\&\int_{A_i'} P_{1,i}(x)dx = \int_{A_i'} P_{2,i}(x)dx = -2p_i + 8m\pi.\end{aligned} \tag{3.40}$$

这里，我们用到了(3.37)式，以及(3.21)和(3.32)式．上式的物理意义与弦理论中动量的周期零模类似．显然，p_i 为 $P_{1,i}(x)$和 $P_{2,i}(x)$的以 A_i 为周期的零模，其数目等于黎曼面的亏格 g．对于固定的 i，$P_{1,2,i}$ 满足自由场的 Poisson 关系，因此它们体现了 Liouville 系统的自由场描述．

四、经典交换代数

由 u，v 的定义及 Lax Pair 矩阵 U、V 的具体形式，不难验证 u 是解析的；v 是反解析的．经典交换代数结构的讨论可以限制在一个手征片上进行．在本节中，我们只对解析片部分作讨论．

正如文献[2,10]所指出的，所谓经典交换代数是指 Fuchsian 方程线性独立解之间的交换代数性质．Fuchsian 方程为：

$$\Psi'' + \frac{1}{2}\varphi[u(x)]\Psi = 0, \tag{4.1}$$

式中，Schwartz 导数 $\varphi[u]$ 定义为：

$$\varphi[u] = \frac{u'''(x)}{u'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{u''(x)}{u'(x)}\right)^2. \tag{4.2}$$

(4.1)和(4.2)已采用不明显写出时间参量的方便记法，以下类同．由 Schwartz 导数在分式线性变换下的不变性，我们有：

$$\varphi[u(x)] = \varphi[u_1(x)] = \cdots = \varphi[u_g(x)]. \tag{4.3}$$

尽管 $u_i(x)$与 $u(x)$仅仅相差一分式线性变换，但 $u_i(x)$来自于 $u(x)$绕 A_i 和 A_i' 圈非平庸边界条件的线性化．一般黎曼面上 Fuchsian 方程拓扑不等价的解应看作 Fuchsian 方程的线性独立解[11]．由(4.3)式知：方程(4.1)有 $2g$ 个线性独立的解，形为：

$$\phi_{1i}(x) = (u_i'(x))^{-\frac{1}{2}}, \phi_{2i}(x) = u_i(x)(u_i'(x))^{-\frac{1}{2}}, i = 1\cdots g, \tag{4.4}$$

计算 $\phi_{1i}(x)$和 $\phi_{2i}(x)$的 Poisson 括号便可求得经典交换代数．为此我们首先计算 u_i 和 u_j 的 Poisson 括号(u_i 和 u_i 的 Poisson 括号已由(3.33)给出)，采用与计算(3.33)相同的方法，我们求得如下的 Poisson 括号：

$$\begin{aligned}\{u_i(x), u_j(y)\} = \tilde{\alpha}[z_{ij}^{12}z_{ij}^{12}]^{-1}[\mathrm{sign}\,(x-y)(\Delta_{ij}^{(1)}(x,y)\\ - \Delta_{ij}^{(1)}(y,x))^2 + \Delta_{ij}^{(2)}(x,y) - \Delta_{ij}^{(2)}(y,x)],\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，$z_{ij}^{\mu\nu} = z_{\mu i} - z_{\nu j}$，$\mu, \nu = 1,2$；

$$\begin{aligned}&\Delta_{ij}^{(1)}(x,y) = (z_{1i} - z_{2i}u_i(x))(1 - u_j(y)),\\&\Delta_{ij}^{(2)}(x,y) = \mathrm{cth}(p_j)\Delta_{ij}^{(1)}(x,y)[z_{ij}^{11} - z_{ij}^{21}u_i(x) + (z_{ij}^{12} - z_{ij}^{22}u_i(x))u_j(y)].\end{aligned} \tag{4.6}$$

利用上式我们计算了 ϕ_{1i}，ϕ_{2j} 之间的 Poisson 括号．将 $\phi_{1i}(x)$，$\phi_{2i}(x)$按如下方式排成行矢量 $\Psi(x) = (\phi_{11}(x), \phi_{21}(x), \phi_{12}(x), \phi_{22}(x), \cdots \phi_{1g}(x), \phi_{2g}(x))$，那么 Ψ 的 Poisson 括号

可以写成标准的交换代数形式:

$$\{\Psi(x)\otimes,\Psi(y)\} = (\Psi(x)\otimes\Psi(y))Q, \tag{4.7}$$

式中,Q 为与场量 Ψ 无关的 $4g^2\times 4g^2$ 矩阵. 其分量形式为:

$$\{\phi_l(x),\phi_m(y)\} = \sum_{l'm'}\phi_{l'}(x)\phi_{m'}(y)Q_{l'm',lm}, \tag{4.8}$$

我们分以下几种情况分别给出 $Q_{l'm',lm}$ 的表达式:

(1) l,m 均为奇 (odd):

$$\begin{aligned}Q_{l'm',lm} = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}(z^{12}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{l-1}{2}+1}\, z^{12}_{\frac{m-1}{2}+1,\frac{m-1}{2}+1})^{-1}(&a^{oo}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l}\delta_{m',m}\\ &+ b^{oo}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l+1}\delta_{m',m} + c^{oo}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l}\delta_{m',m+1}\\ &+ d^{oo}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l+1}\delta_{m',m+1}),\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$a^{oo}_{i,j} \equiv \mathrm{sign}\,(x-y)z^{22}_{ji}z^{11}_{ji} - \frac{1}{2}(\mathrm{cth}\,(p_j)(z_{1i}+z_{2i})z^{12}_{jj} - i\longleftrightarrow j),$$

$$b^{oo}_{i,j} \equiv -2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{22}_{ji}z^{12}_{ji} + \mathrm{cth}(p_j)z_{2i}z^{12}_{jj} - \mathrm{cth}(p_i)(z_{1j}z^{22}_{ii} + z_{2j}z^{12}_{ii}),$$

$$c^{oo}_{i,j} \equiv -2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{21}_{ji}z^{22}_{ji} + \mathrm{cth}(p_j)(z_{2i}z^{12}_{jj} + z_{1i}z^{22}_{jj}) - \mathrm{cth}\,(p_i)z_{2j}z^{12}_{ii},$$

$$d^{oo}_{i,j} \equiv 2[\mathrm{sign}\,(x-y)(z^{22}_{ji})^2 - \mathrm{cth}\,(p_j)z_{2i}z^{22}_{jj} + \mathrm{cth}\,(p_i)z_{2j}z^{22}_{ii}];$$

(2) l 为奇、m 为偶(even):

$$\begin{aligned}Q_{l'm',lm} = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}(z^{12}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{l-1}{2}+1}\, z^{12}_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}})^{-1}(&a^{oe}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m}{2}}\,\delta_{l',l}\delta_{m',m-1} + b^{oe}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m}{2}}\delta_{l',l+1}\delta_{m',m-1}\\ &+ c^{oe}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m}{2}}\delta_{l',l}\delta_{m',m} + d^{oe}_{\frac{l-1}{2}+1,\frac{m}{2}}\delta_{l',l+1}\delta_{m',m}),\end{aligned} \tag{4.10}$$

$$a^{oe}_{i,j} \equiv -2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{21}_{ji}z^{12}_{ji} + \mathrm{cth}(p_j)(z_{2i}z^{11}_{jj} + z_{1i}z^{21}_{jj}) + \mathrm{cth}(p_i)z_{1j}z^{12}_{ii},$$

$$b^{oe}_{i,j} \equiv (-2)[\mathrm{sign}\,(x-y)(z^{12}_{ji})^2 + \mathrm{cth}\,(p_j)z_{2i}z^{21}_{jj} + \mathrm{cth}\,(p_i)z_{1j}z^{12}_{ii}],$$

$$c^{oe}_{i,j} \equiv -\mathrm{sign}\,(x-y)(z^{22}_{ji}z^{11}_{ji} + z^{22}_{ji}z^{21}_{ji}) + \frac{1}{2}(\mathrm{cth}(p_j)(z_{1i}+z_{2i})z^{12}_{jj} - i\longleftrightarrow j),$$

$$d^{oe}_{i,j} \equiv 2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{12}_{ji}z^{22}_{ji} - \mathrm{cth}(p_j)z_{2i}z^{12}_{jj} + \mathrm{cth}(p_i)(z_{2j}z^{12}_{ii} + z_{1j}z^{22}_{ii});$$

(3) l 为偶、m 为奇:

$$\begin{aligned}Q_{l'm',lm} = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}(z^{12}_{\frac{l}{2},\frac{l}{2}}\, z^{12}_{\frac{m-1}{2}+1,\frac{m-1}{2}+1})^{-1}(&a^{eo}_{\frac{l}{2},\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l-1}\delta_{m',m} + b^{eo}_{\frac{l}{2},\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l}\delta_{m',m}\\ &+ c^{eo}_{\frac{l}{2},\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l-1}\delta_{m',m+1} + d^{eo}_{\frac{l}{2},\frac{m-1}{2}+1}\,\delta_{l',l}\delta_{m',m+1}),\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$a^{eo}_{i,j} \equiv 2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{21}_{ji}z^{11}_{ji} - \mathrm{cth}(p_j)z_{1i}z^{12}_{jj} - \mathrm{cth}(p_i)(z_{2j}z^{11}_{ii} + z_{1j}z^{21}_{ii}),$$

$$b^{eo}_{i,j} \equiv -\mathrm{sign}(x-y)(z^{22}_{ji}z^{11}_{ji} + z^{21}_{ji}z^{12}_{ji}) + \frac{1}{2}(\mathrm{cth}\,(p_j)(z_{1i}+z_{2i})z^{12}_{jj} - i\longleftrightarrow j),$$

$$c^{eo}_{i,j} \equiv 2(-\mathrm{sign}\,(x-y)(z^{21}_{ji})^2 + \mathrm{cth}\,(p_j)z_{1i}z^{12}_{jj} + \mathrm{cth}(p_i)z_{2j}z^{21}_{ii}),$$

$$d^{eo}_{i,j} \equiv 2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{22}_{ji}z^{21}_{ji} - \mathrm{cth}\,(p_j)(z_{2i}z^{12}_{jj} + z_{1i}z^{22}_{jj}) + \mathrm{cth}\,(p_i)z_{2j}z^{12}_{ii};$$

(4) l, m 均为偶:

$$Q_{l'm',lm} = \frac{1}{2}\tilde{\alpha}\left(z^{12}_{\frac{l}{2},\frac{l}{2}} z^{12}_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}}\right)^{-1}\left(a^{ee}_{\frac{l}{2},\frac{m}{2}}\delta_{l',l-1}\delta_{m',m-1} + b^{ee}_{\frac{l}{2},\frac{m}{2}}\delta_{l',l}\delta_{m',m-1}\right.$$
$$\left. + c^{ee}_{\frac{l}{2},\frac{m}{2}}\delta_{l'l-1}\delta_{m',m} + d^{ee}_{\frac{l}{2},\frac{m}{2}}\delta_{l',l}\delta_{m',m}\right), \tag{4.12}$$

$$a^{ee}_{i,j} \equiv 2[\mathrm{sign}\,(x-y)(z^{11}_{ji})^2 + \mathrm{cth}\,(p_j)z_{1i}z^{11}_{ij} - \mathrm{cth}\,(p_i)z_{1j}z^{11}_{ji}],$$
$$b^{ee}_{i,j} \equiv -[2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{12}_{ji}z^{11}_{ji} + \mathrm{cth}(p_j)(z_{1i}z^{21}_{ij} + z_{2i}z^{11}_{ij}) + \mathrm{cth}\,(p_i)z_{1j}z^{12}_{ii}],$$
$$c^{ee}_{i,j} \equiv -2\mathrm{sign}\,(x-y)z^{11}_{ji}z^{21}_{ji} + \mathrm{cth}(p_j)z_{1i}z^{12}_{ji} + \mathrm{cth}(p_i)(z_{2j}z^{11}_{ji} + z_{1j}z^{21}_{ji}),$$
$$d^{ee}_{i,j} \equiv \mathrm{sign}\,(x-y)\,z^{12}_{ji}z^{21}_{ji} - \frac{1}{2}(\mathrm{cth}\,(p_j)(z_{1i} + z_{2i})z^{12}_{ji} - i\longleftrightarrow j).$$

这样，我们就得到了交换矩阵 Q 的明显表达式，它依赖于 $3g-3$ 个 Schottky 空间参量，这意味着 Riemann 面上不同的复结构对应于不同的交换代数结构．人们知道：不同的复结构间是通过拟共形变换相联系的，在一个共形不变的理论中，物理结论应依赖于共形等价类的选择，一般黎曼面上共形场论的配分函数依赖于模参量便是一个典型的例子．因此，Q 矩阵具有上述性质是自然的和合理的．

五、结 束 语

本文通过对一般黎曼面上 Liouville 系统的经典及问题的研究，给出了系统的自由场表述，这将成为以后讨论其量子可积性的出发点．我们给出了 Fuchsian 方程 $2g$ 个线性独立解的形式及它们与转换系数和 Schottky 空间参量的关系，并由此计算了一般黎曼面上的经典交换代数，交换矩阵具有依赖于黎曼面复结构的性质．

感谢高怡鸿、胡红亮、沈建民、王仲华的有益讨论． 高怡鸿和胡红亮在本工作的初期与作者的讨论是极富启发性的．

参 考 文 献

[1] A. M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 893;
V. G. Knizhnik, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 819.
[2] J.-L. Gervais, preprint LPTENS 89/14;
F. Smirnov and L. Takhtajan, preprint PAMUC 90/12.
[3] O. Babelon and C. M. Viallet, preprint SISSA-89-54;
E. Cremmer and J.-L. Gervais, *Commun. Math. Phys.* **134**(1990), 619.
[4] V. G. Drinfeld, proc. ICM-86, Berkeley, **1**(1986), 798;
M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63.
[5] D. Friedan and S. Shenker, *Nucl. Phys.*, **B281**(1987), 509;
T. Eguchi and H. Ooguri, *Nucl. Phys.*, **B282**(1987), 308.
[6] D. Gross and A. Migdal, *Nucl. Phys.*, **B340**(1990), 333.
[7] P. G. Zograf and L. A. Takhtajan, *Math. USSR Sbornik*, **132**(1987), 147.
[8] A. F. Beardon, 《离散群几何》(中译本)北京理工大学出版社(1988).
[9] L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan, *Lect. Notes in Phys.*, **246**(1986), 166;
A. K. Pogrebkov and M. K. Polivanov, *Soviet Sci. Rev.*, **C3**(1985), 198.
[10] L. D. Faddeev, *Commun. Math. Phys.*, **132**(1990), 139.
[11] N. S. Hawley and M. Schiffer, *Acta Math.*, **115**(1966), 199.

Integrability of Liouville System on High Genus Riemann Surface. I. Classical Case

CHEN YIXIN GAO HONGBO

(*Zhejiang Institute of Modern Physics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

ABSTRACT

By using the theory of uniformization of Riemann surfaces, we study properties of the Liouville equation and its general solution on a Riemann surface of genus $g>1$. After obtaining Hamiltonian formalism in terms of free fields and calculating classical exchange matrices, we prove the classical integrability of Liouville system on high genus Riemann surface.