

稀土区变形核十六极矩与 核子间的相互作用

王 振 荣钟麟

(苏州大学物理系, 215006)

吴 华 川

(苏州大学物理系, 215006; 中科院理论所客座)

摘 要

本文采用区分质子和中子的 BCS 方法, 用尽量少的参数计算了整个稀土区偶-偶核的十六极矩 Q_{40} 与四极矩 Q_{20} 值, 部分结果与实验有较好的符合。实验与理论计算的结果还表明, 同种核子间的四极相互作用强度仅为质子、中子间四极相互作用的五分之一, 但对于解释 Q_{40} 的规律是十分重要的。

一、引 言

稀土区部分变形偶-偶核的内禀十六极矩 (Q_{40}) 呈现明显的规律性^[1-3], 因而为研究核子间的相互作用与关联提供了极好机会。Bertsch 用 Polar Cap Model (PCM)^[4] 对上述规律作出了定性的描述, 本文作者也用单 i 的 BCS 方法对上述规律作出了定性的解释^[5]。但单 i 的 BCS 方法只能定性解释物理量随质量数变化的总体规律, 无法对具体的核素进行定量描写。本文仍拟运用 BCS 方法, 且区分质子与中子, 并采用真实核的壳模型轨道, 对稀土区变形偶-偶核的 Q_{40} 进行定量的研究。通常区分质子、中子的 BCS 方法是先在四极力的情况下通过自洽计算确定单粒子能级, 再解 BCS 方程以考虑对力的影响。本文通过自洽地求解 BCS 方程, 同时确定单粒子能级与轨道占有率 ν_{μ}^2 , 这种方法(以下称自洽 BCS 方法)一方面使计算过程简化, 另一方面自然地考虑了对力对自洽场的影响。

BCS 方法的缺陷在于其破坏了粒子数守恒, 而对变形核进行粒子数投影又是一个十分麻烦的过程。在单 i 情形下对价核子数 $N \leq 10$ 的粒子数投影分析表明^[5], 就 Q_{40} 理论计算值而言, 由粒子数不守恒引起的误差并不大, 因而本文用自洽的 BCS 方法对 Q_{40} 的定量计算具有一定的可信度。

另一方面, IBM 微观理论中关于角动量为 4 的核子对(G 对)的重要性的问题, 也是核子间关联的一个重要方面。在这方面已有不少作者^[6-8]作过研究, 本文作者也定性地表

明了^[1] G 对于解释十六极矩也是不可缺少的。然而,单 i 模型是过于简单的近似,因而其结论仅具有定性的意义。在区分质子与中子的情形下,由于核子填充各单粒子轨道的情形极其复杂,因而 Q_{40} 特性对各种截断方式的敏感程度应当比单 i 情形要强。所以本文的定量计算为研究 G 对重要性提供了一个更好的机会。

本文的第二部分简述自洽 BCS 方法;第三部分对具体核的 Q_{40} 进行定量计算;第四部分研究 G 对 Q_{40} 的贡献;最后是结论与讨论。

二、自洽 BCS 方法

取哈密顿量 H 为如下的形式:

$$H = H_{i,p} - G_0^* S_\pi^+ S_\pi - G_0^* S_\nu^+ S_\nu - \kappa_\pi Q_\pi \cdot Q_\pi - \kappa_\nu Q_\nu \cdot Q_\nu - \kappa_{\pi\nu} Q_\pi \cdot Q_\nu, \quad (2.1)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} H_{i,p} &= \sum_{i_\pi m_\pi} \varepsilon_{i_\pi} b_{i_\pi m_\pi}^+ b_{i_\pi m_\pi} + \sum_{i_\nu m_\nu} \varepsilon_{i_\nu} b_{i_\nu m_\nu}^+ b_{i_\nu m_\nu}, \\ S_\tau^+ &= \sum_{i_\tau m_\tau > 0} b_{i_\tau m_\tau}^+ b_{i_\tau \bar{m}_\tau}^+, \quad (\tau = \pi, \nu), \\ Q_\tau &= \sum_{i_\tau m_\tau} \langle i_\tau m_\tau 20 | i_\tau m_\tau \rangle b_{i_\tau m_\tau}^+ b_{i_\tau m_\tau}, \quad (\tau = \pi, \nu) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

以上各式中的 π 代表质子, ν 代表中子; G_0^* 、 G_0^0 分别表示质子、中子的对力强度; $\kappa_{\pi\nu}$ 为质子-中子四极相互作用强度, κ_π 、 κ_ν 分别为质子-质子、中子-中子四极相互作用强度。BCS 波函数为,

$$|0\rangle\rangle = |0\rangle\rangle_\pi \cdot |0\rangle\rangle_\nu, \quad (2.3)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} |0\rangle\rangle_\pi &= \prod_{i_\pi m_\pi} (u_{i_\pi m_\pi} + v_{i_\pi m_\pi} S_{i_\pi m_\pi}^+) |0\rangle, \\ |0\rangle\rangle_\nu &= \prod_{i_\nu m_\nu} (u_{i_\nu m_\nu} + v_{i_\nu m_\nu} S_{i_\nu m_\nu}^+) |0\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

归一化条件为,

$$\left. \begin{aligned} v_{i_\pi m_\pi}^2 + u_{i_\pi m_\pi}^2 &= 1, \\ v_{i_\nu m_\nu}^2 + u_{i_\nu m_\nu}^2 &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

总粒子数的平均值为,

$$\bar{N} = \bar{N}_\pi + \bar{N}_\nu, \quad (2.6)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_\pi &= 2 \sum_{i_\pi m_\pi} v_{i_\pi m_\pi}^2, \\ \bar{N}_\nu &= 2 \sum_{i_\nu m_\nu} v_{i_\nu m_\nu}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

利用对质子及中子分别求条件极值的方法不难得到,

$$\left. \begin{aligned} 2[\varepsilon_{i_\pi} - 2\langle j_\pi m_\pi 20 | j_\pi m_\pi \rangle (AFF1 + BFF1) - \lambda_\pi] v_{i_\pi m_\pi} u_{i_\pi m_\pi} \\ = (u_{i_\pi m_\pi}^2 - v_{i_\pi m_\pi}^2) \Delta_\pi, \\ 2[\varepsilon_{i_p} - 2\langle j_p m_p 20 | j_p m_p \rangle (AFF2 + BFF2) - \lambda_p] v_{i_p m_p} u_{i_p m_p} \\ = (u_{i_p m_p}^2 - v_{i_p m_p}^2) \Delta_p, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_\pi &= G_0^\pi \left(\sum_{i_\pi m_\pi} v_{i_\pi m_\pi} u_{i_\pi m_\pi} \right), \\ \Delta_p &= G_0^p \left(\sum_{i_p m_p} v_{i_p m_p} u_{i_p m_p} \right), \\ AFF1 &= 2\kappa_\pi \sum_{i_\pi m_\pi} \langle j_\pi m_\pi 20 | j_\pi m_\pi \rangle v_{i_\pi m_\pi}^2, \\ BFF1 &= \kappa_{\pi p} \sum_{i_p m_p} \langle j_p m_p 20 | j_p m_p \rangle v_{i_p m_p}^2, \\ AFF2 &= 2\kappa_p \sum_{i_p m_p} \langle j_p m_p 20 | j_p m_p \rangle v_{i_p m_p}^2, \\ BFF2 &= \kappa_{p\pi} \sum_{i_\pi m_\pi} \langle j_\pi m_\pi 20 | j_\pi m_\pi \rangle v_{i_\pi m_\pi}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

由(2.8)式可见,质子和中子在各轨道上的分布几率与其单粒子能级互相关联,互相影响.因而需要自洽地进行求解.

三、 Q_{40} 的定量计算

电多极矩的表达式可写为^[9]:

$$\begin{aligned} Q_{\lambda 0} &= \kappa_\lambda e_{\text{eff}} \sum_{jj'} \left(\frac{2j+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} (-1)^{l+l'+j-j'} \cdot \left\{ \frac{1 + (-1)^{l+l'+\lambda}}{2} \right\} \\ &\cdot \left\langle j \frac{1}{2} \lambda 0 \left| j' \frac{1}{2} \right\rangle \cdot \int R_{j'} R_j r^{\lambda+2} dr [b_{j'}^\dagger \times \tilde{b}_j]_0^\lambda. \end{aligned} \quad (3.1)$$

在核内禀基态上有:

$$Q_{40} = \sqrt{\frac{9}{4\pi}} \kappa_4 \sum_\tau e_\tau \langle r^4 \rangle_\tau \sum_{i_\tau} 2 \left\langle j_\tau \frac{1}{2} 40 \left| j_\tau \frac{1}{2} \right\rangle \sum_{m_\tau} \langle j_\tau m_\tau 40 | j_\tau m_\tau \rangle v_{i_\tau m_\tau}^2, \quad (3.2)$$

$$Q_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \kappa_2 \sum_\tau e_\tau \langle r^2 \rangle_\tau \sum_{i_\tau} 2 \left\langle j_\tau \frac{1}{2} 20 \left| j_\tau \frac{1}{2} \right\rangle \sum_{m_\tau} \langle j_\tau m_\tau 20 | j_\tau m_\tau \rangle v_{i_\tau m_\tau}^2, \quad (3.3)$$

以上两式中, $\kappa_4 = (16\pi/9)^{1/2}$, $\kappa_2 = (16\pi/5)^{1/2}$, e_τ 为有效电荷, $\langle r^4 \rangle$ 、 $\langle r^2 \rangle$ 分别为 r^4 、 r^2 的平均值.

据壳模型,稀土区质子、中子的轨道为

质子: $1g_{7/2}$ 、 $5d_{5/2}$ 、 $1h_{11/2}$ 、 $2d_{3/2}$ 、 $3s_{1/2}$;

中子: $2f_{7/2}$ 、 $1h_{9/2}$ 、 $1i_{13/2}$ 、 $3p_{3/2}$ 、 $2f_{5/2}$ 、 $3p_{1/2}$ 。

为了考验自洽 BCS 方法的合理性,计算中所用参数,均取自其他文献。按文献[10], G_0^{π} 与 G_0^{ν} 虽不完全相等,但它们之间的差别很小,故在计算中取 $G_0^{\pi} \approx G_0^{\nu} \approx 0.2^{[10]}$ 。 $\kappa_{\pi\nu}$ 取为 $1.0^{[11]}$; $\langle r^2 \rangle = \frac{3}{5} R_0^2^{[12]}$ ($R_0 = 1.2A^{1/3}\text{fm}$, A 为原子核的质量数);根据文献[9],作为核心激发度量的有效电荷 e_{π} 及 e_{ν} 分别取为 $1.2e$ 及 $0.4e$ 。

关于 κ_{π} 及 κ_{ν} 的大小迄今未见过详细的讨论,但一般都认为, κ_{π} 、 κ_{ν} 与质子-中子四极相互作用相比是比较小的。本文假定 $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu}$, 并通过使 Q_{20} 的计算值与实验值相符合而定出 κ_{π} 数值。图 1 中给出了稀土区核的 Q_{20} 的实验值及 $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0.2 = \kappa_{\pi\nu}/5$ 的计算结果。由图 1 不难看出: $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0.2$ 时, Q_{20} 计算结果与实验符合得很好。与之对照, $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0$ 的计算结果则与实验值有很大的差别。这说明, 质子-质子、中子-中子之间的四极相互作用是不可忽略的。其他作者在广义 Seniority 模型的研究中亦得到类似结论^[13]。

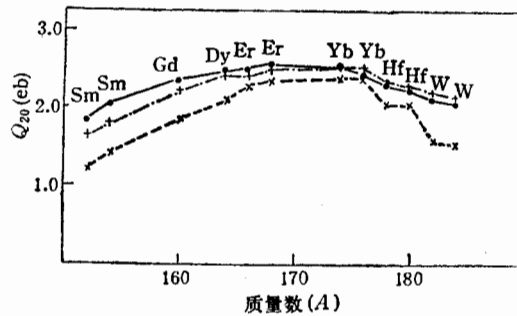
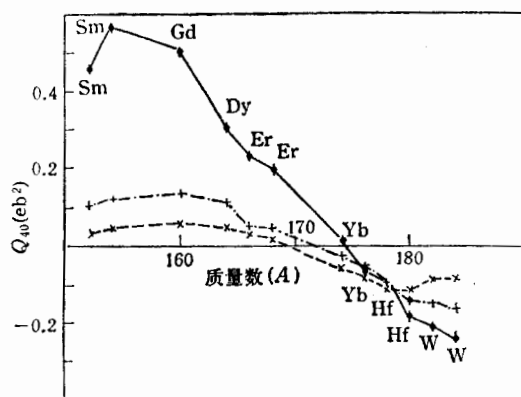


图 1 稀土区部分变形偶-偶核的 Q_{20} 实验值及计算结果

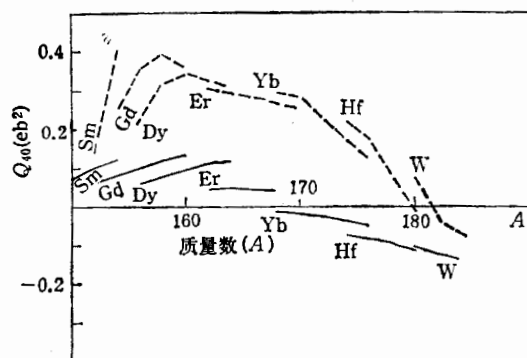
—·—·—·实验值 + + $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0.2$ 的计算结果 * * * * * $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0$ 的计算结果

将上面定出的 $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0.2$ 用于 Q_{40} 的计算, 这样在 Q_{40} 计算中就没有可调参数。图 2 中给出了 Q_{40} 的实验值和计算结果。可以看出: 虽然某些核的 Q_{40} 的计算结果与实验值尚有较大的差别, 但在整个区间 Q_{40} 随质量数变化的总体规律上理论与实验的相符情况不算坏, 尤其对 $A > 170$ 的核, 符合得很不错。考虑到在解释整个稀土区的变形核的 Q_{40} 特性没有用到可调参数, 上述符合程度可以说明本文的模型虽然简单, 但具有相当的合理性。理论与实验最大的偏差出现在 Sm 和 Gd 处。注意到此处 Q_{20} 理论值亦小于实验值, 如调整 $\kappa_{\pi\nu}$ 使之相符, 则相应的 Q_{40} 值将增大。图中也给出了 $\kappa_{\pi} = \kappa_{\nu} = 0$ 的 Q_{40} 计算结果以资对照。不难看出, 质子-质子、中子-中子的四极相互作用虽然较弱, 但对 Q_{40} 的影响是明显的。

图 3 中我们给出了用自洽 BCS 方法计算的稀土区同位素的 Q_{40} 随质量数变化的规律性。对 Sm、Gd、Dy 等同位素, Q_{40} 随质量数的增加而增加; 对 Er 同位素, 随着质量数的增加, Q_{40} 先增加再减小; 对 Yb 以后的同位素, 则随着质量数的增加, Q_{40} 逐渐减少。图中

图 2 稀土区部分变形偶-偶核 Q_{40} 的实验值及计算结果

·——·实验值; +——+ $\kappa_x = \kappa_y = 0.2$ 的计算结果; *····* $\kappa_x = \kappa_y = 0$ 的计算结果

图 3 稀土区各偶-偶同位素 Q_{40} 的计算结果

----DDHF 结果; ——自洽 BCS 结果

还列出了 Ichihara 等人用 DDHF 方法所得的各同位素 Q_{40} 的结果^[14]。各同位素的 Q_{40} 随质量数变化的规律和用自洽 BCS 方法所得规律相似。将两种方法所得结果与图 2 中实验值相比较不难发现, 在 $A = 152-168$ 区间, DDHF 所得结果更接近实验, 而自洽 BCS 的结果小于实验值较多; 但在 $A = 170-190$ 区间, 自洽 BCS 所得的结果更接近实验值。更重要的一点是: Q_{40} 在主壳层中间经历由正到负的过渡, 自洽 BCS 的计算在一定程度上再现了这一过渡, 而 DDHF 的计算结果中 Q_{40} 值与横轴交点却与此有较大偏差。由[14]可知, DDHF 系用密度矩阵展开 (DME) 有效哈密顿量的方法, 计算过程很复杂(对于每个核, 要迭代 75 次, 且每次都要花费很长的时间)。相比之下, 自洽 BCS 虽然在主壳层前半部分给出的 Q_{40} 过小, 但该方法物理图象清楚, 计算量小, 对于整个区间的核的 Q_{40} 计算没有一个可调参数, 且便于研究核内核子间的关联(参见第四部分), 因而该方法具有相当的合理性。

四、G 对对 Q_{40} 的贡献

关于对结构的讨论,本文所采用的方法与文献[5]是相同的,区别仅在于本文区分中子和质子,并考虑了多 i 轨道。下面仅列出一些主要公式,计算中所用参数则与前一节中相同。

$$|N_0\rangle = |N_{0\pi}\rangle \cdot |N_{0\nu}\rangle, \quad (4.1)$$

其中 $|N_{0\pi}\rangle$ 、 $|N_{0\nu}\rangle$ 分别为质子数与中子数之本征态,并有

$$|N_{0\tau}\rangle = N_{\tau}^{-1} (\Lambda_{\tau}^{\dagger})^{\frac{N_{0\tau}}{2}} |0\rangle, \quad (\tau = \pi, \nu) \quad (4.2)$$

$$\Lambda_{\tau}^{\dagger} = \sum_{i_{\tau} m_{\tau}} c_{i_{\tau} m_{\tau}} b_{i_{\tau} m_{\tau}}^{\dagger} b_{i_{\tau} \bar{m}_{\tau}}^{\dagger}, \quad (\tau = \pi, \nu) \quad (4.3)$$

$c_{i_{\tau} m_{\tau}} \sim v_{i_{\tau} m_{\tau}}/u_{i_{\tau} m_{\tau}}$, 且保证 ${}_{\tau}\langle 0 | \Lambda_{\tau} \Lambda_{\tau}^{\dagger} | 0 \rangle_{\tau} = 1$, N_{τ} 为归一化常数, Λ_{τ}^{\dagger} 称为内禀系中 Cooper 对^[5]。将 Λ_{τ}^{\dagger} 按角动量进行展开有

$$\Lambda_{\tau}^{\dagger} = \sum_{J_{\tau}} X_{J_{\tau}} a^{+(J_{\tau})}, \quad (4.4)$$

其中 $a^{+(J_{\tau})}$ 是角动量为 J 的质子对或中子对, $X_{J_{\tau}}$ 为其振幅,

$$a^{+(J_{\tau})} = \sum_{i_{\tau}} \alpha_{J_{\tau}(i_{\tau})} A_{J_{\tau}(i_{\tau})}^{\dagger}. \quad (4.5)$$

上式中的 $A_{J_{\tau}(i_{\tau})}^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_{i_{\tau}}^{\dagger} \times b_{i_{\tau}}^{\dagger}]^{(J_{\tau})}$ 是 i 轨道的质子或中子构成的角动量为 J_{τ} 的核子对, $|\alpha_{J_{\tau}(i_{\tau})}|^2$ 为其所占的比例。不难推出,对于多 i 轨道有:

$$X_{J_{\tau}} = \left[\sum_{i_{\tau}} \left(\sum_{m_{\tau} > 0} c_{i_{\tau} m_{\tau}} \langle i_{\tau} m_{\tau} i_{\tau} - m_{\tau} | J_{\tau} 0 \rangle (-1)^{i_{\tau} - m_{\tau}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.6)$$

图4给出了在不同的空间中对 Q_{40} 的计算结果。由图可看出,SD空间的计算结果与全空间中的计算结果相差很大;而当考虑G对后,则 Q_{40} 与全空间中的计算结果非常接近。虽然文献[5]中单 i 轨道的讨论给出了类似的结论,但在本文的定量计算中,SD截断

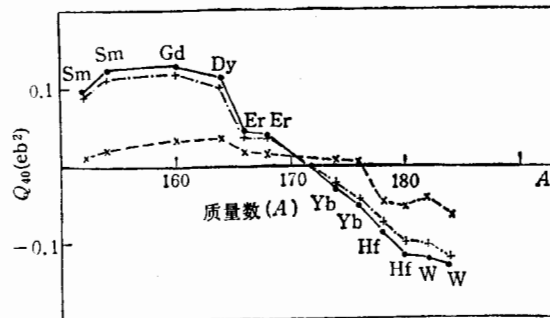


图4 不同空间中, Q_{40} 的计算结果

·——·ALL 空间结果; +——+SDG 空间结果; *····*SD 空间结果

与 SDG 截断的差别,要比在文献[5]中明显得多。

五、结论与讨论

1. 本文从简单的核子-核子相互作用出发,以极少的参数用自治 BCS 方法对稀土区偶-偶变形核的 Q_{40} 及 Q_{20} 进行了定量的计算, Q_{40} 的理论值随质量数变化的总体规律在一定程度上与实验相符;在主壳层后半段,计算值与实验符合得很好。主壳层前半段理论预言小于实验值很多,这一方面是因为在这一区间取 $\kappa_x = \kappa_p = 0.2$ 过小(Q_{20} 理论值亦小于实验值);另一方面,我们只考虑了四极相互作用,而十六极相互作用或许是很重要的。

形变核平衡态的计算常用的是 Hatree-Fock-Bogoliubov (HFB) 方法。该法用平均场求解所得的单粒子轨道,有可能包括不同主壳的单粒子轨道的混合。但 HFB 方法计算的实验^[6]表明,对普通形变核(β 约为 0.3),主壳间的单粒子轨道混合是很小的。因而本文的自治 BCS 可视为 HFB 的一个较好的近似。

2. 质子-质子、中子-中子之间的四极作用强度虽然比质子-中子的四极作用强度小,但其对 Q_{40} 及 Q_{20} 的影响是不可忽略的。就稀土区 Q_{40} 规律而论,取 κ_x 和 κ_p 为 κ_{xp} 的 1/5 是合理的。这一结论与 J. Dobaczewski 等人基于 RPA 计算及巨共振频率实验数据分析所得的结论^[6]相似。

3. 在本文的定量计算中,SD 截断与 SDG 截断的差别比在单 i 模型的情形下更为明显,这为 G 对重要性提供了有力支持。这种差别的出现是因为在单 i 模型下,填充核子增加时, Q_{40} 要经历一个类似于正弦曲线的变化过程;而在多 i 情形下, Q_{40} 值的大小(甚至于正负号)均取决于每个单 i 轨道中核子填充及关联情形,从而使得在多 i 情形下, Q_{40} 对关联中的截断方式更为敏感。

4. 为探讨 Q_{40} 计算值与实验值间系统偏差的原因,曾尝试引入十六极相互作用。计算表明,十六极相互作用对 Q_{20} 及 Q_{40} 的影响,与(κ_x 和 κ_p 所代表的)同种核子间四极相互作用的影响十分相似,但不足以在保持 Q_{20} 的符合程度前提下对 Q_{40} 作出明显改进,因而对 Q_{40} 理论与实验的偏差尚待进行深入研究。

作者对与顾金南、狄尧民、W. Nazarewicz 和 I. Talmi 的讨论表示感谢。

参 考 文 献

- [1] T. Ichihara et al., *Phys. Rev.*, **C29**(1984), 1226.
- [2] F. Ohtani et al., *Phys. Rev.*, **C28**(1983), 120.
- [3] H. Oyawa et al., *Phys. Rev.*, **C33**(1986), 834.
- [4] G. F. Bertsch, *Phys. Lett.*, **B26**(1968), 130.
- [5] 王振、吴华川,稀土区变形偶-偶核 $E4$ 特性的微观研究,高能物理与核物理,待发表.
- [6] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Physics scripta*, **22**(1980), 468.
- [7] D. R. Bes et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1001.
- [8] E. Maglion et al., *Nucl. Phys.*, **A404**(1983), 333.
- [9] R. D. Lawson "Theory of the Nuclear Shell Model" (Oxford University Press, 1980).
- [10] T. J. Griffen et al., *Phys. Rev.*, **118**(1960), 850.
- [11] A. Arima, Proc. Niols Bohr Cent. Conf. (1985), 147.

- [12] 曾谨言、孙洪洲, 原子核结构理论, 上海科技出版社, 1987.
[13] O. Scholten, H. C. Wu and Dieperink, *Z. Phys.*, **A332**(1989), 1.
[14] T. Ichihara et al., *Phys. Rev.*, **C36**(1987), 1754.
[15] T. Otsuka et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 387.
[16] J. Dobaczewski et al., *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 2254.

Hexadecapole Moments and Interaction between Nucleons of the Rotational Nuclei in the Rare-Earth Region

WANG ZHEN RONG ZHONGLIN

(Physics Department, Suzhou University 215006)

WU HUACHUAN

(Physics Department, Suzhou University 215006;
Theoretical Physics Institute, Academia Sinica)

ABSTRACT

By proton-neutron BCS method with very few parameters, Hexadecapole moments (Q_{40}) and quadrapole moments (Q_{20}) are calculated for even-even nuclei in the whole rare earth region. Some of the results are in good agreement with experiments. The comparison between calculation and experiments shows that quadrapole interaction strengths between same nucleons are just about one fifth of that between proton and neutron, which are very important for the explanation of the Q_{40} systematics.