第14卷 第2期　　高能物理与核物理　　Vol. 14, No. 2
1990年2月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Feb., 1990

一个可解的 1+1 维 $U(1)$ 规范模型

郑 波　郭硕鸿
(中山大学物理系,广州)

摘　要

本文提出一个 1+1 维 $U(1)$ 规范模型，准确求解了其能谱及相应的用费米子算符表示的能量本征态.

一、引　言

到目前为止,只有少数的量子规范理论是可解的.对于可解的规范模型,如 Schwinger 模型[1],人们也只能求得其能谱,并不能显示地求出用费米子算符表示的能量本征态[2].我们对量子规范理论结构的了解还远不够深入.

近来,作者找到 1+1 维格点规范理论的一些准确解,直接给出用费米子算符表示的能量本征态,使我们对量子规范理论的认识推进了一步[3]. 本文把工作拓广到连续时空,提出一个不同于 Schwinger 模型的 1+1 维 $U(1)$ 规范模型,在 Hamiltonian 体系下求解了其能谱,并给出相应费米子算符表示的能量本征态.

二、模型及基态

我们采用 Hamiltonian 体系,并只讨论 $U(1)$ 规范群. 对规范场，我们取类时规范

$$A_0 = 0. \tag{2.1}$$

设非相对论性的 $U(1)$ 规范模型的 Hamiltonian 为

$$H = \frac{1}{2}\int dx E(x)^2 - :F\int dx\bar{\phi}(x)(\partial_x + ieA(x))^2\phi(x):, \tag{2.2}$$

其中 e 为实的耦合常数，F 为大于零的实参数，$A(x)$ 为规范场的空间分量，$E(x)$ 为电场，$A(x)$ 和 $E(x)$ 满足对易关系

$$[A(x), E(x')] = -i\delta(x-x'), \tag{2.3}$$

$\phi(x)$ 和 $\phi^+(x)$ 为两分量费米场,记

$$\phi(x) = \begin{pmatrix}\xi(x)\\ \eta^+(x)\end{pmatrix}, \qquad \phi^+(x) = (\xi^+(x)\ \eta(x)), \tag{2.4}$$

本文 1989 年 8 月 16 日收到.

满足反对易关系

$$\{\xi^+(x),\xi(x')\}=\delta(x-x'),\ \{\eta^+(x),\eta(x')\}=\delta(x-x'), \tag{2.5}$$

γ_0 取为

$$\gamma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

而正规乘积“:……:”则只对(2.4)式定义的费米场产生消灭算子作用．事实上，H可以重写为

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}\int dxE(x)^2\\&-F\int dx[\xi^+(x)(\partial_x+ieA(x))^2\xi(x)+((\partial_x+ieA(x))^2\eta^+(x))\eta(x)].\end{aligned} \tag{2.7}$$

不难验证，H在如下三种变换下保持不变：

(1) 剩余的只与空间有关的规范变换

$$A(x)\to A(x)-\partial_x\theta(x),\quad \phi(x)\to e^{ie\theta(x)}\phi(x). \tag{2.8}$$

(2) 空间反演

$$x\to -x,\ A(x)\to -A(x),\ \phi(x)\to\phi(x). \tag{2.9}$$

注意，这里并不象通常情形，需要 $\phi(x)\to\gamma_0\phi(x)$.

(3) γ_0 变换

$$\phi(x)\to e^{i\alpha\gamma_0}\phi(x), \tag{2.10}$$

其中 α 为实常数．

我们定义$|0\rangle$态如下：

$$E(x)|0\rangle=0,\ \xi(x)|0\rangle=0,\ \eta(x)|0\rangle=0. \tag{2.11}$$

显然，

$$H|0\rangle=0, \tag{2.12}$$

即$|0\rangle$为H的能量为零的本征态．对(2.7)式右边作分部积分，得

$$\begin{aligned}H=&\frac{1}{2}\int dxE(x)^2+F\int dx((\partial_x-ieA(x))\xi^+(x))(\partial_x+ieA(x))\xi(x)\\&+F\int dx((\partial_x+ieA(x))\eta^+(x))(\partial_x-ieA(x))\eta(x).\end{aligned} \tag{2.13}$$

因为

$$\begin{aligned}&E(x)^+=E(x),\\&((\partial_x+ieA(x))\xi(x))^+=(\partial_x-ieA(x))\xi^+(x),\\&((\partial_x-ieA(x))\eta(x))^+=(\partial_x+ieA(x))\eta^+(x),\end{aligned} \tag{2.14}$$

所以H正定，即$|0\rangle$为H的基态．

三、能 谱 的 求 解

由H的对称性，我们只需要考虑双费米子状态．一般地，规范不变、空间平移不变的状态为

$$|E\rangle = \int dx dx' f_E(x-x')\xi^+(x) e^{ie\int_x^{x'} A(t)dt} \eta^+(x')|0\rangle. \tag{3.1}$$

我们要求$|E\rangle$为H的能量本征态，即

$$H|E\rangle = E|E\rangle, \tag{3.2}$$

由(2.7)及(3.1)式容易导出 $f_E(x)$ 必须满足的方程

$$\frac{1}{2}e^2|x|f_E(x) - 2F\partial_x^2 f_E(x) = Ef_E(x). \tag{3.3}$$

从(3.3)可见，正反粒子以线性势相互作用．利用 $f_E(x)$ 的有限性，不难得到

$$f_E(x) = \begin{cases} \dfrac{c^{(+)}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty dp\cos\left(\frac{4F}{3e^2}p^3 + \left(x - \frac{2E}{e^2}\right)p\right) & (x>0) \\ \dfrac{c^{(-)}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty dp\cos\left(\frac{4F}{3e^2}p^3 + \left(-x - \frac{2E}{e^2}\right)p\right) & (x<0), \end{cases} \tag{3.4}$$

其中 $c^{(\pm)}$ 为常数．由 Airy 函数 $\phi(x)$ 的定义[4]

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dp\cos\left(\frac{1}{3}p^3 + px\right), \tag{3.5}$$

$_E(x)$ 可以表示为

$$f_E(x) = \begin{cases} c^{(+)}\phi\left(\left(x - \dfrac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\dfrac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) & (x>0) \\ c^{(-)}\phi\left(\left(-x - \dfrac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\dfrac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) & (x<0). \end{cases} \tag{3.6}$$

对偶宇称态，由 $x=0$ 处解的连接条件，得

$$c^{(+)} = c^{(-)}, \tag{3.7}$$

$\phi'(x)$ 的零点方程

$$\phi'\left(-\left(\frac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) = 0 \tag{3.8}$$

决定能量E的值．对奇宇称态，则

$$c^{(+)} = -c^{(-)}, \tag{3.9}$$

$\phi(x)$ 的零点方程

$$\phi\left(-\left(\frac{2E}{e^2}\right)\Big/\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}\right) = 0 \tag{3.10}$$

决定能量E的值．(3.8)和(3.10)式都只当$E>0$才有解，(3.8)给出的第一激发态能量和(3.10)给出的第二激发态能量为

$$E_1 = 0.51e^2\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3},$$
$$E_2 = 1.17e^2\left(\frac{4F}{e^2}\right)^{1/3}. \tag{3.11}$$

因为当 $x\to+\infty$，Airy 函数的渐近行为是

$$\phi(x) \sim \frac{1}{2}x^{-1/4}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}, \tag{3.12}$$

所以由(3.6)式可见，在我们的模型中费米子是禁闭的．

四、结果与讨论

（1）本文提出一个 $1+1$ 维 $U(1)$ 规范模型．模型是非相对论性的，但仍然有正反粒子存在．类似的物理概念在固体理论中广泛应用．

（2）我们准确求解了模型的能谱及相应费米子算符显示表示的能量本征态．结果显示费米子被线性势所禁闭．

（3）即使我们在模型中加入费米子质量项：$m\int dx\bar{\phi}(x)\phi(x)$：，模型仍然可解．实际上，这时只需在第三节的结果中令 $E\to E+2m$ 即可．

（4）本文的意义在于，我们不但可以求得模型的能谱，而且解出了相应用费米子算符表示的能量本征态．对今后规范理论，包括格点规范理论，甚至于固体物理的进一步研究都是有益的．

参　考　文　献

[1] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, **128**(1962), 2425.
[2] J. H. Lowenstein and J. A. Swieca, *Ann. Phys.*, **68**(1971), 172.
J. Kogut and L. Susskind, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 3594.
R. Roskies and F. Schaposnik, *Phys. Rev.*, **D23**(1981), 558.
[3] 郑波、郭硕鸿，高能物理与核物理，**13**(1989)，696.
郑波，高能物理与核物理，**13**(1989)，778.
郑波，“Massive 格点 Schwinger 模型的准确基态和弦张力”，高能物理与核物理，**13**(1989)，
Zheng Bo, “Exact ground state and string tension in 1 + 1-dimensional lattice gauge theories”, submitted to Phys. Rev. D.
[4] L. D. Landon and E. M. Lifskitz, Quantum Mechanics (Pergamon Press, Oxford·London·Paris, 1985).

A SOLVABLE 1+1-DIMENSIONAL $U(1)$ GAUGE THEORY

Zheng Bo　Guo Shuohong

(Department of Physics Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

A $1+1$-dimensional $U(1)$ gauge theory is proposed and the exact solution of its spectrum and corresponding energy eigenstates is found.