第 15 卷 第 8 期 高能物理与核物理 Vol. 15, No. 8
1991 年 8 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Aug., 1991

快报

q 畸变的 KdV 方程

胡 占 宁

(西北大学物理所，西安，710069)

摘 要

本文由"量子" Virasoro 代数出发，推导出了 q 畸变的 KdV[1)] 方程，当 $q \to 1$ 时，就退化为通常的结果。

一、引 言

近来，对量子群及其代数结构的研究，已有了很大进展，人们已清楚地认识到它与许多精确可解模型、共形场理论都存在着广泛的联系[1-10]。然而，这种代数的直接物理应用仍是不十分清楚的。为此，研究量子 Virasoro 代数的物理实现是重要而有意义的问题，Chaichian 等人对此进行了研究[11]，但其量子 Virasoro 代数的中心项当 $q \to 1$ 时，并不能退化为通常情形。本文采用了一种新的量子化方案[12]，由此出发，推导出了 q 畸变的 KdV 方程，其"格点化"形式为一非线性差分微分方程。当 $q \to 1$ 时，自然回到普通的情形。

二、量子 Virasoro 代数

若定义[12,13]:

$$[L_n, L_m] = (L_n L_m)_q - (L_m L_n)_q, \tag{1}$$

$$(L_n L_m)_q = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \oint_0 \frac{d\omega}{2\pi i} z^{n+1} w^{m+1} (T(z)T(w))_q, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(T(z)T(w))_q = {} & \frac{c/2}{\prod\limits_{k=1}^{2} (zq^{\pm k} - wq^{\mp k})} + \frac{1}{z-w} \\ & \times \left(\frac{T(wq^{-1})}{zq - wq^{-1}} + \frac{T(wq)}{zq^{-1} - wq} \right) + \frac{D_w T(w)}{z-w} + \cdots;\end{aligned} \tag{3}$$

这里，D_x 为 q 参数化的求导算子，定义为:

$$D_x f(x) = (f(xq) - f(xq^{-1}))/(xq - xq^{-1}),$$

本文 1991 年 1 月 28 日收到。

1)KdV 为 Koretweg-de Vries 的缩写。

而

$$\prod_{k=1}^{2}(zq^{\pm k}-wq^{\mp k})=(zq-wq^{-1})(zq^{-1}-wq)(zq^{2}-wq^{-2})(zq^{-2}-wq^{2});$$

由此可以推导出[12],量子 Virasoro 代数满足:

$$[L_n,L_m]=[n-m]L_{n+m}+\frac{c}{2[3][4]}[2n][n+1][n-1]\delta_{n+m,0}, \tag{4}$$

其中,$[x]=(q^x-q^{-x})/(q-q^{-1})$; 当 $q\to 1$ 时,上式就给出通常的 Virasoro 代数:

$$[L_n,L_m]=(n-m)L_{n+m}+\frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0}. \tag{5}$$

三、Virasoro 代数与 KdV 方程

由式(5)所表示的 Virasoro 代数与 Kortewegde Vries (简称 KdV) 方程具有以下联系[14]:

令:

$$u(x)=\frac{6}{c}\sum_{n=-\infty}^{\infty}L_n e^{-inx}-\frac{1}{4}, \tag{6}$$

由(5)式可以得到:

$$[u(x),u(y)]=\frac{6\pi i}{c}[-\delta'''(x-y)+4u(x)\delta'(x-y)+2u'(x)\delta(x-y)]. \tag{7}$$

其中撇号表示对 x 求导。

于是,若把哈密顿量定义为:

$$H=\frac{c}{12\pi}\int_0^{2\pi}dx u^2(x), \tag{8}$$

则由哈密顿方程, $\dot{u}=\frac{1}{i}[u(x),H]$ 可得:

$$\dot{u}=-u'''+6uu'. \tag{9}$$

这就是所谓的 KdV 方程。

四、q 畸变的 KdV 方程

令,

$$u(x)=\frac{6}{c}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}L_n e^{-inx}, \tag{10}$$

其中 L_n 是量子 Virasoro 代数(4)的产生子,若假定[11]:

$$q=e^{i\theta}, \tag{11}$$

θ 为一任意实数。于是,与量子 Virasoro 代数(4)式相对应,我们可以推出:

$$[u(x),u(y)]=\frac{3\pi i}{c}\left(\frac{2a(x,\theta)}{\sin\theta}+\frac{3b(x,\theta)}{\sin\theta\sin 3\theta\sin 4\theta}\right)\delta(x-y), \tag{12}$$

其中：
$$a(x,\theta)=(e^{\theta\partial_x}u(x))e^{2\theta\partial_x}-(e^{-\theta\partial_x}u(x))e^{-2\theta\partial_x},\tag{13}$$
$$b(x,\theta)=2\cos 2\theta\sin h(2\theta\partial_x)-\sin h(4\theta\partial_x);\tag{14}$$
容易证明，当 $\theta\to 0$ 即 $q\to 1$ 时，(12) 式退化为
$$[u(x),u(y)]=\frac{6\pi i}{c}(-\partial_x^3+4u\partial_x+2u'-\partial_x)\delta(x-y).\tag{15}$$

通过变换 $u(x)\to u(x)+\frac{1}{4}$ 知，上式与 (7) 式等价。若假定量子 Virasoro 代数的产生子仍满足：
$$[L_n,L_mL_l]=L_m[L_n,L_l]+[L_n,L_m]L_l,\tag{16}$$
则由式 (8) 及式 (12) 可得：
$$\dot{u}=\frac{1}{2}\left(\frac{2a(x,\theta)}{\sin\theta}+\frac{3b(x,\theta)}{\sin\theta\sin 3\theta\sin 4\theta}\right)u(x).\tag{17}$$
这就是 q 畸变的 KdV 方程。若 $\theta\to 0$，上式就退化为：
$$\dot{u}=-u'''+6uu'-u'.\tag{18}$$
它与 (9) 式完全等价。

q 畸变 KdV 方程 (17) 式可以表示为下面形式，定义：
$$u_{n\pm k}\equiv u(x\pm k\theta,t),\tag{19}$$
实际上，$u(x)$ 也是 t 的函数，由式 (13) 及 (14) 可得：
$$\begin{aligned}au&=u_{n+1}u_{n+2}-u_{n-1}u_{n-2};\\ bu&=\cos 2\theta\cdot(u_{n+2}-u_{n-2})-\frac{1}{2}(u_{n+4}-u_{n-4}).\end{aligned}\tag{20}$$

于是 (17) 式可以表达为：
$$\begin{aligned}4\sin\theta\sin 3\theta\sin 4\theta\dot{u}_n&=4\sin 3\theta\sin 4\theta\cdot(u_{n+1}u_{n+2}-u_{n-1}u_{n-2})\\&\quad+6\cos 2\theta\cdot(u_{n+2}-u_{n-2})-3(u_{n+4}-u_{n-4}).\end{aligned}\tag{21}$$
这是一非线性差分微分方程。

这样，我们从流的观点，给出了量子 Virasoro 代数的一种实现，而这些流是非线性差分微分方程的解。与其有关的守恒律问题及 Miura 变换等，也是我们感兴趣的，值得进一步讨论。

感谢　作者与赵柳博士作了有益的讨论，特表感谢。

参　考　文　献

[1] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, *Lecture Notes in Physics*, **151**(1982), 61.
[2] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.*, **10**(1985), 63; **11**(1986), 247.
[3] E. Witten, Institute for Advanced Study, preprint, IASSNS-HEP-89/32; *Nucl. Phys.*, **B330**(1990), 285.
[4] M. Jimbo, *Int. J. Mod. Phys.*, **A4**(1989), 3759.
[5] M. Rosso, *Commun. Math. Phys.*, **117**(1988), 581.
[6] P. Roche and D. Arnaudon, *Lett. Math. Phys.*, **17**(1989), 295.
[7] L. Avarez-Gaume, C. Gomez and G. Sierra, *Phys. Lett.*, **B220**(1989), 142; *Nucl. Phys.*, **B319**(1989), 155.
[8] Bo-Yu Hou, Bo-Yan Hou and Z. Q. Ma, *Commun. Theor. Phys.*, **13**(1990), 181; **13**(1990), 341.
[9] P. Kulish and N. Reshetikhih, *Lett. Math. Phys.*, **18**(1989), 143.

[10] Hu Zhan-Ning, preprint, NWU-H-90120703.
[11] M. Chaichian, Z. Popowicz and P. Prešnajder, *Phys. Lett.*, **B249**(1990), 63.
[12] Hu Zhan-Ning, preprint, NWU-91010805.
[13] N. Aizawa and H. Sato, preprint, HUPD-9012 July (1990).
[14] J.-L. Gervais, *Phys. Lett.*, **B160**(1985), 277.

The q-Deformed KdV Equation

HU ZHANNING

(*Institute of Modern Physics, Xibei University, Xi'an* 710069)

ABSTRACT

The q-deformed KdV equation was obtained corresponding to the "quantum" Virasoro algebra, which coincides with the usual one in the limit of $q \to 1$.