第 15 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 15, No. 1
1991 年 1 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Jan., 1991

格点 Schwinger 模型中 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 的变分计算

陈启洲　郑维宏　罗向前　方锡岩

(中山大学物理系,广州 510275)

摘　　要

本文利用格点规范理论的变分方法，计算 Schwinger 模型中 Naive 格点费米子的真空凝聚参数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，得到较好的标度行为.

一、引　　言

许多年前，Gell-Mann 和 Low[1]、Landau[2] 等人曾提出： $3+1$ 维微扰 QED 存在“零电荷”问题,即跑动耦合常数 $\alpha(R\neq 0)=0$ (R 是距离),而 $\alpha(0)=\alpha_0$ (α_0 为裸耦合常数). 随后有不少人沿着这方向做了许多研究[3]. 人们猜想 QED 可能存在强耦合相,在该相中的物理现象不能用微扰 QED 的方法处理,在这个新相中手征对称性受到破坏. 在最近的重离子碰撞实验中,发现能量约为 1.6 MeV 处存在一个共振峰,这一发现可能是支持 QED 存在强耦合相的实验证据.

近年来，Kogut 等人[4]用格点规范理论中的 Monte Carlo 模拟法分别讨论了紧致和非紧致 QED 的手征序参数$\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，发现在强耦合相手征对称性被破坏,并且找到 $\beta=1/g^2$ 的相变点 β_c.

Schwinger 模型[5]是 $1+1$ 维 QED, 其特点是超可重整化和严格可解,它具有 $3+1$ 维规范理论的许多性质,例如费米子禁闭、手征对称性自发破缺和 $U(1)$ 问题.

格点规范理论是从第一原理出发研究非微扰问题十分有效的工具. 格点的 Schwinger 模型已有广泛的讨论[6],对它作进一步研究,为发展格点规范理论中各种计算方法并检验其有效性,为推广到 $2+1$ 维和 $3+1$ 维作准备.

最近,我们用变分法研究了哈密顿形式的 Schwinger 模型[7],并计算了表征手征对称性自发破缺的序参数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$，得到较好的结果. 本文在以前工作的基础上，考虑变分真空态中的多链项贡献,进一步改善了标度行为,而且更靠近连续理论的结果.

二、变 分 计 算

变分法的主要组成部分是找到一系列变分真空态[8]，调节变分参数，使真空能量极

本文 1990 年 3 月 31 日收到.

小,然后用这些定出的变分参数计算相应的物理量。

带 Naive 费米子的零质量 Schwinger 模型哈密顿量为[7]

$$H = \frac{g^2}{2a}\sum_x E^2(x) + \frac{1}{2a}\sum_{x,k}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k), \tag{2.1}$$

其中 g 是裸耦合常数，在 $1+1$ 维中，$g = ea$，a 是格距，$U(x,k)$ 是 $U(1)$ 群规范场链。我们取如下费米子表示

$$\psi(x) = \begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta^+(x)\end{pmatrix},$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}, \ \gamma_k = -\gamma_{-k}, \tag{2.2}$$

设物理真空为

$$|\Omega\rangle = e^{i\theta_1 s_1}e^{i\theta_3 s_3}e^{i\theta_5 s_5}|0\rangle, \tag{2.3}$$

其中 s_1、s_3 和 s_5 分别为

$$s_1 = i\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k),$$

$$s_3 = i\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_k U(x,3k)\psi(x+3k), \tag{2.4}$$

$$s_5 = i\sum_{x,k}\psi^+(x)\gamma_k U(x,5k)\psi(x+5k).$$

则真空态的能量为

$$E_\Omega = \frac{\langle\Omega|H|\Omega\rangle}{\langle\Omega|\Omega\rangle}. \tag{2.5}$$

由 E_Ω 取极小值的条件

$$\frac{\partial E_\Omega}{\partial\theta_1} = 0,\ \frac{\partial E_\Omega}{\partial\theta_3} = 0,\ \frac{\partial E_\Omega}{\partial\theta_5} = 0, \tag{2.6}$$

便可求出 θ_1、θ_3 和 θ_5，进而确定 E_Ω 和 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ 与 $\beta = 1/g^2$ 的关系。

利用

$$e^A F e^{-A} = F + [A,F] + \frac{1}{2!}[A,[A,F]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,F]]] + \cdots,$$

$$[U(x,k),E_j(x)] = U(x,k)\delta_{x,y}\delta_{k,j},$$

$$[U^+(x,k),E_j(x)] = -U^+(x,k)\delta_{x,y}\delta_{k,j},\ (j=1,\ k=\pm 1), \tag{2.7}$$

得到以下公式(重复指标表示求和):

$$e^{-i\theta_1 s_1}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)e^{i\theta_1 s_1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\theta_1)^n}{n!}\bar{\psi}(x)\gamma_{k_1}\cdots\gamma_{k_{n+1}} \cdot U(x,k_1,\cdots,k_{n+1})\psi(x+k_1+\cdots+k_{n+1}), \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
e^{-i\theta_1 s_1}\bar{\psi}(x)\psi(x)e^{i\theta_1 s_1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\theta_1)^n}{n!}\bar{\psi}(x)\gamma_{k_1}\cdots\gamma_{k_n} \\
\cdot U(x,k_1,\cdots,k_n)\psi(x+k_1+\cdots+k_n),
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

为了简单起见，只保留 0, 1, 3, 5 链项的有效项：

$$
\begin{aligned}
&e^{-i\theta_1 s_1}\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)e^{i\theta_1 s_1} \\
&\approx 2J_1(4\theta_1)\bar{\psi}(x)\psi(x) \\
&+\left[1-3\frac{(2\theta_1)^2}{2!}+9\frac{(2\theta_1)^4}{4!}-25\frac{(2\theta_1)^4}{6!}+\cdots\right] \\
&\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k) \\
&+\left[\frac{(2\theta_1)^2}{2!}-6\frac{(2\theta_1)^4}{4!}+21\frac{(2\theta_1)^6}{6!}+\cdots\right] \\
&\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,3k)\psi(x+3k) \\
&+\left[\frac{(2\theta_1)^4}{4!}-7\frac{(2\theta_1)^6}{6!}+\cdots\right] \\
&\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,5k)\psi(x+5k),
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&e^{-i\theta_1 s_1}\bar{\psi}(x)\psi(x)e^{i\theta_1 s_1} = J_0(4\theta_1)\bar{\psi}(x)\psi(x) \\
&-J_1(4\theta_1)\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k) \\
&-\frac{(2\theta_1)^3}{3!}\left[1-\frac{(2\theta_1)^2}{4}+\frac{(2\theta_1)^4}{40}-\frac{(2\theta_1)^6}{720}+\cdots\right] \\
&\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,3k)\psi(x+3k) \\
&-\frac{(2\theta_1)^5}{5!}\left[1-\frac{(2\theta_1)^2}{6}+\cdots\right] \\
&\cdot\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,5k)\psi(x+5k),
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

其中 $J_\nu(4\theta_1)$ 为第 ν 阶 Bessel 函数，而

$$
U(x,3k)=U(x,k)U(x+k,k)U(x+2k,k). \tag{2.12}
$$

进一步考虑 (2.4) 式中的 s_3 和 s_5，我们得到动能项和 $\bar{\psi}\psi$ 的真空平均值表达式（V 为格点总数）：

$$
\begin{aligned}
2aE_k &= \langle\Omega|\bar{\psi}(x)\gamma_k U(x,k)\psi(x+k)|\Omega\rangle \\
&= -2V\Big\{J_1(4\theta_1)J_0(4\theta_3)J_0(4\theta_5) \\
&+J_1(4\theta_3)\left[\frac{(2\theta_1)^2}{2!}-6\frac{(2\theta_1)^4}{4!}+21\frac{(2\theta_1)^6}{6!}+\cdots\right] \\
&\cdot[1+J_0(4\theta_5)] \\
&+\left[\frac{(2\theta_1)^4}{4!}-7\frac{(2\theta_1)^6}{6!}+\cdots\right]J_1(4\theta_5)\Big\},
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

$$
\langle\Omega|\bar{\psi}(x)\psi(x)|\Omega\rangle = -V\Big\{J_0(4\theta_1)J_0(4\theta_3)J_0(4\theta_5)
$$

$$-\frac{(2\theta_1)^3}{3}\left[1-\frac{(2\theta_1)^2}{4}+\frac{(2\theta_1)^4}{40}-\frac{(2\theta_1)^6}{720}+\cdots\right]J_1(4\theta_3)J_0(4\theta_5)$$

$$-2\frac{(2\theta_1)^5}{5!}\left[1-\frac{(2\theta_1)^2}{6}+\cdots\right]J_1(4\theta_5)\Big\}. \tag{2.14}$$

对于电场项,我们可以作同样的变换:

$$e^{-i\theta_1s_1}E_j(y)e^{i\theta_1s_1}=E_j(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta_1^n}{n!}$$

$$\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\psi^+(x)[U(x,k_1,\cdots,k_n),E_j(y)]_i(-1)^{n+1+i}\binom{n-1}{i}$$

$$\gamma_{k_1}\cdots\gamma_{k_n}\psi(x+k_1+\cdots+k_n), \tag{2.15}$$

像前面简化动能项的计算一样,上式近似为

$$e^{-i\theta_1s_1}E_j(y)e^{i\theta_1s_1}\approx E_j(y)+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\theta_1)^{2n+1}}{(2n+1)!}2^{n-1}$$

$$\cdot\bar\psi(x)\gamma_k[U(x,k),E_j(y)]\psi(x+k). \tag{2.16}$$

这样做实际上是忽略了 θ_1、θ_3 和 θ_5 之间的干涉项,我们将在下一节讨论这种近似的可靠性. 由上式出发,得到电能项的贡献为:

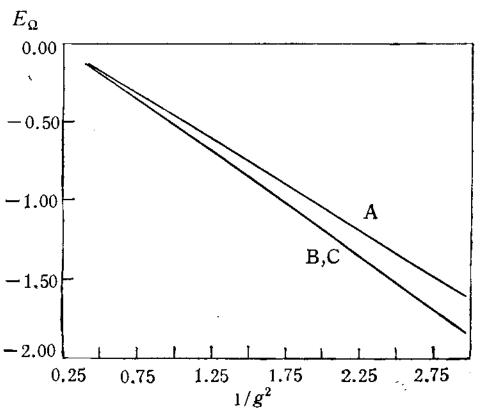

图1 真空能量与 $1/g^2$ 的关系, A代表只考虑单链态, B和C分别为考虑一、三链态和考虑一、三、五链态

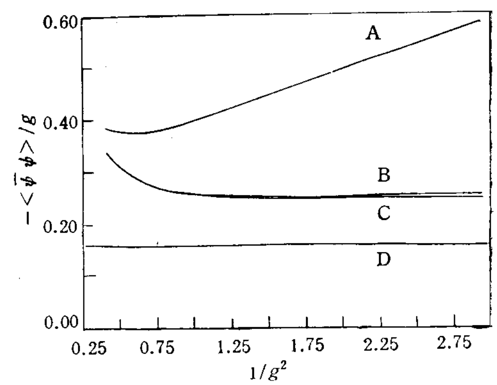

图2 $-\langle\bar\psi\psi\rangle/g$ 与 $1/g^2$ 的关系, A, B 和C的注释同图1. 而D代表连续理论的准确解

$$2aE_g=\langle\Omega|E_j^2(y)|\Omega\rangle$$

$$=2g^2V\left\{\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\theta_1)^{2n+1}}{(2n+1)!}2^{n-1}\right]^2\right.$$

$$+3\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\theta_3)^{2n+1}}{(2n+1)!}2^{n-1}\right]^2$$

$$\left.+5\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2\theta_5)^{2n+1}}{(2n+1)!}2^{n-1}\right]^2\right\}. \tag{2.17}$$

将 (2.13) 式和 (2.17) 式代到 (2.6) 式，求解这一非线性方程组，可得 θ_1、θ_3 和 θ_5 的值，再代回 (2.14) 式，则可得到费米子真空凝聚 $\langle\bar{\Phi}\phi\rangle$ 与 $1/g^2$ 的关系。

量纲分析表明，1 + 1 维格点规范理论中计算出的 $\langle\bar{\Phi}\phi\rangle$ 应有如下标度行为：

$$\frac{\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_{\mathrm{latt}}}{g}=\frac{\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_{\mathrm{cont}}}{e}=\mathrm{const.}\tag{2.18}$$

连续理论预言 $\langle\bar{\Phi}\phi\rangle_{\mathrm{cont}}/e=-0.16$。

我们把 $2aE_\Omega$ 与 $1/g^2$ 的关系作成图 1，把 $-\langle\bar{\Phi}\phi\rangle/g=-\langle\Omega|\bar{\Phi}\phi|\Omega\rangle/(Vg)$ 与 $1/g^2$ 的关系作成图 2。从图 2 中可以看到，考虑了(2.4)式中的三链和五链项贡献后，$\langle\bar{\Phi}\phi\rangle$ 有较好的标度行为，而且与连续理论的结果较接近。

三、讨　　论

在上节的计算中，我们对 (2.8)、(2.9) 和 (2.10) 式采取近似方法，这样做是否合理？为了考察这种近似的可靠程度，我们不考虑五链贡献时，直接计算 E_Ω，并求出满足 E_Ω 极小的 θ_1 和 θ_3 与 $1/g^2$ 的关系，把它们画在图 3，并与上节中作了近似后所得的 θ_1 和 θ_3 比较。由图 3 可见，准确计算与近似计算差别不大。因此，我们的近似计算是可靠的，这样做一方面可使电能项算到任意方次，另一方面使计算大为简化。

为什么在 (2.4) 式中不出现双链项？ 这是由于本文讨论的是 Naive 费米子中的 Schwinger 模型，由 E_Ω 取极值的条件可知双链项贡献为零。 如果引入 Wilson 费米子[9]，双链项对压低 E_Ω 起重要作用。

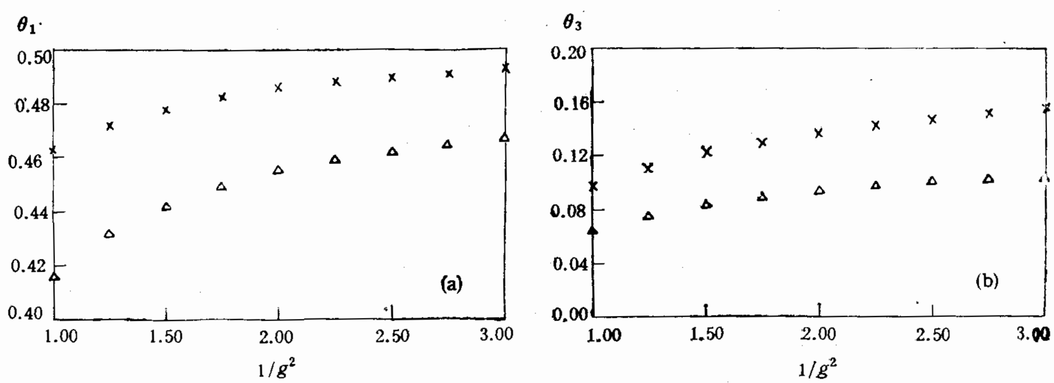

图 3 (a) θ_1 与 $1/g^2$ 的关系，△表示准确计算的结果，× 表示近似计算的结果
(b) θ_3 与 $1/g^2$ 的关系，△和 × 的注释同图 3(a)

从图 1 看到，(2.4) 式中的一链项与三链项同时存在时 ($\theta_1\neq 0$，$\theta_3\neq 0$)，E_Ω 比只考虑单链态时低。而同时考虑一、三、五链态的 E_Ω 虽比只考虑一和三链态低，但它们已靠近到难以分清的程度，从图 2 中看到 $\langle\bar{\Phi}\phi\rangle$ 也有类似的情况。 因此，计算时只取 (2.4) 式中的 s_1 和 s_3 就足够了。

本文的结果表明，我们采用真空变分态方法，能够得到 $\langle\bar{\Phi}\phi\rangle$ 较好的标度行为。这种方法也可用来计算 Schwinger 模型的质量谱。 我们进一步的工作是把本文的方法推广

到 2 + 1 维[10]和 3 + 1 维[11,12]格点规范理论.

参考文献

[1] M. Gell-mann and F. E. Low, *Phys. Rev.*, **95**(1954), 1300.
[2] L. Landau, in Niels Bohr and the Development of Physics, edited by W. Pauli (Pergamon, London, 1955).
[3] S. L. Adler, *Phys. Rev.*, D**5**(1972), 3021;
V. A. Miransky, *Nuovo Cimento*, **90**A(1985), 149;
R. D. Peccei, J. Sala, C. Wettesich, *Phys. Rev.*, D**37**(1988), 2492;
D. G. Caldi, *Phys. Lett.*, **215**B(1988), 739;
Y. Jack Ng, *Phys. Rev.*, D**36**(1987), 2880.
[4] E. Dagotto and H. W. Wyld, *Phys. Lett.*, **205**B(1988), 73;
J. B. Kogut and E. Dagotto, *Phys. Rev. Lett.*, **59**(1987), 617;
J. B. Kogut and E. Dagotto, *Phys. Rev. Lett.*, **60**(1988), 772;
E. Dagotto and J. B. Kogut, *Nucl. Phys.*, B**295**(1988), 123.
[5] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425.
[6] C. J. Hamer, J. Kogut, D. P. Crewther and M. M. Mazzolini, *Nucl. Phys.*, B**208**(1982), 413, and references therein.
[7] X. Q. Luo and Q. Z. Chen, to be published in *J. Phys. G*.
[8] S. H. Guo, Q. Z. Chen, J. M. Liu and L. Hu, *Commun. Theor. Phys.*, **3**(1984), 481.
[9] Q. Z. Chen and X. Q. Luo, to be published in *Phys. Rev. D*.
[10] 罗向前、陈启洲、郭硕鸿，高能物理与核物理，**13**(1989)，328.
[11] 陈启洲、罗向前、郭硕鸿，中山大学学报(自然科学版)**28**(1989)，96.
[12] X. Q. Luo, Q. Z. Chen and S. H. Guo, to be published in *Z. Phys. C*.

Variational Study of $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ in the Lattice Schwinger Model

Chen Qizhou Zheng Weihong Luo Xiangqian Fang Xiyan

(Department of Physics Zhongshan University, Guangzhou 510275)

Abstract

We used the variational method in lattice gauge theory to calculate the fermion condensate $\langle\bar{\psi},\psi\rangle$ of the naive fermions in the Schwinger model, and obtained a nice scaling behavior.