第14卷 第9期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 9
1990年9月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Sept., 1990

关于李代数及其表示的玻色子实现和非齐性微分实现*

孙昌璞
(南开数学研究所理论物理研究室，天津)

摘　要

本文分析和推广了作者以前建议的构造李代数不可分解表示的玻色子实现方法. 不仅证明该方法构造的主表示可以在子空间上导出 Gruber 的主表示，而且讨论了该表示的商空间表示与相干态的联系. 本文还建议了构造李代数非齐性玻色子实现的一般方法，由此得到了量子力学准精确可解问题中有用的李代数非齐性微分实现.

一、引　言

Jordan-Schwinger 映射或称齐性玻色子实现是构造李代数不可约表示的重要方法之一[1]. 作者曾结合 Gruber 的工作[2,3]推广了该方法，构造了李代数[4]，李超代数[5]和 Loop 代数[6]的不可分解(可约但非完全可约)表示. 人们已经知道，不可分解表示不仅可以用来诱导出通常的不可约表示，而且其本身为不稳定粒子的对称行为提供了恰当的描述[7]. Dirac 生前的最后一篇文章曾指出了这种表示可能具有的更深刻的物理意义[8]. 最近，我们联系量子力学的准精确可解问题[9]，构造了等价于非齐性玻色子实现的非齐性微分实现[10]，并进而推广到李超代数情况[11].

在 §2，我们推广文献[4]关于 $SU(2)$ 的讨论，给出了构造任意李代数及其表示玻色子实现的一般方法. 在 §3 中我们证明，由 §2 中 2 次齐性玻色子实现得到的“主表示”，在特定的子空间上导出 Gruber 等在李代数自身通用包络代数空间上构造的主表示. 在 §4，我们以 $SU(2)$ 为例，分析了与相干态[13]相联系的表示. 最后，在 §5，我们注意到通用包络代数、Fock 空间和 Bargmann 空间[12]的某些代数同构关系，建议了一种新的李代数非齐性微分实现方法，得到了比文献[10]更一般的微分实现及其矩阵表示.

值得指出的是，本文的讨论可以直接推广，用来分析文献[5,7]中得到的李超代数和 Loop 代数的表示. 引入 q-变形玻色子算符[14]，本文的部分讨论可推广到量子群上.

以下我们记 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$，$\mathbb{C}=$ 复数域.

本文 1989 年 10 月 25 日收到.
* 国家自然科学基金资助课题.

二、李代数及其表示的玻色子实现

D-态 Heisenberg-Weyl 代数 $\mathscr{H}_D$ 是由满足

$$[b_i,b_j^+]=E\delta_{ij},[b_i^\pm,b_j^\pm]=0=[E,b_i^\pm],i,j=1,2,\cdots,D. \tag{1}$$

的算符 $b_i\equiv b_i^-$, b_i^+ 和 E 张成的李代数．它的通用包络代数

$$U(\mathscr{H}_D):\left\{X[m_i,n_i,s]\equiv E^s\cdot\prod_{i=1}^{D}(b_i^{+m_i}\cdot b_i^{n_i})\middle| m_i,n_i,s\in\mathbb{N}\right\}$$

有一个左理想 $L=\{x(E-\mathrm{I})|\mathrm{I}\equiv X[0,0,0],\ x\in U(\mathscr{H}_D)\}$．在相应的商空间 $\Omega=U(\mathscr{H}_D)/L:\{X[m_i,n_i,s]=X[m_i,n_i,0]\mathrm{Mod}L\,|m_i,n_i\in\mathbb{N}\}$ 上，$\mathscr{H}_D$ 的主表示诱导出一个满足 $\bar{\rho}(E)=$ 单位矩阵的表示[4]

$$\begin{cases}\bar{\rho}(b_j^+)X[m_i,n_i]=X[m_i+\delta_{ij},n_i],\bar{\rho}(E)X[m_i,n_i]=X[m_i,n_i],\\ \bar{\rho}(b_j)X[m_i,n_i]=X[m_i,n_i+\delta_{ij}]+m_jX[m_i-\delta_{ij},n_i].\end{cases} \tag{2}$$

李代数$\mathscr{L}$的玻色子实现是由$\mathscr{L}$到结合代数Ω的同态映射 $B:\mathscr{L}\to\Omega$．若 $\{T_\alpha,\alpha=1,2,\cdots,N\}$ 是$\mathscr{L}$的基，映射 B 可具体地表达为

$$B(T_\alpha)=\sum_{\{m_i,n_i\}}B_\alpha^{[m_i,n_i]}\cdot X[m_i,n_i]\in\Omega \tag{3}$$

其中系数 $B_\alpha^{[m_i,m_i]}\in\mathbb{C}$ 使得 $B([T_\alpha,T_\beta])=[B(T_\alpha),B(T_\beta)]$．当 (3) 满足 $\sum_{j=1}^{D}m_j=\sum_{j=1}^{D}n_j$，$B(T_\alpha)$ 保持粒子数守恒，即对于 $\hat{N}=\sum_{i=1}^{D}b_i^+b_i$，$[B(T_\alpha),\hat{N}]=0$，这时我们称 $B(\mathscr{L})=\{B(T_\alpha)|T_\alpha\in\mathscr{L}\}$ 为$\mathscr{L}$的 $2\left(\sum_{j=1}^{D}m_j\right)$ 次齐性玻色子实现；否则，当 $\sum_{j=1}^{D}m_j\neq\sum_{j=1}^{D}n_j$，我们称 $B(\mathscr{L})$ 为$\mathscr{L}$的非齐性玻色子实现．

李代数$\mathscr{L}$典型的 2 次齐性玻色子实现是 Jordan-Schwinger 映射[1]

$$J(T_\alpha)=\sum_{i,j=1}^{D}\tilde{\Gamma}(T_\alpha)_{ij}b_i^+b_j,\ \alpha=1,2,\cdots,N \tag{4}$$

其中，$\tilde{\Gamma}(T_\alpha)_{ij}$ 是 $\mathscr{L}$ 的$D\times D$表示 $\tilde{\Gamma}(T_\alpha)$ 的矩阵元．在实际计算中，我们一般取 $\tilde{\Gamma}$ 为 $\mathscr{L}$ 的基础表示．利用(1)可验证(4)的确满足 $J([T_\alpha,T_\beta])=[J(T_\alpha),J(T_\beta)]$．

由于Ω是一个结合代数，它自身的线性空间可作为Ω的表示空间，得到Ω的左正则表示(2)．由(2)可构造Ω的李子代数 $B(\mathscr{L})$ 在Ω上的表示

$$\rho(T_\alpha)=\sum_{\{m_i,n_i\}}B_\alpha^{[m_i,n_i]}\cdot\prod_{i=1}^{D}[\bar{\rho}(b_i^+)^{m_i}\cdot\bar{\rho}(b_i)^{n_i}]. \tag{5}$$

对于 2 次齐性玻色子实现(4)我们有“主表示”：

$$\rho(T_\alpha)=\sum_{i,j}^{D}\tilde{\Gamma}(T_\alpha)_{ij}\bar{\rho}(b_i^+)\bar{\rho}(b_j), \tag{6}$$

其明显矩阵形式是

$$\rho(T_\alpha)X(m_k,n_k)=\sum_{i,j=1}^{D}\tilde{\Gamma}(T_\alpha)_{ij}\cdot\{X[m_k+\delta_{ki},n_k+\delta_{kj}]$$
$$+m_jX[m_k-\delta_{kj}+\delta_{ki},n_k]\}.\tag{7}$$

在[4]中讨论的 $SU(2)$ 表示是上述一般构造的特殊情况。在[4]我们采取的 $SU(2)$ 玻色子实现是

$$J(L_+)=b_1^+b_2,\ J(L_-)=b_2^+b_1\ J(L_3)=b_1^+b_1-b_2^+b_2\tag{8}$$

它给出基 $X(m_1,n_1,m_2,n_2)=b_1^{+m_1}\cdot b_1^{n_1}\cdot b_2^{+m_2}\cdot b_2^{n_2}(m_1,n_1,m_2,n_2\in\mathbb{N})$ 上 $SU(2)$ 的表示

$$\begin{cases}\rho(L_+)X(m_1,n_1,m_2,n_2)=X(m_1+1,n_1,m_2,n_2+1)\\ \quad+m_2X(m_1+1,n_1,m_2-1,n_2),\\ \rho(L_-)X(m_1,n_1,m_2,n_2)=X(m_1,n_1+1,m_2+1,n_2)\\ \quad+m_1X(m_1-1,n_1,m_2+1,n_2),\\ \rho(L_3)X(m_1,n_1,m_2,n_2)=(m_1-m_2)X(m_1,n_1,m_2,n_2)\\ \quad+X(m_1+1,n_1+1,m_2,n_2)+X(m_1,n_1,m_2+1,n_2+1).\end{cases}\tag{9}$$

在以下的讨论中我们将用到(9).

三、主表示的导出

现在我们由表示的玻色子实现(7)在特定的Ω子空间上诱导出 Gruber 的主表示[2,3].

注意到 $J(T_\alpha)(\in\Omega)$ 满足与 $T_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,N)$ 相同的对易关系；即，若 $[T_\alpha,T_\beta]=\sum_{\gamma=1}^{N}C_{\alpha\beta}^{\gamma}T_\gamma(C_{\alpha\beta}^{\gamma}\in\mathbb{C})$ 则 $[J(T_\alpha),J(T_\beta)]=\sum_{\gamma=1}^{N}C_{\alpha\beta}^{\gamma}J(T_\gamma)$，我们知道$\Omega$的子空间 Ω_J:

$$\left\{Y[S_\alpha]=\prod_{\alpha}^{N}(J(T_\alpha)^{S_\alpha})\in\Omega\,\middle|\,S_\alpha\in\mathbb{N},\ \alpha=1,2,\cdots,N\right\}$$

是表示(7)的不变子空间．事实上，$\rho(T_\alpha)$ 对 Ω_J 的作用相当于 $\rho(T_\alpha)Y[S_\beta]=J(T_\alpha)\cdot\prod_{\beta=1}^{N}(J(T_\beta)^{S_\beta})$，按 $J(T_\alpha)$ 和 $J(T_\beta)$ 的对易关系把 $J(T_\alpha)$ 换到 $Y[S_\beta]$ 中 $J(T_\alpha)$ 所在的位置，则有

$$\rho(T_\alpha)Y[S_\beta]=\sum\Gamma(T_\alpha)_{[S_\beta]}^{[S'_\beta]}\cdot Y[S'_\beta]\tag{10}$$

即 Ω_J 是李代数$\mathscr{L}$的表示作用下的不变子空间其上荷载着一个矩阵元为 $\Gamma(T_\alpha)_{[S_\beta]}^{[S'_\beta]}$ 的表示．这个表示与 Gruber 等在 $\mathscr{L}$ 的通用包络代数 $U(\mathscr{L})$:

$$\left\{\tilde{Y}(S_\alpha)=\prod_{\alpha=1}^{N}(T_\alpha)^{S_\alpha}\,\middle|\,S_\alpha\in\mathbb{N}\right\}$$

上定义的主表示 Γ:

$$\Gamma(T_\alpha)\tilde{Y}(S_\beta)=T_\alpha\tilde{Y}(S_\beta)=T_\alpha\cdot\prod_{\beta=1}^{N}(T_\beta)^{S_\beta}=\sum_{\{S_\beta\}}\Gamma(T_\alpha)_{[S_\beta]}^{[S'_\beta]}\tilde{Y}(S'_\beta)\tag{11}$$

是完全一样的．因此我们说，表示(7)在Ω的子空间 Ω_J 上导出 Gruber 的主表示；(7)是比主表示更为一般的表示．这里需要指出的是，对于不同的 $\{S_1,S_2,\cdots,S_N\}$，$Y[S_\alpha]$ 是

线性独立的，即 $\{\tilde{Y}[S_\alpha]\}$ 是 Ω_J 的基.

现在我们用 $SU(2)$ 的例子说明上述的一般结论. 对 $SU(2)$ 情况，Ω_J 的基是

$$Y(n,m,r)=(b^+b_2)^n\cdot(b_2^+b_1)^m(b_1^+b_1-b_2^+b_2)^r,\quad m,n,r\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

利用由归纳法证得的公式:

$$\begin{cases} b_i^n b_i^{+m}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\min(m,n)}\frac{n!m!}{(m-k)!(n-k)!k!}b_i^{+m-k}b_i^{n-k}, & \text{(13-a)}\\ (b_i^+b_i)^r=\displaystyle\sum_{l=1}^{r}C_{rl}b_i^{+l}\cdot b_i^l,\quad C_{rr}=C_{11}=1. & \text{(13-b)}\end{cases}$$

我们把 $Y(n,m,r)$ 化为"正规积" $b_1^{+m_1}\cdot b_1^{n_1}\cdot b_2^{+m_2}b_2^{n_2}$ 的线性组和，比较其中的 b_1^+、b_2^+、b_1 和 b_2 的最高幂次项立即看出，不同的 (n,m,r) 对应的 $Y(n,m,r)$ 是线性独立的. 在 $Y(n,m,r)$ 上，$SU(2)$ 的表示由(9)给出

$$\begin{cases}\rho(L_+)Y(n,m,r)=Y(n+1,m,r),\\ \rho(L_-)Y(n,m,r)=Y(n,m+1,r)-nY(n-1,m,r+1)\\ \quad+\dfrac{1}{2}n(2m-n+1)Y(n-1,m,r),\\ \rho(L_3)Y(n,m,r)=Y(n,m,r+1)+(n-m)Y(n,m,r).\end{cases} \tag{14}$$

这个表示恰是 $SU(2)$ 在其通用包络代数 $U(SU(2))$: $\{L_+^n\cdot L_-^m\cdot L_3^r\equiv\tilde{Y}(n,\ m,\ r)|n,m,r\in\mathbb{N}\}$ 上的表示[2].

四、相干态与商空间表示: $SU(2)$ 情况

在 $\mathscr{L}=SU(2)$ 情况下，Ω 的一个左理想 I: $\{x(b_1-z_1)+y(b_2-z_2)|\forall x,y\in\Omega\}$ $(z_1,z_2\in\mathbb{C})$ 对应于商空间 $\tilde{F}=\Omega/I$: $\{X(m_1,m_2)\equiv X(m_1,0,m_2,0)\mathrm{Mod}I\,|m_1,\ m_2\in\mathbb{N}\}$. 在 $\tilde{F}$ 上，

$$\bar{\rho}(b_i)X(0,0)=z_iX(0,0),\quad z_i\in\mathbb{C},\quad i=1,2$$

即 $X(0,0)$ 是一个 2 模玻色子相干态；在 2 态 Fock 空间 F_2: $\{|m_1,m_2\rangle=b_1^{+m_1}b_2^{+m_2}|0\rangle\ |b_i|0\rangle=0,i=1,2,m_1,m_2\in\mathbb{N}\}$ 上的实现是

$$|z_1z_2\rangle=\exp[z_1b_1^++z_2b_2^+]|0\rangle \tag{15}$$

在 $\tilde{F}$ 上，表示(9)诱导出新的表示[4]

$$\begin{cases}\rho(L_+)X(m_1,m_2)=z_2X(m_1+1,m_2)+m_2X(m_1+1,m_2-1),\\ \rho(L_-)X(m_1,m_2)=z_1X(m_1,m_2+1)+m_1X(m_1-1,m_2+1),\\ \rho(L_3)X(m_1,m_2)=(m_1-m_2)X(m_1m_2)+z_1X(m_1+1,m_2)\\ \quad+z_2X(m_1,m_2+1).\end{cases} \tag{16}$$

注意到分立的无限维空间 $\tilde{F}$ 的元素只是有限个基元的线性组合(参见文献[2] §6)，可证(16)是不可分解的[4].

现在延拓 $\tilde{F}$，使得延拓后的 $\tilde{F}$ (记为 $\tilde{F}_E$) 包含无穷个基元的线性组，则 $\tilde{F}_E$ 是可分解的. 事实上，注意到

$$|n_1,n_2)=b_1^{+n_1}\cdot b_2^{+n_2}|z_1,z_2\rangle,n_1,n_2\in\mathbb{N}$$

是 Fock 空间 F_2 的一组新基，即 F_2 的自然基 $|m_1,m_2\rangle$ 可由 $|n_1,n_2\rangle$ 展开：

$$\begin{cases}|m_1,m_2\rangle=\sum\limits_{n_1=m_1}^{\infty}\sum\limits_{n_2=m_2}^{\infty}C_{m_1}^{n_1}\cdot C_{m_2}^{n_2}\cdot|n_1,n_2\rangle;\\ C_{m_i}^{n_i}=-\sum\limits_{k=1}^{n-1}C_{m_i}^{k}\cdot\dfrac{1}{(n_i-k)!}z_i^{n_i-k},\ C_{m_i}^{m_i}=1,\ i=1,2.\end{cases}\tag{17}$$

则由(8)给出的 $J(SU(2))$ 对 $|n_1,n_2\rangle$ 的作用将给出与(16)相同的表示矩阵；这个表示通过变换(17)等价于 $|m_1,m_2\rangle$ 上的表示． 由 F_2 和 $\tilde{F}$ 的对应关系 $|m_1,m_2\rangle\Longleftrightarrow X(m_1m_2)$，则可定义 $\tilde{F}_E$ 的新基

$$f(m_1,m_2)=\sum_{n_1=m_1}^{\infty}\sum_{n_2=m_2}^{\infty}C_{m_1}^{n_1}\cdot C_{m_2}^{n_2}X(n_1,n_2).\tag{18}$$

它包含了 $\tilde{F}$ 基元的无穷项线性组合．在这组基上，(13)重新表达为

$$\begin{cases}\rho(L_+)f(m_1,m_2)=m_2f(m_1+1,m_2-1),\\ \rho(L_-)f(m_1,m_2)=m_1f(m_1-1,m_2+1),\\ \rho(L_3)f(m_1,m_2)=(m_1-m_2)f(m_1,m_2).\end{cases}\tag{19}$$

由于在 ρ 作用下，$m_1+m_2=2j\left(j=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2},\cdots\right)$ 是一个不变量；$\tilde{F}_E$ 可分解为不变子空间 $V^{[j]}$：

$$\{|j,m\rangle=[(j+m)!(j-m)!]^{-\frac{1}{2}}\cdot f(j+m,j-m)\,|\,m=j,\ j-1,\cdots,-j\}$$

的直和，即 $\tilde{F}_E=\sum\limits_{2j=0}^{\infty}\oplus V^{[j]}$．(19)在每一个 $V^{[j]}$ 上诱导出标准的 $SU(2)$ 不可约表示

$$\begin{cases}\rho(L\pm)|j,m\rangle=[(j\mp m)(j\pm m+1)]^{\frac{1}{2}}|j,m\pm1\rangle,\\ \rho(L_3)|j,m\rangle=2m|j,m\rangle,\end{cases}\tag{20}$$

对于其它的李代数，本节的方法将给出类似的结果．

五、李代数的非齐性微分实现和玻色子实现

N 维 Bargmann 空间 $\mathscr{B}_N$ 是由基矢

$$\{u[S_i]=u(S_1,S_2,\cdots,S_N)=z_1^{S_1}\cdot z_2^{S_2}\cdots z_N^{S_N},S_i\in\mathrm{N},i=1,2,N\}$$

张成的 N 复变量 $\{z_i|i=1,2,\cdots,N\}$ 的解析函数空间[12]．设映射

$$\varphi:\ \tilde{Y}(S_\alpha)\to\varphi(\tilde{Y}(S_\alpha))=u[S_\alpha]$$

确定了通用包络代数 $U(\mathscr{L})$ 到 Bargmann 空间 $\mathscr{B}_N$ 的一个线性空间同构且 $\Gamma(T_\alpha)$ 是李代数 $\mathscr{L}$ 的主表示．如果 $\forall T_\alpha\in\mathscr{L}$，存在 $\mathscr{B}_N$ 上的微分算符 $\hat{O}(T_\alpha)$ 使得下图

$$\begin{array}{ccc}U(\mathscr{L}) & \xrightarrow{\ \ \varphi\ \ } & \mathscr{B}_N\\ {\scriptstyle\Gamma(T_\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\hat{O}(T_\alpha)}\\ U(\mathscr{L}) & \xrightarrow{\ \ \varphi\ \ } & \mathscr{B}_N\end{array}\tag{F1}$$

可交换，即 $\varphi(\Gamma(T_\alpha)\cdot x)=\hat{O}(T_\alpha)\cdot\varphi(x)$ 对 $\forall x\in U(\mathscr{L})$ 成立，则称 $\{\hat{O}(T_\alpha),\ \alpha=$

$1,2,\cdots,N\}$ 是李代数 $\mathscr{L}$ 的一个微分实现．这个实现通常可以表达为

$$\hat{O}(T_\alpha)=\sum_{\{m_i,S_i\}}O(T_\alpha)^{[m_i]}_{[S_i]}\left\{\prod_{j=1}^{N}(z_\alpha)^{S_\alpha}\cdot\prod_{\beta=1}^{N}\left(\frac{\partial^{m_\beta}}{\partial z_\beta^{m_\beta}}\right)\right\}\tag{21}$$

例如,相应于 Jordan-Schwinger 映射的齐性微分实现是

$$\hat{\Gamma}(T_\alpha)=\sum_{i,j=1}^{N}\tilde{\Gamma}(T_\alpha)_{ij}z_i\frac{\partial}{\partial z_j}.\tag{22}$$

以下我们将构造量子力学准精确可解问题中有用的非齐性微分实现，整个讨论以 $SU(2)$ 为例,并把 $U(SU(2))$ 的基 $\tilde{Y}(n,m,r)$ 与 Ω_J 的基 $Y(n,m,r)$ 等同.

对应于 Gruber 的主表示(14),我们得到 $SU(2)$ 在 3 维 Bargmann 空间 $\mathscr{B}_3:\{u(n,m,r)=z_1^nz_2^mz_3^r|m,n,r\in\mathbb{N}\}$ 上的非齐性微分实现

$$\begin{cases}\hat{O}(L_+)=z_1,\ \hat{O}(L_3)=z_3+z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}-z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2},\\[2ex]\hat{O}(L_-)=z_2-z_3\dfrac{\partial}{\partial z_1}+z_2\dfrac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}-\dfrac{1}{2}z_1\dfrac{\partial^2}{\partial z_1^2},\end{cases}\tag{23}$$

在 $U(SU(2))$ 的左理想 $I_3:\{x(L_3-\Lambda)|\forall x\in U(SU(2))\}$ $(\Lambda\in\mathbb{C})$ 对应的商空间 $Q_3=U(SU(2))/I_3$: $\{Y(n,m)=Y(n,m,0)\ \mathrm{Mod}I_3|m,n\in\mathbb{N}\}$ 上，主表示(14)诱导出新表示[2]

$$\begin{cases}\Gamma(L_3)Y(n,m)=(\Lambda+n-m)Y(n,m),\Gamma(L_+)Y(n,m)=Y(n+1,m),\\[1ex]\Gamma(L_-)Y(n,m)=Y(n,m+1)-n(\Lambda-m+\dfrac{1}{2}(n-1))Y(n-1,m).\end{cases}\tag{24}$$

由此可得到 $\mathscr{B}_2:\{u(n,m)=z_1^nz_2^m|n,m\in\mathbb{N}\}$ 上 $SU(2)$ 的非齐性微分实现

$$\begin{cases}\hat{O}(L_3)=\Lambda+z_1\dfrac{\partial}{\partial z_1}-z_2\dfrac{\partial}{\partial z_2},\ \hat{O}(L_+)=z_1,\\[2ex]\hat{O}(L_-)=z_2-\Lambda\dfrac{\partial}{\partial z_1}+z_2\dfrac{\partial^2}{\partial z_1\partial z_2}-\dfrac{1}{2}z_1\dfrac{\partial^2}{\partial z_1^2}\end{cases}\tag{25}$$

在 Q_3 的左理想 $I_-=\{xL_-|x\in Q_3\}$ 对应的商空间 $Q_+=Q_3/I_-\{Y(n)=Y(n,0)\ \mathrm{Mod}I_-|n\in\mathbb{N}\}$ 上,(24) 诱导出新表示

$$\begin{cases}\rho(L_3)Y(n)=(\Lambda+n)Y(n),\rho(L_+)Y(n)=Y(n+1).\\[1ex]\rho(L_-)Y(n)=-n\left(\Lambda+\dfrac{1}{2}(n-1)\right)Y(n-1),\end{cases}\tag{26}$$

它在 $\mathscr{B}_1$: $\{u(m)=z^m|m\in\mathbb{N},z\in\mathbb{C}\}$ 上给出 $SU(2)$ 非齐次微分实现

$$\begin{cases}\hat{O}(L_3)=\Lambda+z\dfrac{\partial}{\partial z},\ \hat{O}(L_+)=z\\[2ex]\hat{O}(L_-)=-\Lambda\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{1}{2}z\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\end{cases}\tag{27}$$

应当指出的是,在(25)和(27)的推导中，我们已把 (F_1) 中的 $U(\mathscr{L})$ 分别换成了 Q_3 和 Q_+.

利用(23),(25)和(27)并考虑到 Bargmann 空间上的算符 $\left\{z_i,\dfrac{\partial}{\partial z_i}\middle|i=1,2,\cdots,N\right\}$

与 Fock 空间上算符 $\{b_i^+, b_i | i = 1,2,\cdots,N\}$ 的对应：$z_i \Longleftrightarrow b_i^+$，$\frac{\partial}{\partial z_i} \Longleftrightarrow b_i$，我们可以直接写出 $SU(2)$ 的非齐性玻色子实现。例如，(27) 对应的非齐性玻色子实现是

$$B(L_3) = \Lambda + b^+b, \quad B(L_+) = b^+, \quad B(L_-) = -\Lambda b - \frac{1}{2} b^+b^2 \tag{28}$$

利用这些非齐性玻色子实现，我们可以在联系于 Heisenberg-Weyl 代数通用包络代数的空间上构造 $SU(2)$ 的新表示。例如，由(28)可以构造 $SU(2)$ 在 Fock 空间 $F_1: \{|n\rangle = b^{+n}|0\rangle | b|0\rangle = 0, n \in \mathrm{N}\}$ 上的表示

$$\begin{cases} \rho(L_3)|n\rangle = (\Lambda + n)|n\rangle, \quad \rho(L_+)|n\rangle = |n+1\rangle, \\ \rho(L_-)|n\rangle = -\frac{1}{2} n(2\Lambda + n - 1)|n-1\rangle. \end{cases} \tag{29}$$

当 $2\Lambda \neq -l \in \mathrm{N}$ 时，表示(29)是不可约的无穷维表示；当 $2\Lambda = -l \in \mathrm{N}$ 时，$\rho(L_-)|l+1\rangle = 0$，即存在一个 ρ-不变子空间 $V^{[l]}: \{\varphi_l(n) \equiv |n+l+1\rangle | n \in \mathrm{N}\}$，(29) 是一个不可分解的可约表示，它在 $V^{[l]}$ 诱导出一个不可约的无限维表示。相应的商空间 $F_1/V^{[l]}$ 是一个有限维表示空间，选择它的基

$$\begin{cases} |j, m\rangle = \prod_{k=m}^{j-1} \left[\frac{1}{2}(j-k)!(j+k+1)!\right]^{\frac{1}{2}} |j+m\rangle \mathrm{Mod} V^{[2j]} \\ j = \frac{l}{2}, \quad m = j, j-1, \cdots, -j. \end{cases} \tag{30}$$

在这个基上，我们由(29)重新得到标准的角动量表示。当然，在联系于 $\mathscr{H}_1$ 通用包络代数的其它空间上，由(28)可构造出另外的无穷维表示。

六、结 束 语

本文讨论表明玻色子实现方法有如下特点：

(i) 该方法给出了包括 Gruber 主表示在内的各种有限和无限维表示，从数学上讲具有一定的普遍性；

(ii) 该方法联系了 Fock 空间和相干态等物理概念，这使得我们的讨论容易结合于物理；

(iii) 该方法以玻色子算子的简单的对易关系计算，代替了李代数复杂的对易关系计算，使具体问题的计算大大简化。

作者感谢 B. Gruber 教授、吴兆颜教授和葛墨林教授的帮助与鼓励，感谢与付洪忱同志的讨论以及愉快合作。

参 考 文 献

[1] L. C. Biedenharn and J. D. Louck, Angular Momentum in Quantum Physics(Lond.: Addison-Wesley Publi. Co.) 1981.

[2] B. Gruber and A. U. Klimik, *J. Math. Phys.*, **25**(1984), 755.
[3] B. Gruber and R, Lenczewski, *J. Phys.*, A**19**(1986), 1.
[4] C. -P. Sun, *J. Phys.*, A**20**(1987), 4551.
[5] C. -P. Sun, *J. Phys.*, A**20**(1987), 5823.
[6] C. -P. Sun, *J. Phys.*, A**20**(1987), L1157. 孙昌璞,自然杂志, **12**(1989), 153; IL Nuovo Cimento B (1989) inpress.
[7] A. O. Barrut and R. Raczka, Theory of Group Representations and their Applications, (PWN: Warszawa) 1980.
[8] P. Dirac, *Intern. J. Theor. Phys.*, **23**(1984), 677.
[9] M. A. Shifman, *Intern. J. mod. Phys.*, **4**(1989), 2897.
[10] H. -C. Fu and C. -P. Sun, *J. Math. Phys.*, **31**(1990) in press.
[11] 付洪忱,高能物理与核物理,**14**(1990),126.
[12] V. Bargmann, Analytic Method in Mathematical Physics (Gordon: NY) 1970, 27—63 and refs. therein.
[13] 范洪义,物理学进展, **7**(1987), 215 and refs. therein.
[14] C. -P. Sun, and H. -C. Fu, *J. Phys. A*, **22**(1989) in press.

ON BOSON REALIZATIONS AND INHOMOGENEOUS DIFFERENTIAL REALIZATION FOR LIE ALGEBRAS AND THEIR REPRESENTATIONS

SUN CHANGPU

(Theoretical Physics Division Nankai Institute Mathematics, Tianjin)

ABSTRACT

In this paper we systematically analyse and generalize the Boson Realization Method proposed by the author for constructing indecomposable representations of Lie (super) algebras. We prove that the representations thus obtained cover the master representation of Gruber and point out the relation of its coset representation to the boson coherent states. We also propose a general method of finding the inhomogeneous differential realizations of lie algebras from their indecomposable representations, which is very useful in new found quantum mechanical quasi-exactly solvable problems.