

## Casimer 效应的一种严格计算方法\*

倪光炯 张敏<sup>a)</sup> 官家文<sup>b)</sup>

(复旦大学物理系, 上海 200433)

### 摘 要

利用复变函数论中的 Plana 求和公式, 我们计算了三维空间内真空电磁场零点起伏的 Casimir 能量, 不引入任何截断参数或函数, 而解出有限的解析表达式, 与已知实验和理论符合. 此外还讨论了在高维空间的和有质量标量场引起的 Casimir 效应.

### 一、引 言

量子场论的一个固有特点是真空中存在着零点能. 由于量子起伏的电磁波模式有无限多而导致零点能的发散. 在通常的场论计算中都把真空能量作为不可观察量而采用算符的正规排列方法略去了这一能量. 可是在 1948 年, Casimir 发现这一能量有它的观察效应<sup>[1]</sup>. 考虑真空中二块边长为  $L$  的正方形金属板, 当它们平行放置而相距为  $a$  时, 会发生一种吸引力, 其数值为:

$$F = - \frac{\partial}{\partial a} E_c = - \frac{\pi^2 \hbar c L^2}{240 a^4}, \quad (1)$$

其中  $E_c$  称为 Casimir 能量, 等于金属板间真空的零点能与二板不存在时的零点能之差<sup>[2]</sup>:

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_a \frac{1}{2} \hbar \omega_a \text{ (板存在时)} - \sum_{a'} \frac{1}{2} \hbar \omega_{a'} \text{ (无板时)} \\ &= \frac{\hbar c}{2} L^2 \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left\{ |\vec{k}_{\parallel}| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \vec{k}_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - 2 \int_0^n dn \left( \vec{k}_{\parallel}^2 + \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

注意: (a) 有板、无板两种情况下, 平行于板面的波矢  $\vec{k}_{\parallel}$  是一样的. (b) 垂直于板面的波数 ( $k_{\perp}$ ) 在有、无板情况下分别是分立的和连续的. (c) 对每一确定的波数, 电磁波的驻波存在二种横极化模式, 唯独对  $n=0$  即  $k_{\perp}=0$  的分立模式, 它只有一种横极化(垂

本文 1990 年 12 月 15 日收到.

\* 国家教委科学基金资助课题.

a) 现在通讯地址: 上海海运学院 1290 信箱.

b) 现在通讯地址: 中科院冶金研究所, 上海长宁路 865 号.

直于金属板面)。

Casimir 效应已由实验证明<sup>[3]</sup>。对它的理论研究和各方面应用有大量的文献<sup>[4]</sup>。本文的目的是探讨一种严格的计算方法,然后将它用于各种情形下  $E_c$  的计算。

## 二、Plana 公式

显然,(2)式中求和与积分分别都是发散的。常用的计算方法是引入一个光滑的截断函数  $f(k)$ <sup>[2,4]</sup>,使累和与积分各自变为有限,取差值后的结果可证明与  $f(k)$  的引入无关,这种计算方法类似于量子场论中常用的正规化手续。不过我们注意到(2)式作为和式与积分之差,可以在数学中找到直接计算的公式。事实上,在复变函数理论中有一个 Plana 求和公式<sup>[5]</sup>,可陈述如下:

定理: 设函数  $f(x)$  当  $\text{Re}z > 0$  为解析,则:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) + \frac{1}{2} f(0) - \int_0^{\infty} f(x) dx = \int_{c_2}^{i\infty} \frac{f(x) dx}{e^{-2\pi i x} - 1} - \int_{-i\infty}^0 \frac{f(x) dx}{e^{2\pi i x} - 1}, \quad (3)$$

其中  $c_1$  和  $c_2$  是复平面(一叶黎曼面)上沿虚轴从  $(-i\infty)$  到 0 和从 0 到  $(i\infty)$  的积分路线。当复平面上沿  $c_1$  和  $c_2$  积分时不遇到割线,即  $f(x)$  为单值函数时,可令积分中  $z = it$ , 便有公式:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) + \frac{1}{2} f(0) = \int_0^{\infty} f(x) dx + i \int_0^{\infty} \frac{f(it) - f(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt. \quad (4)$$

在文献 [6] 和 [7] 中曾用过这个公式。但在本文中我们应该回到原始的公式 (3), 这是因为用到计算 Casimir 能量 (2) 时, (3) 式中的函数  $f(x)$  是个多值函数。

## 三、三维空间电磁场的 Casimir 效应

改写 (2) 式为: (简记  $|\vec{k}_n| = k$ )

$$\begin{aligned} E_c &= \hbar c \frac{L^2}{2a} \int_0^{\infty} k dk \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{ka}{\pi} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n^2 + \left( \frac{ka}{\pi} \right)^2 \right]^{1/2} - \int_0^{\infty} dn \sqrt{n^2 + \left( \frac{ka}{\pi} \right)^2} \right\} \\ &= \hbar c \frac{L^2}{2a} \int_0^{\infty} k dk \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} dn f(n) \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$f(n) = \sqrt{n^2 + \left( \frac{ka}{\pi} \right)^2}. \quad (6)$$

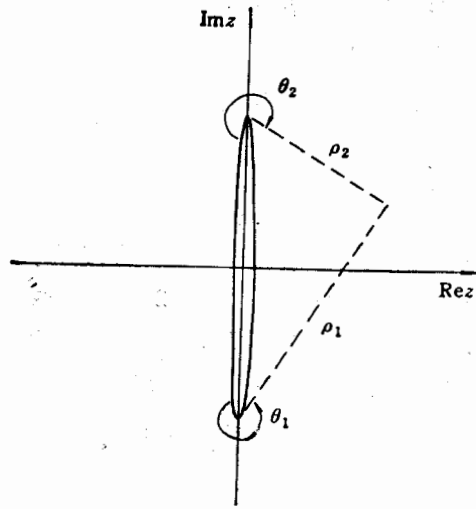
注意 (5) 式括号内恰好有 (3) 式左端的形式, 改记:

$$n = z, \quad \frac{ka}{\pi} = \mu.$$

因而,

$$f(z) = \sqrt{(z + \mu i)(z - \mu i)}. \quad (7)$$

在  $(-\mu i)$  与  $(+\mu i)$  间连一割线, 重要的是确定  $f(z)$  在割线两边的值, 记  $z + \mu i =$



$\rho_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z - \mu i = \rho_2 e^{i\theta_2}$ , 规定辐角  $\theta_1 (> 0)$  和  $\theta_2 (< 0)$  分别为反时针和顺时针量度如图。记沿割线右侧在虚轴上的  $c_1$  和  $c_2$  上的  $z = it$ , 则:

$$f(z) = \begin{cases} \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{(\mu - t)(-\mu - t)} & (-\infty < t < -\mu), \\ \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \sqrt{(\mu + t)(\mu - t)} & (-\mu < t < 0), \\ \sqrt{\rho_1 \rho_2} = \sqrt{(\mu + t)(\mu - t)} & (0 < t < \mu), \\ \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\frac{\pi}{2}} = i\sqrt{(\mu + t)(t - \mu)} & (\mu < t < \infty). \end{cases} \quad (8)$$

于是 (3) 式变成

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) + \frac{1}{2}f(0) - \int_0^{\infty} f(n) dn = -2 \int_{\mu}^{\infty} dt \frac{\sqrt{(\mu + t)(t - \mu)}}{e^{2\pi t} - 1} \quad (9)$$

$$(f(n) = \sqrt{n^2 + \mu^2}).$$

而

$$\begin{aligned} E_c &= -\frac{\hbar c L^2}{a} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_0^{\infty} \mu d\mu \int_{\mu}^{\infty} dt \frac{\sqrt{t^2 - \mu^2}}{e^{2\pi t} - 1} \\ &= -\hbar c \frac{L^2}{a} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dt \frac{t^3}{e^{2\pi t} - 1} \\ &= -\hbar c \frac{L^2}{a} \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \frac{1}{(2\pi)^4} \Gamma(4) \zeta(4). \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\Gamma(4) = 3!$ ,  $\zeta(4) = \pi^4/90$ <sup>[8]</sup>, 便有

$$E_c = -\hbar c \frac{\pi^2 L^2}{720 a^3}. \quad (11)$$

这正是 (1) 式的结果。我们的计算在数学上完全严格, 而且不用任何截断函数或参数。

#### 四、 $n$ 维欧空间的 Casimir 效应

不难把上述计算推广到  $n$  维 ( $n \geq 2$ ) 欧空间  $R^n$  的情形。设在  $R^n$  中有二块 ( $n-1$

1) 维的无限大导体板, 平行地放置于距离为  $a$  的位置上, 则 Casimir 能量密度 (每单位  $n-1$  维面积的 Casimir 能量) 为: ( $\hbar = c = 1$ )

$$U_{(n,a)} = \frac{1}{2} (n-1) \int \frac{d\vec{k}^{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} |\vec{k}| + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ k^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2} - \int_0^{\infty} \left[ k^2 + \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \right]^{1/2} dm \right\}, \quad (12)$$

式中系数  $(n-1)$  代表每一波矢 ( $\vec{k}$ ) 的  $(n-1)$  种极化方式. 注意  $m=0$  对应于  $\vec{k}$  平行于板面, 极化应为  $(n-2)$ , 但此项的贡献在(12)式中不依赖于  $a$  而且表现上发散, 故可以在最后弃去与  $a$  无关的(无物理意义的)项, 而得到正确的结果. 我们在(12)式中保留  $m=0$  项并给它一个合适的系数是为了直接应用 Plana 公式, 只要注意

$$d^n \vec{k} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} k^{n-1} dk, \quad (13)$$

并记  $\frac{k a}{\pi} = \mu$ , 如上节, 可得

$$\begin{aligned} U_{(n,a)} &= - \frac{(n-1) \pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) a^n} \int_0^{\infty} \mu^{n-2} d\mu \int_{\mu}^{\infty} dt \frac{(t^2 - \mu^2)^{1/2}}{e^{2\pi t} - 1} \\ &= - \frac{(n-1) \pi^{\frac{n+1}{2}}}{2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) a^n} \int_0^{\infty} dt \int_0^t d\mu \frac{\mu^{n-2} (t^2 - \mu^2)^{1/2}}{e^{2\pi t} - 1}, \end{aligned} \quad (14)$$

记  $\mu/t = \sin \alpha$ , 用 [8] 中公式完成积分, 得到

$$U_{(n,a)} = -(n-1) \frac{\Gamma(n+1) \zeta(n+1)}{2^{2n-1} \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) a^n} I(n), \quad (15)$$

其中

$$I(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \alpha \sin^{n-2} \alpha d\alpha. \quad (16)$$

特例  $I(2) = \frac{\pi}{4}$ ,  $I(3) = \frac{1}{3}$ .

故

$$U_{(2,a)} = -\zeta(3)/16\pi a^2 \quad (\zeta(3) = 1.20206). \quad (17)$$

$$U_{(3,a)} = -\pi^2/720 a^3. \quad (18)$$

(18) 与 (11) 符合, (17) 与文献 [9] 一致. [9] 中也给出了一般的  $U_{(n,a)}$  表达式, 那里是用一个截断函数得到的.

## 五、矩形空腔内有质量标量场的 Casimir 能量

代替电磁场, 我们来考虑在两面积为  $L^2$  距离为  $a$  的平板间的标量场的 Casimir 能

量。设场满足质量为  $m$  的 Klein-Gordon 方程, 在板面上满足 Dirichlet 边界条件, 则场的本征能量为

$$\omega_k = \left[ k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]. \quad (19)$$

则记  $k_n = k$  后, 其相应的 Casimir 能量为<sup>[4]</sup>

$$\begin{aligned} E_c &= E_{(a,m)} \\ &= \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \int d^2k \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\infty} dn \left[ k^2 + \left( \frac{n\pi}{a} \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

记  $\mu^2 = \frac{(k^2 + m^2)a^2}{\pi^2}$ ,  $f(n) = \sqrt{n^2 + \mu^2}$  后

则

$$E_{(a,m)} = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} \int d^2k \left\{ f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - \int_0^{\infty} f(n) dn \right\}. \quad (21)$$

我们暂时不管有  $\frac{1}{2} f(0)$  这一项(对  $k$  积分后发散)的差, 而直接应用 (9) 式, 计算:

$$E_{(a,m)} = -\frac{L^2}{2a} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{1}{3} \int_{\frac{ma}{\pi}}^{\infty} dt \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} \left[ t^3 - \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (22)$$

以下无法作严格的解析计算, 只能考虑二种极端情形下的近似:

(A) 设  $ma \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} E_{(a,m)} &\approx -\frac{L^2 \pi^2}{6a^3} \int_0^{\infty} dt \frac{1}{e^{2\pi t} - 1} \left[ t^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 t \right] \\ &= -\frac{L^2}{a^3} \left\{ \frac{\pi^2}{1440} - \frac{m^2 a^2}{96} - \dots \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

这与文 [4] 的 (4.34) 式一致。

(B)  $ma \gg 1$ ,

$$\begin{aligned} E_{(a,m)} &\approx -\frac{L^2}{2a} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{1}{3} \int_{\frac{ma}{\pi}}^{\infty} dt e^{-2\pi t} \left[ t^3 - \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 \right]^{3/2} \\ &= -\frac{L^2}{6a} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \left\{ \left[ \left( t^2 - \frac{m^2 a^2}{\pi^2} \right)^{3/2} \left( -\frac{1}{2\pi} \right) e^{-2\pi t} \right]_{\frac{ma}{\pi}}^{\infty} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{ma}{\pi}}^{\infty} e^{-2\pi t} \frac{3}{2} \left[ t^2 - \frac{m^2 a^2}{\pi^2} \right]^{1/2} 2t dt \right\} \\ &\approx -\frac{L^2}{16a^3} \left( \frac{ma}{\pi} \right)^2 e^{-2ma}. \end{aligned} \quad (24)$$

这也与 [4] 的 (4.35) 式在定性上一致。

## 六、结 论

1. 本文建议用复变函数理论中的 Plana 求和公式讨论 Casimir 效应。用这公式去计算各自发散的分立模式零点能的和与连续模式零点能的和的差值时, 得到有限的解析表达式而无需引入任何人为的截断参数或截断函数。对于三维空间电磁场的 Casimir 效应, 结果与已知理论和实验值完全符合, 证明本方法是严格可靠的。

2. 对于其它情形下 Casimir 效应的讨论, 除了遇到解析计算的困难时必须作一些近似外, 还可能发生  $n = 0$  与  $n \geq 1$  的模式的贡献不能表成定理所要求的 (3) 式的情况。这时作为一个“工作假设”, 我们可以增或减  $\frac{1}{2} f(0)$  一项而仍然应用定理, 因为这一项虽然可能是发散的, 却常常与我们感兴趣的参数 (如两板间距离  $a$ ) 无关。我们考虑了许多情况和下一点的理由, 觉得这样的假设是合理的。

3. 考虑到实验上仅能测量 Casimir 力  $F = -\frac{\partial}{\partial a} E_c$ , 而不是 Casimir 能量本身, 用这种 Plana 公式去计算  $E_c$  还不妨看作是一种“正规化”手续, 不过物理意义似乎更加明显合理罢了。从这观点也可以理解为什么文献中有这么多不同的正规化方法而可算出同样的 Casimir 能量。也因此, 本文建议的这种计算一个 (发散的) 累和与相应的 (发散) 积分之差的办法或许会有更广的用途。我们希望以后再讨论这些问题。

## 参 考 文 献

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. kon. Med. Akad. Wet **51**(1948), 793.
- [2] C. Itzykson and J-B Zuber, Quantum Field Theory, (MCGRAW-HILL). p. 138.
- [3] B. V. Deryagin and I. I. Abricosova, J. Exp. Theor. Phys. U. S. S. R. **21**(1951) 945; M. J. Sparnaay, Physica, **24**(1958), 751. D. Tabor and R. M. S. Winterton, Proc. Roy. Soc., **A312**(1969), 435.
- [4] G. Plunien, B. Müller and W. Greiner, Phys. Rep., **134**(1986), 87.
- [5] E. Lindelöf, Le Calcul des Residues, (Gauthier-Villars, Paris, France, 1905) Chap. III.
- [6] L. H. Ford, Phys. Rev. D., **38**(1988), 529.
- [7] Yu-Liang Liu and Guang-jiong Ni, Phys. Rev., **D38**(1988), 3840.
- [8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, 1980), p. 325, 1074.
- [9] H. Verschelde, L. Wille and P. Phariseau, Phys. Lett., **149B** (1984), 396.

## A Rigorous Method for Calculating the Casimir Effect

NI GUANGJIONG    ZHANG MING    GONG JIAWEN

(Physics Department, Fudan University, Shanghai 200433)

### ABSTRACT

Using the Plana summation formula in complex variable function theory, we have calculated the Casimir energy related to the zero-point fluctuations of electromagnetic fields in three dimensional space without introducing any cutoff parameter or function. The finite analytical expression obtained coincides precisely with the known experimental and theoretical results. The Casimir effects in high dimensional space and relevant to massive scalar field are also discussed.