第14卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 14, No. 2
1990年2月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Feb., 1990

IBFM 中费米子算符的表达式

陈 学 俊
(清华大学物理系,北京)

摘 要

本短文给出了包含 g 玻色子的 IBFM 中费米子算符的表达式.

在奇A核的集体运动态的 IBFM 描写方式以及有关的问题中[1],费米子算符的映射表达式起着重要的作用. 在 IBFM 中,玻色子算符 (s, d, g) 和费米子算符 (c) 是共存的. 如果我们直接采用 $\{(s^+)^m(d^+)^n(g^+)^p(c^+)^q|0\rangle\}$ 作为基,那我们会遇到很大的麻烦,因为这里所说的玻色子实际上是费米子对算符,它和费米子算符之间的对易关系非常复杂,例如,

$$[c, s^+]_\pm \neq 0, \quad [c, d^+]_\pm \neq 0, \cdots \tag{1}$$

解决这一麻烦的方法之一是引入准费米子算符 a(或者称为费米子算符的"正交投影"),它满足:

$$[a, s^+]_\pm = [a, d^+]_\pm = [a, g^+]_\pm = 0. \tag{2}$$

因而,采用 $\{(s^+)^n(d^+)^m(g^+)^p(a^+)^q|0\rangle\}$ 作为基就非常方便.

沿着这样的方式发展,显然必须建立 c 与 s, d, g, a 的关系. 在只有 s 和 d 玻色子的情况下, Scholten[2]利用 Arima[3]等发展的映射方法,已经建立了 c 的具体形式. 类似的形式也由 Morrison 等[4]给出. 正如一些作者指出的[5], g 玻色子有时起着不可忽视的作用,由此产生一个问题,即存在 g 玻色子时, c 的形式是怎样的呢? 本短文正是要讨论这一问题. 我们也是利用 Arima 等的方法. 因此,我们在这里只给出结果,中间的演算从略.

先考虑单 j 的情况. 和文[6]一样,对于包含 g 玻色子的情形,费米子算符 c^+_{jm} 也可以写成如下的展开形式:

$$\begin{aligned} c^+_{jm} = {} & A_1 a^+_{jm} + A_2[s^+\tilde{a}_j]_{jm} + A_3[d^+\tilde{a}_j]_{jm} \\ & + A_4[g^+\tilde{a}_j]_{jm} + A_5 s^+[\tilde{d}a^+_j]_j \\ & + A_6 s^+[\tilde{g}a^+_j]_j + \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

在这里,[…]代表角动量的耦合,而 $\tilde{a}_{jm}, \cdots$ 的规定如下:

$$\tilde{a}_{jm} = (-1)^{j-m}a_{j-m}, \cdots \tag{4}$$

利用映射方法,即让某一费米子算符在壳模型空间中的矩阵元等于它的"映射"在玻色子-准费米子空间中的矩阵元,而且只限于考虑最低几个"高位数态"(Seniority States),

本文1988年7月9日收到.

可以得到：

$$\langle s^N j \| c_j^\dagger \| s^N \rangle = \left(\frac{\Omega - N}{\Omega}\right)^{\frac{1}{2}} \langle s^N j \| a_j^\dagger \| s^N \rangle, \tag{5}$$

$$\langle s^N \| c_j^\dagger \| s^{N-1} j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \langle s^N \| [s^+ \tilde{a}_j]_j \| s^{N-1} j \rangle, \tag{6}$$

$$\langle D s^N \| c_j^\dagger \| s^N j \rangle = \left(\frac{10(\Omega - N - 1)}{(\Omega - 1)(2j + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} \times \langle d s^N \| [d^+ \tilde{a}_j]_j \| s^N j \rangle, \tag{7}$$

$$\langle s^N j \| c_j^\dagger \| s^{N-1} D \rangle = \left(\frac{10}{(\Omega - 1)(2j + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} \times \langle s^N j \| s^+ [\tilde{d} a_j^\dagger]_j \| s^{N-1} d \rangle, \tag{8}$$

$$\langle G s^N \| c_j^\dagger \| s^N j \rangle = \left[\frac{18(\Omega - N + 1)}{(\Omega - 1)(2j + 1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times \langle g s^N \| [g^+ \tilde{a}_j]_j \| s^N j \rangle, \tag{9}$$

$$\langle s^N j \| c_j^\dagger \| s^{N-1} G \rangle = \left[\frac{18}{(\Omega - 1)(2j + 1)}\right]^{\frac{1}{2}} \times \langle s^N j \| s^+ [\tilde{g} a_j^\dagger]_j \| s^{N-1} g \rangle, \tag{10}$$

上面六个式子中的左边是费米子算符在壳模型空间中的约化矩阵元，右边代表的是玻色子，准费米子算符在玻色子-准费米子空间中的约化矩阵元．大写的 S、D、G 代表费米子对算符、角动量分别为 0、2、4，N 是玻色子数目．Ω 为

$$\Omega = (2j + 1)/2.$$

综合(5)—(10)，我们可得到：

$$\begin{aligned} c_j^\dagger \to & \sqrt{\frac{\Omega - N}{\Omega}}\, a_j^\dagger + \frac{1}{\sqrt{\Omega}} [s^+ \tilde{a}_j]_j \\ & + \sqrt{\frac{\Omega - N - 1}{\Omega - 1}} \sqrt{\frac{10}{2j + 1}} [d^+ \tilde{a}_j]_j \\ & + \sqrt{\frac{18}{2j + 1}} \sqrt{\frac{\Omega - N - 1}{\Omega - 1}} [g^+ \tilde{a}_j]_j \\ & + \sqrt{\frac{10}{(\Omega - 1)(2j + 1)}}\, s^+ [\tilde{d} a_j^\dagger]_j \\ & + \sqrt{\frac{18}{(\Omega - 1)(2j + 1)}}\, s^+ [\tilde{g} a_j^\dagger]_j \\ & + \cdots. \end{aligned} \tag{11}$$

对于多 j 的情况，处理方法完全类似，经过演算可得到：

$$\langle s^N j' \| c_j^\dagger \| s^N \rangle = u_j \langle s^N j' \| a_j^\dagger \| s^N \rangle, \tag{12}$$

$$\langle s^N \| c_j^\dagger \| s^{N-1} j' \rangle = \frac{\alpha_j}{\sqrt{\Omega_e}} \langle s^N \| [s^+ \tilde{a}_j]_j \| s^{N-1} j' \rangle, \tag{13}$$

$$\langle s^N D\|c_j^+\|s^N j'\rangle = -(-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{5(1+\delta_{jj'})}{2j+1}}\times\langle s^N d\|[d^+\tilde{a}_{j'}]_j\|s^N j'\rangle, \tag{14}$$

$$\langle s^N G\|c_j^+\|s^N j'\rangle = -(-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{9(1+\delta_{jj'})}{2j+1}}\times\langle s^N g\|[g^+\tilde{a}_{j'}]_j\|s^N j'\rangle, \tag{15}$$

$$\langle s^N j'\|c_j^+\|s^{N-1}D\rangle = (-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{5(1+\delta_{jj'})}{2j'+1}}\frac{\alpha_j}{\sqrt{\Omega_e}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{N}{\Omega_e}}}\times\langle s^N j'\|s^+[\tilde{d}a_{j'}^+]_j\|s^{N-1}d\rangle, \tag{16}$$

$$\langle s^N j'\|c_j^+\|s^{N-1}G\rangle = (-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{9(1+\delta_{jj'})}{2j'+1}}\frac{\alpha_j}{\sqrt{\Omega_e}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{N}{\Omega_e}}}\times\langle s^N j'\|s^+[\tilde{g}a_{j'}^+]_j\|s^{N-1}g\rangle, \tag{17}$$

式中的 u_j, $\beta_{jj'}$, Ω_e 和 α_j 均和文[2]的定义一致,在此从略. 其它符号和单 j 的情况相同.

综合(12)—(17)可以得到一般情况下的 c_j^+ 表达式:

$$\begin{aligned} c_j^+ \to\ & u_j a_j^+ + \frac{\alpha_j}{\sqrt{\Omega_e}}[s^+\tilde{a}_j]_j \\ & - \sum_{j'}(-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{5(1+\delta_{jj'})}{2j+1}}[d^+\tilde{a}_{j'}]_j \\ & - \sum_{j'}(-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{9(1+\delta_{jj'})}{2j+1}}[g^+\tilde{a}_{j'}]_j \\ & + \sum_{j'}(-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{5(1+\delta_{jj'})}{2j'+1}}\frac{\alpha_j}{\sqrt{\Omega_e}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{N}{\Omega_e}}}s^+[\tilde{d}a_{j'}^+]_j \\ & + \sum_{j'}(-1)^{j+j'}u_j\beta_{jj'}\sqrt{\frac{9(1+\delta_{jj'})}{2j'+1}}\frac{\alpha_j}{\sqrt{\Omega_e}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{N}{\Omega_e}}}s^+[\tilde{g}a_{j'}^+]_j \\ & + \cdots \end{aligned} \tag{18}$$

(11)和(18)是我们的主要结果. 容易检验,对于单 j 情况,(18)变为(11). 另外,和文 [2,4] 给出的表达式比较起来,(18) 的第三和第五项是由于考虑 g 玻色子而多出来的之外,其它项亦有一些差别,主要表现在因子$\sqrt{1+\delta_{jj'}}$ 和$(-1)^{j+j'}$ 上.究其原因是,我们在演算过程中注意到了不同 j 的核子构成费米子对时,其归一化波函数应包含因子$\sqrt{1+\delta_{jj'}}$ [7],并且在构成的过程中会出现因子$(-1)^{j+j'}$. 对于同 j 核子构成费米子对而言,这两个因子分别为 $\sqrt{2}$ 和(−1),此时,我们的结果又和文[2]一致. 对于不同 j 来说,我们的结果是不同于文[2]的. 可以说,这些是文[2]的作者的一个疏忽. 因为文[2]

的公式已被普遍引用，所以指出这一点是有必要的.

公式(11)和(18)将有一系列应用，例如可用来研究一些核的高自旋反常态[8]，也可以用来研究电子、核子与核的非弹性散射过程中的跃迁强度[9].

参　考　文　献

[1] F. Iachello and O. Scholten, *Phys. Rev. Lett.*, **43**(1979), 679.

[2] O. Scholten, PhD Thesis, University of Gröningen.

[3] A. Arima et al., *Phys. Lett.*, **66B**(1977), 205.

[4] I. Morrison and R. Smith, *Nucl. Phys.*, **A350**(1980), 89.

[5] A. Arima, *Nucl. Phys.*, **A421**, (1984), 63c.

[6] O. Scholten and A. E. L. Dieperink, Interacting Bose-Fermi System in Nuclei (1980), ed. F. Iachello) P. 343.

[7] A. Arima and F. Iachello, *Ann. Phys.* (*N. Y*), 99(1976), 253; **11**(1978), 201; **123** (1979), 468.

[8] I. Morrison, A. Faessler and C. Lima, *Nucl. Phys.*, **A372**(1981), 13.

[9] K. Amos et al., *J. Phys. G. Nucl. Phys.*, **10**(1984), 331.

EXPRESSIONS OF FERMION OPERATORS IN THE INTERACTING BOSON-FERMION MODELS

CHEN XUEJUN

(*Department of Physics, Qinghua University, Beijing*)

ABSTRACT

The expressions of fermion operators in the interacting boson-fermion models including the *g*-boson have been derived in this short communication.