

准静态近似下多维裂变宽度的研究

包景东* 张竟上 卓益忠

(中国原子能科学研究院, 北京)

摘 要

本文采用核变形 $\{c, h, \alpha\}$ 参数在准静态近似下计算了二维裂变宽度, 分析了一维和二维之间的差别.

早在1940年, Karmers^[1] 提出将受激核裂变当作一个翻越一维位垒的扩散过程, 他在准静态近似下通过求解 Fokker-Planck 方程, 得到了裂变宽度的解析表达式. 最近, 一些作者把 Karmers 的早期工作推广到 N 维情形^[2-5]. 文献[2]和[3]做了一些数值计算, 但得到的结论是相反的; 在文献[4]和[5]中, 作者虽然考虑了裂变宽度对各种参数的依赖关系, 却没有做真实的计算, 因此裂变宽度的多维修正还需要进一步研究. 众所周知, 准静态近似必须满足两个条件: 其一是核温度远小于裂变位垒高度; 其二是核的粘滞性不能太小. 然而注意到文献[2]和[3]所使用的粘滞张量是在液滴模型的小粘滞流体力学近似下获得的^[6]. 在本文中, 我们计算并采用了更加合理的动力学参数, 希望能对裂变宽度的多维修正问题有个较好的理解.

涨落-耗散机制框架中的基本方程是关于集体坐标及其共轭速度的分布函数随时演化的 Fokker-Planck (F-P) 方程, 其中多维 F-P 方程的形式是:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -u_i \frac{\partial W}{\partial x_i} + (M^{-1})_{ij} \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial W}{\partial u_j} + \frac{\partial}{\partial u_i} [(M^{-1})_{ij} \beta_{jk} u_k W] + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} [D_{ij} W]. \quad (1)$$

扩散张量 D_{ij} 与粘滞张量 β_{ij} 通过广义 Einstein 定理相联系: $D_{ij} = T(M^{-1})_{il} \beta_{lm} (M^{-1})_{mj}$. 方程(1)中的惯性和粘滞张量均为实的、对称和正定矩阵. 我们利用著名的基于两体碰撞机制的 Werner-Wheeler 方法^[7]计算了这些参量, 并将结果列于下面的表1和表2之中.

这里, 我们仅考虑二维裂变. 用核变形 $\{c, h, \alpha\}$ 参数^[8]来描写裂变核的形状, 在柱坐标系中, 核表面方程取作:

$$P_i^2(Z) = c^{-2}(c^2 - Z^2)(A_i c^2 + B z^2 + \alpha c z), \quad (2)$$

其中 $B = 2h + (c - 1)/2$, $A_i = c^{-3} - B/5$, c 是核长度之半, h 描述当核有固定长度时其颈部厚度, 参数 α 用以确定两碎片体积比. 本文中取 $\alpha = 0$, 所有坐标都以球形核半径 $R_0 = r_0 A^{1/3}$ 为单位. 通常用两碎片质心距之半 ρ 代替 c 作为一个拉长参数, 它们的关

本文1989年1月25日收到.

* 现在北京气象学院工作.

系是: $\rho = 3c/8 + c^4h/10 + (c^5 - c^4)/40$.

形变势能 $V(\rho, h)$ 是通过选用如下参数计算的^[9]: $a_s = 17.9439\text{MeV}$, $a_c = 0.7053\text{MeV}$, $K_s = 2.84$ 和 $r_0 = 1.2249\text{fm}$. 在 F-P 方程中, 基态和鞍点附近的形变势能近似拟合为由两个非正交谐振子势组成.

$$V_0(\rho, h) = \frac{1}{2} c_{\rho 0}(\rho - R_0)^2 + \frac{1}{2} C_{h0}h^2 + C_{\rho h}(\rho - R_0)h, \quad (3a)$$

$$V_{sd}(\rho, h) = B_f - \frac{1}{2} C_{\rho sd}(\rho - \rho_{sd})^2 + \frac{1}{2} C_{h sd}(h - h_{sd})^2 - C_{\rho h sd}(\rho - \rho_{sd})(h - h_{sd}), \quad (3b)$$

这里及以后的脚标“0”和“sd”分别用来表示基态和鞍点处的值. 刚度系数为:

$$C_{\rho} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2}, \quad C_h = \frac{\partial^2 V}{\partial h^2}, \quad C_{\rho h} = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho \partial h}.$$

准静态近似下($\frac{\partial W}{\partial t} = 0$), 多维裂变宽度 Γ_f 为^[4]:

$$\Gamma_f = \frac{\hbar}{2\pi} \exp(-B_f/T_0) \left(\frac{T_{sd}}{T_0}\right)^2 \sqrt{\det c_0 / |\det c_{sd}|} \cdot H \quad (4)$$

式中, $B_f > 0$ 是裂变位垒高度, 基态核温度近似为 $T_0 = \sqrt{\frac{10}{A} E^*}$, 鞍点温度是 $T_{sd} = \sqrt{\frac{10}{A} (E^* - B_f)}$, 这里 E^* 为初始激发能, H 是以下方程的唯一正根.

$$\det(H^2 M + H\beta + C_{sd}) = 0, \quad (5)$$

方程中的 H 和 β 为裂变核在鞍点上的惯性和粘滞张量.

为了便于考察核系统在鞍点处的动力学行为, 我们通过对坐标系作一逆时针旋转而将矩阵 c_{sd} 和 β_{sd} 对角化, 新坐标系与原坐标系的夹角分别表示为:

$$\sin 2\theta_c = \frac{|C_{\rho h sd}|}{2(|\lambda_1| + \lambda_2)}, \quad \sin 2\theta_\beta = \frac{\beta_{\rho h sd}}{2(\beta_1 - \beta_2)}. \quad (6)$$

式中 λ_1, λ_2 和 β_1, β_2 分别是刚度矩阵 c_{sd} 和粘滞矩阵 β_{sd} 的本征值. 为保证 $0 < \theta_\beta < \frac{\pi}{2}$, 需

表 1 刚度系数计算值 (单位 MeV)

| 核 | $c_{\rho 0}$ | C_{h0} | $C_{\rho h0}$ | $C_{\rho sd}$ | $C_{h sd}$ | $C_{\rho h sd}$ | θ_c (deg) |
|-------------------|--------------|----------|---------------|---------------|------------|-----------------|---------------------|
| ²⁰⁰ Tl | 1013.11 | 39.30 | 13.38 | 34.24 | 404.81 | 13.12 | 0.41° |
| ²⁰⁶ Bi | 979.37 | 39.65 | 14.05 | 47.07 | 390.51 | 13.06 | 0.47° |
| ²¹² At | 943.62 | 39.98 | 14.73 | 77.93 | 331.47 | 27.46 | 0.97° |
| ²²⁶ Ra | 906.42 | 40.59 | 15.61 | 91.48 | 314.03 | 37.46 | 1.44° |
| ²³⁶ U | 815.28 | 41.09 | 17.12 | 144.07 | 246.14 | 57.06 | 2.23° |
| ²⁴⁰ Pu | 763.08 | 41.30 | 17.92 | 164.34 | 229.25 | 62.42 | 2.42° |
| ²⁴⁴ Cm | 708.60 | 41.48 | 18.75 | 190.84 | 194.42 | 66.18 | 2.78° |
| ²⁵⁴ Fm | 602.97 | 41.87 | 20.36 | 222.94 | 163.24 | 68.20 | 1.72° |

$\beta_1 > \beta_2$. 求出的结果写在表1和2里. 从中可知: $\theta_\beta > \theta_c$, 且 $\varphi = \theta_\beta - \theta_c$ 大约在 4° 左右.

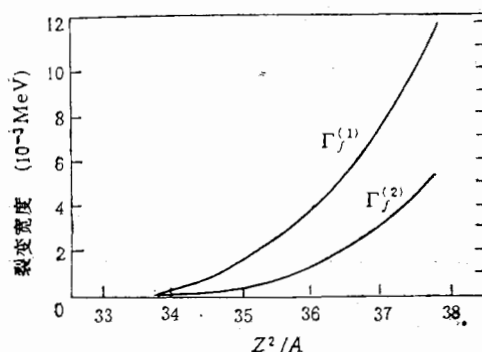
表2 惯性张量和粘滞张量计算值

| 核 | $M_{\rho s d}$ | $\frac{M_{h s d}}{(M_0 R_0^2)}$ | $M_{\rho h s d}$ | $\beta_{\rho s d}$ ($2\pi\beta_0 R_0^2$) | $\beta_{h s d}$ | $\beta_{\rho h s d}$ | θ_β |
|-------------------|----------------|---------------------------------|------------------|---|-----------------|----------------------|----------------|
| ^{200}Tl | 1.0398 | 2.7594 | 1.5309 | 2.0417 | 13.4256 | 3.0204 | 3.73° |
| ^{206}Bi | 1.1131 | 1.8924 | 1.3008 | 2.2148 | 9.4826 | 2.3129 | 4.28° |
| ^{212}At | 1.2149 | 1.1986 | 1.0698 | 2.5595 | 6.3277 | 1.7774 | 5.48° |
| ^{226}Ra | 1.2639 | 1.0036 | 0.9947 | 2.7482 | 5.4704 | 1.6412 | 6.16° |
| ^{236}U | 1.4125 | 0.5612 | 0.7765 | 3.4952 | 3.3629 | 1.3466 | 8.03° |
| ^{240}Pu | 1.4640 | 0.4634 | 0.7158 | 3.7920 | 2.8854 | 1.2689 | 7.53° |
| ^{244}Cm | 1.5498 | 0.3258 | 0.6140 | 4.4459 | 2.1505 | 1.2336 | 5.87° |
| ^{254}Fm | 1.6496 | 0.2151 | 0.5120 | 5.2407 | 1.5355 | 1.1894 | 4.31° |

表3 计算结果 ($\beta_0 = 10^{-23}\text{MeV}\cdot\text{sec}\cdot\text{fm}^{-3}$, $E^* = 50\text{MeV}$)

| 核 | $B_f(\text{MeV})$ | $T_{s d}/T_0\sqrt{C_{\rho 0}/ C_{\rho s d} }\sqrt{\det C_0/ \det C_{s d} }$ | | | $H^{(1)}$ | $H^{(2)}$ | $\frac{\Gamma_f^{(1)}}{\Gamma_f^{(2)}} (10^{-3}\text{MeV})$ | |
|-------------------|-------------------|---|--------|--------|-----------|-----------|---|---------|
| ^{200}Tl | 15.066 | 0.8358 | 5.4397 | 1.6807 | 0.3828 | 0.4054 | 0.0133 | 0.0036 |
| ^{206}Bi | 12.768 | 0.8617 | 4.5611 | 1.4431 | 0.4391 | 0.4599 | 0.0499 | 0.0143 |
| ^{212}At | 10.696 | 0.8866 | 3.4630 | 1.1878 | 0.5521 | 0.5656 | 0.1679 | 0.0523 |
| ^{226}Ra | 8.834 | 0.9073 | 3.1477 | 1.1018 | 0.5589 | 0.5664 | 0.4410 | 0.1419 |
| ^{236}U | 5.781 | 0.9404 | 2.3787 | 0.9262 | 0.6462 | 0.6475 | 2.8565 | 1.0480 |
| ^{240}Pu | 4.501 | 0.9539 | 2.1548 | 0.8662 | 0.6684 | 0.6689 | 6.3728 | 2.4453 |
| ^{244}Cm | 3.437 | 0.9650 | 1.9268 | 0.8367 | 0.6793 | 0.6794 | 12.0049 | 5.0314 |
| ^{254}Fm | 1.932 | 0.9805 | 1.6446 | 0.7778 | 0.6717 | 0.6742 | 28.6641 | 13.3053 |

表3中上标“1”表示一维情况, “2”代表二维情况. 其中一维计算采用了与二维相同的核形状公式, 只是令 $h = 0$.

图1 裂变宽度随库仑参数 Z^2/A 的变化

是个明显小于1的数, 这就使得二维裂变宽度远小于一维裂变宽度. 另外, 当核的 Z^2/A 越大, g 就越大, 即基态与鞍点之间的势能曲面变得平坦. 从而有: 裂变宽度的二维修正将随着核的可裂变性增加而降低.

另一因子 H 的值确定于裂变核体系在鞍点附近的动力学行为. 计算显示出: 二维中

从表3和图1中可见, 二维裂变宽度大约是一维的一半左右. 裂变宽度的二维修正主要取决于两个因子 $\sqrt{\det c_0/|\det c_{s d}|}$ 和 H 的贡献. 第一个因子是几何因子, 它可表为基态势能曲面与鞍点势能曲面的高斯曲率之比. 通过计算, 我们得知鞍点处的势能曲面的曲率绝对值比基态的要大得多, 以致于二维与一维的几何因子之比

$$g = \sqrt{\frac{\det c_0}{|\det c_{s d}|}} / \sqrt{\frac{c_{\rho 0}}{|c_{\rho s d}|}}$$

的 H 值比一维的略大一点,因此二维裂变宽度的降低主要是几何条件所决定.值得注意的是,由于形变核的惯性张量的非对角化的影响,则核系统从基态扩散到鞍点的平均动力学轨道要偏离由势能极小所确定的路径,从而使得平均几率流通过鞍点时将偏向 h 减小的方向,而接近于 ν_1 和 ν_2 中的极小值所决定的轴方向,其中 ν_1, ν_2 是矩阵 $\nu = M^{-\frac{1}{2}}\beta M^{-\frac{1}{2}}$ 的两个本征值.鉴于粘滞张量的非对角化,我们发现 $\min(\nu_1, \nu_2) < \frac{\beta_0}{M_\rho} < \max(\nu_1, \nu_2)$,这

里 $\frac{\beta_0}{M_\rho}$ 是一维裂变宽度的计算量.那么沿着二维裂变道方向上的粘滞阻力将介于 $\min(\nu_1, \nu_2)$ 和 $\frac{\beta_0}{M_\rho}$ 之间,也就是说,二维裂变路径上的阻力必定小于一维的,致使 H 值变大.故从动力学观点来看,几率流更容易通过一个二维位垒,但其效应远小于多维几何效应.

我们还研究了裂变宽度对两体粘滞系数 β_0 的依赖关系.其中粘滞张量正比于 β_0 ,本文 β_0 是唯一的可调参数.结果画于图2.我们发现比值 $H^{(1)}/H^{(2)}$ 当 β_0 增加时而接近1,这是由于空间各向异性的程度随着 β_0 的上升而降低.而总的裂变宽度(包括一维和二维的)将依 β_0 的加大而减小.

总之,本文的计算结果表明:裂变宽度的二维修正主要取决于形变势能曲面的几何形状,多维效应对裂变宽度的计算有着显著的影响.这也提示我们,研究位垒逃逸等问题时,不能在较真实的多维形变空间中简单地冻结某些自由度,为了能得到接近多维情况的合理结果,应该寻找一组等效的一维动力学参数.

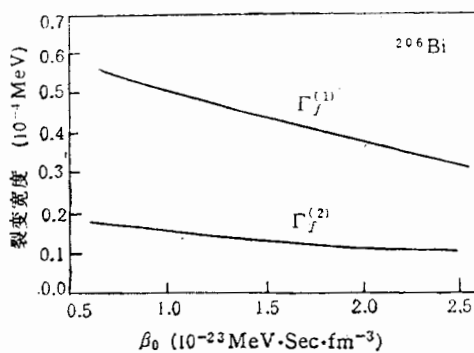


图2 ^{206}Bi 核的一维和二维裂变宽度随两体粘滞系数的变化

参 考 文 献

- [1] H. A. Kramers, *Physica*, 7(1940), 284.
- [2] Wu Xizhen and Zhuo Yizhong *Chin. J. Nucl. Phys.*, 2(1980), 257.
- [3] Hu Jimin and Zhong Yunxiao, *Phys. Energ. Fortis. Phys. Nucl.* 4(1980), 368.
- [4] H. A. Weidenmüller and Zhanq Jing shang, *J. Stat. Phys.*, 34(1984), 191.
- [5] Zhang Jingshang and H. A. Weidenmüller, *Phys. Rev.*, C28(1983), 2190.
- [6] J. Schirmer et al., *Nucl. Phys.*, A199(1979), 31.
- [7] K. T. R. davies, A. J. Sierk and J. R. Nix, *Phys. Rev.*, C13(1976), 2385.
- [8] M. Brack et al., *Rev. Mod. Phys.*, 44(1972), 320.
- [9] W. D. Myers and W. J. Swiatecki, *Ar. Fys.*, 36(1967), 343.

STUDY OF MULTIDIMENSIONAL FISSION WIDTH IN THE QUASI-STATIONARY APPROXIMATION

BAO JINGDONG ZHANG JINGSHANG ZHUO YIZHONG

(Institute of Atomic Energy, Beijing)

ABSTRACT

The two-dimensional fission width in the quasi-stationary approximation is calculated by using the (c, h, a) parametrization. The difference between the two-dimensional and the one-dimensional cases is analyzed.