

基础表示的定模 $SU(2)$ Higgs 模型的计算*

郑希特 刘备书
(成都科技大学物理系)

摘 要

用变分-累积展开方法,在格点上对基础表示的定模 Higgs 场与 $SU(2)$ 纯规范场的耦合系统的相图进行解析计算至三级近似。利用二级近似的自由能展开式改进了变分参数的确定方法,计算所得相图与 Monte Carlo 结果符合很好,而且明确判定了三级近似下相变的级别。

一、引 言

在格点规范理论中对 $SU(2)$ 规范场与 Higgs 场相耦合的系统近年来有不少研究。其动机是多方面的:它是弱电统一模型的一部分,对它的研究是对弱电统一标准模型作非微扰研究的第一步;它有助于深入探索 Higgs 机制及对 Higgs 粒子性质的探讨;在方法上可望对规范场与费米子耦合系统的研究有所启示。

当 Higgs 场为定模时,理论分析^[1]指出存在着禁闭相与 Higgs 相,二者是解析连通的。Monte Carlo 模拟^[2-5] (MC) 完全肯定了这一点,但是对确定相变线是一级还是二级没有一致意见,为深入了解,需要系统的解析研究。我们曾提出采用变分-累积展开方法进行研究^[6],在平均模长近似下对变模情况的计算得到了与 MC 定性符合的结果^[7]。

在变分-累积展开中引入了试探作用量,其变分参数的确定对累积展开的收敛速度有影响。在最低级(一级)近似下利用 Jensen 不等式得到了许多结果^[8],在二级近似下对 $U(1)$ 系统也有一些探讨^[9]。正如在统计物理中累积展开的收敛性没有普遍证明一样,在这里确定变分参数而对累积展开收敛速度之影响也因系统而异。

本文以定模 $SU(2) + \text{Higgs}$ 系统的相图计算为例,用对自由能的逐级变分的极小条件来确定变分参数,所算得的相图与 MC 结果符合很好,而且明确判定相变线在三级近似下是一级相变。

二、累积展开

考虑维数 $d = 4$ 的超立方格子, $U_i \in SU(2)$ 定义在链上, Higgs 场 $\phi(x)$ 定义在

* 国家自然科学基金资助课题并部分受成都科技大学科技发展基金资助。
本文 1989 年 6 月 12 日收到。

格点上. 在基础表示中 Higgs 场 $\phi(x)$ 可以通过其模 $\rho(x)$ 与定义在格点上的 $\sigma(x) \in SU(2)$ 来表示^[2]. 对定模 $\rho(x) = 1$ 的情形, 可作一规范变换使 $\sigma(x)$ 从作用量中消失, 注意到对 $SU(2)$ 群 $\text{tr}U_l = \text{tr}U_l^\dagger$, 于是系统的作用量为

$$S = S_G - \kappa \sum_l \text{tr}U_l, \quad (1)$$

$$S_G = \beta \sum_P \text{tr}U_P. \quad (2)$$

这里 $U_P = \prod_{l \in P} U_l$ 是绕元格 P 的四个链上的 $SU(2)$ 群元的顺次乘积, \sum_P 与 \sum_c 分别

对所有元格与链求和, $\beta = \frac{2}{g^2}$, κ 为耦合常数.

引入试探作用量

$$S_0 = J \sum_l \text{tr}U_l, \quad (3)$$

J 为待定变分参数. 系统的配分函数可通过累积展开表示^[6]:

$$Z \equiv e^{-FM} = Z_0 \exp \sum_n \frac{1}{n!} K_n, \quad (4)$$

$$Z_0 \equiv e^{-F_0 M} = \int [dU] e^{S_0} = \left[\frac{I_1(2J)}{J} \right]^{Md} \equiv [f(J)]^{Md}, \quad (5)$$

这里 F 为系统单位格点自由能, M 为格点总数, F_0 是以 S_0 为作用量的系统的单位格点自由能, $I_1(2J)$ 为一阶变型贝塞尔函数, K_n 是以 Z_0 为配分函数的累积平均:

$$K_n = \left\langle \left[S_G + (\kappa - J) \sum_l \text{tr}U_l \right]^n \right\rangle_c. \quad (6)$$

类似[8]的证明, 有

$$K_n = \sum_{l=0}^{n-1} C_n^l (\kappa - J)^l \frac{\partial^l}{\partial J^l} \langle S_G^{n-l} \rangle_c + (\kappa - J)^n \frac{\partial^n}{\partial J^n} \ln Z_0. \quad (7)$$

$\langle S_G^{n-l} \rangle_c$ 的计算与[8]中的完全一样, 用那里的符号

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{f(J)} \frac{\partial f(J)}{\partial J} = \frac{I_2(2J)}{I_1(2J)}, \quad (8)$$

$$\omega_n = \frac{1}{f(J)} \frac{\partial^n f(J)}{\partial J^n}, \quad n \geq 2, \quad (9)$$

$$\Omega = \frac{1}{3} (\omega_2 - 1). \quad (10)$$

可写出自由能至 i 级近似为

$$F_i(\beta, \kappa, J) = F_0 - \frac{1}{M} \sum_{n=1}^i \frac{1}{n!} K_n. \quad (11)$$

当 $i \rightarrow \infty$ 时 $F_i(\beta, \kappa, J) \rightarrow F(\beta, \kappa)$ 并不再是 J 的函数. 具体写出前两级的表达式为

$$F_1(\beta, \kappa, J) = -d \cdot \ln f(J) - 2d(\kappa - J)\omega_1 - d(d-1)\beta\omega_1^2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 F_2(\beta, \kappa, J) = & F_1 - \frac{1}{4} d(d-1)\beta^2 [3Q^4 + 1 - 4\omega_1^2 \\
 & + 4(2d-3)\omega_1^6(\omega_2 - 4\omega_1^2)] - 2d(d-1)\beta(\kappa - J)\omega_1^2(\omega_2 - 4\omega_1^2) \\
 & - \frac{1}{2} d(\kappa - J)^2(\omega_2 - 4\omega_1^2). \quad (13)
 \end{aligned}$$

在确定 J 之后可由自由能的行为讨论相结构。

三、一级近似下 J 与相图的确定

变分参数的确定一般是通过系统的能量极值条件，理论上这是最合理的方法。在一级近似下由于 Jensen 不等式的存在，由 F_1 对 J 变分求极小而定出 $J(\beta)$ 代入 F_1 后就给出了系统自由能的上界。高级近似的 F_i 由于与真值 F 之间的关系不明，故 F_i 的极值并不一定是 F 的最佳近似值。但是，基于系统基态总是在其自由能极小处实现，作为一种

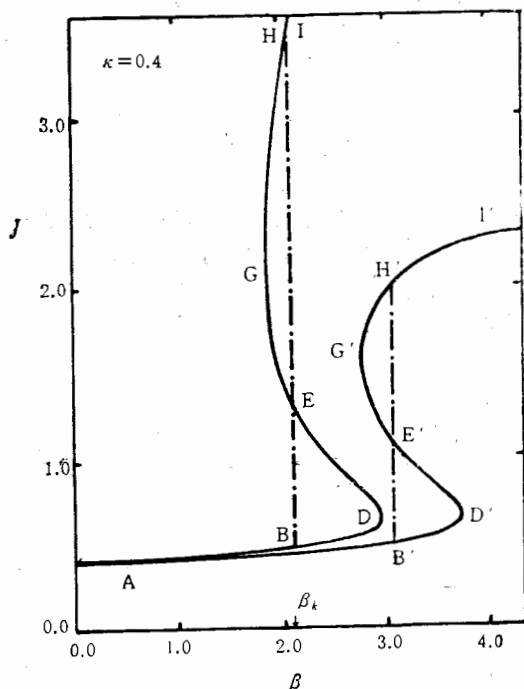


图1 $\kappa = 0.4$ 的 $J(\beta)$ 关系
 ABDEGHI (AB'D'E'G'H'I') 为一级(二级)
 近似的结果,点划线按等面积律作出。

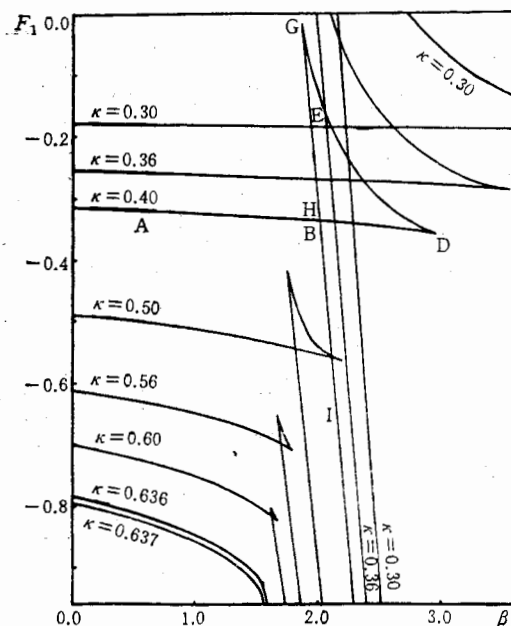


图2 一级近似的等 κ 线图 $F_1(\beta)$

指导原则,应对 $F_i (i \geq 2)$ 仍采用变分极小条件。如果在某一级这条件并没有给出较其低一级近似更好的结果,应考虑是由于有限级近似收敛还不够好而造成,需要进而作更高级修正。当然,由于技术上的原因,也可以考虑采用其它较为简单的辅助手段来定 $J(\beta)$ 。于是由

$$\frac{\delta F_i}{\delta J} = 0, \quad (14)$$

在一级近似时 ($i = 1$) 有

$$\kappa - J + 2(d-1)\beta\omega_1^3 = 0. \quad (15)$$

图 1 中给出 $\kappa = 0.4$ 的 (15) 式的 $J(\beta)$ 曲线 ABDEGHI 当 J 增加时, β 先到达一个极大点 D , 然后减少至极小点 G , 然后再增大. 以这 $J(\beta)$ 代入 (12) 式可算得 $F_1(\beta, \kappa = 0.4, J(\beta))$, 与图 1 对应的 F_1 用 ABDEGHI 画在图 2 上. 由它可清楚看出在固定 $\kappa = 0.4$, β 逐渐增大时自由能沿 AB 变化至等 κ 线的自交叉点 $B(=H)$ 时, 系统为取最低值自由能“跳”到沿 HI 变化而不作沿三边形 BDG 的变化, 在 B 点 $\partial F_1 / \partial \beta$ 不连续, 明确显示一级相变的发生.

与图 2 对应, 在图 1 上 $J(\beta)$ 的变化将实现从 B 点沿点划线 BEH 直接“跳”到 H 点. 有趣的是, 这个等 κ 线在 β - J 平面上与统计物理中 p - v 平面上的 van der Waals 等温线相似. 我们按“等面积法则”使 BDE 的面积与 EGH 的面积相等而定下 B 点的位置, 与图 2 所定的 β_κ 基本一致.

在图 2 上还给出了一系列 F_1 的等 κ 线, 每一等 κ 线的自交叉点的横坐标确定一个 β_κ 值, (κ, β_κ) 就给出 κ - β 平面上的一个一级相变点. 随着 κ 之增大, F_1 线自交叉所形成的三角形面积和在自交叉点一级导数的间断量 $\Delta\left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta}\right)$ 逐渐减少, 在 $\kappa_c = 0.637$ 时消失. 这样, 在一级近似下的相变线如图 3 中的虚线所示. 该图中的点划线为 MC 结果^[3], 可见, 一级近似还不足以正确描述系统的相结构.

注意到当 $\kappa \rightarrow 0$ 时我们应该回到纯 $SU(2)$ Wilson 模型. 的确, 当 $\kappa \rightarrow 0$ 时, 图 1、2 中的 D 点向 $+\beta$ 方向趋于无穷, AD 线逐渐逼近 β 轴并最后与之重合, 图 2 就成了文献[10]中图 2 所示的结构.

四、二级近似下 J 与相图的确定

在二级近似时 ($i = 2$) 由 (14) 式有

$$a\beta^2 + b(\kappa - J) \cdot \beta + c(\kappa - J)^2 = 0, \quad (16)$$

这里

$$a \equiv a(J) = \frac{1}{2} (d-1) [12\mathcal{Q}^3\mathcal{Q}'$$

$$- 32(8d-11)\omega_1^2\omega_1' + 4(2d-3)\omega_1^3(\omega_2'\omega_1 + 6\omega_2\omega_1')], \quad (17)$$

$$b \equiv b(J) = 4(d-1)\omega_1^2[\omega_2'\omega_1 + \omega_1'(3\omega_2 - 20\omega_1^2)], \quad (18)$$

$$c \equiv c(J) = \omega_2' - 8\omega_1\omega_1', \quad (19)$$

“” 为对 J 求导数. (16) 式的两个解为

$$\beta = \frac{1}{2a} [-b(\kappa - J) \pm |\kappa - J| \sqrt{b^2 - 4ac}]. \quad (20)$$

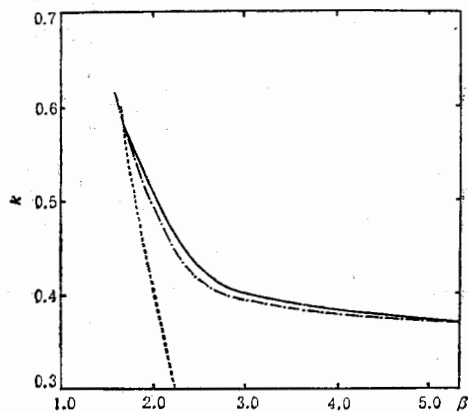


图 3 κ - β 平面的相图
虚线为一级近似, 实线为三级近似, 点划线为 Monte Carlo 结果^[3]

要求 β 取正实数, 由

$$b^2 - 4ac \geq 0, \quad (21)$$

得到 $J_{\min} = 2.357$, 并且 $\kappa > J_{\min}$. 由此可见相变线在二级近似下已不可能抵达 β 轴, 从而再次肯定纯 $SU(2)$ Wilson 模型 ($\kappa = 0$) 没有相变发生. 对 $\kappa > \kappa_{\min}$ 按(16)式所得的等 κ 线族示于图 4, 它们与一级近似的行为相似. 我们把 $\kappa = 0.4$ 的一根二级近似的 $J(\beta)$ 线也画在图 1 上以资比较. 如前所述, 采用等面积法则得到图 4 中虚线 LCM 下的各水平点划线段, 它们是系统按自由能极小原则在相应的纵座标 β_c 处实现相变的路径, 相变时变分参数有一个跳跃. 当 κ 逐渐增大时, 水平线段逐渐缩短, 最后于 $\kappa_c = 0.563$ 时缩为点 c . 对 $\kappa > \kappa_c$, 系统将不经历相变由禁闭相过渡至 Higgs 相.

二级近似下算得的相变线的实线画在图 3 上, (实际为三级近似, 它与二级近似相差极小) 它与 MC 结果有相当好的符合.

在图 5 上画出 $F_2(\beta)$ 的若干等 κ 线, 等 κ 线的自交叉点决定了相变的位置, 与由等面积法则在 $J(\beta)$ 线上定下的一致.

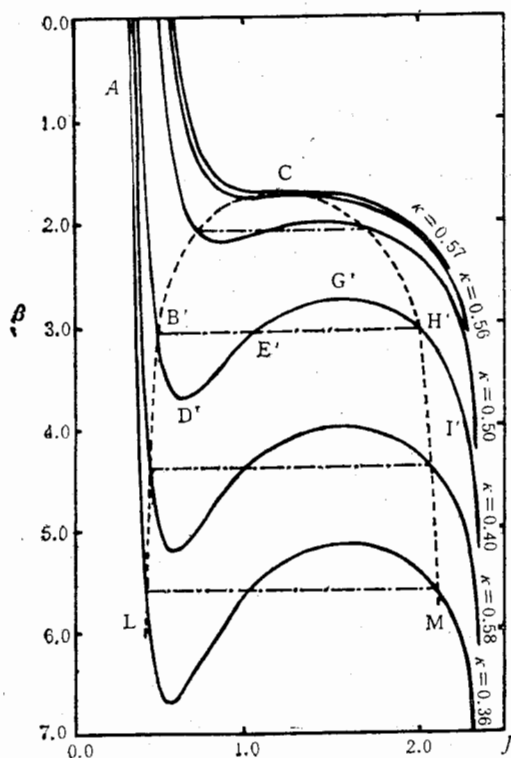


图 4 二级近似的等 κ 线图 $\beta(J)$, 点划线按等面积律作出

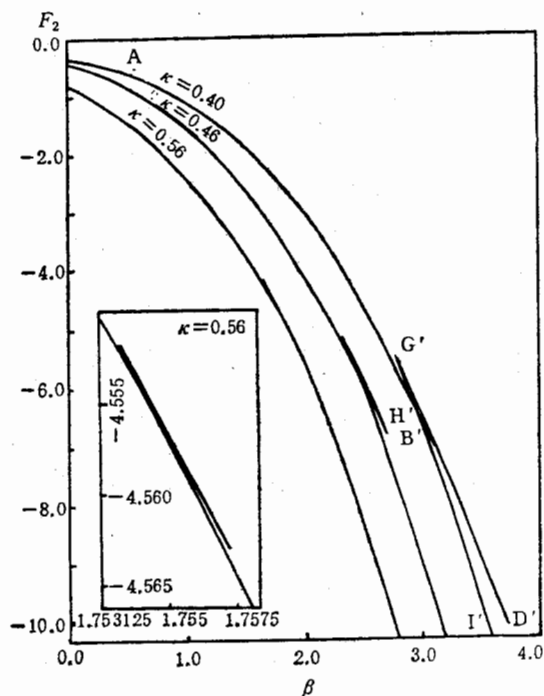


图 5 二级近似的 $F_2(\beta)$ 的等 κ 线图

五、讨 论

(1) 关于相变级别的判定在 MC 中尚无定论, 有说是二级相变^[2,3], 有的则否认^[4,5],

而在连续理论中基于微扰的讨论则猜测相变应是一级^[11]。从我们的结果看, 至累积展开到二级, 相变线为一级。但是在计入高级修正后会不会改变这个结论呢? 比较图 2 和图 5, 虽然在一级近似和二级近似下都是一级相变, 但是在相变点 $\Delta\left(\frac{\partial F_2}{\partial \beta}\right) \ll \Delta\left(\frac{\partial F_1}{\partial \beta}\right)$, 如果 $\Delta\left(\frac{\partial F_i}{\partial \beta}\right)$ 随 i 之增大而继续减小则不能排除高级相变的可能。

(2) 我们以二级近似下定出的 $J(\beta)$ 关系代入 F_3 的表达式(因表达式较长, 这里略去, 可参见[8]), 只需在展开系数中把 $-J \rightarrow \kappa - J$, 结果与 F_2 的差异很小, 显示了较好的收敛性, 对相变点只有微小修正。注意到当 β 较大时相变线有下降的趋势, 这时需要计入累积展开的更高级修正。

参 考 文 献

- [1] K. Osterwalder and E. Seiler, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **110**(1978), 440.
E. Fradkin and S. H. Shenker, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 3682.
- [2] C. B. Lang, C. Rebbi and M. Virasoro, *Phys. Lett.*, **104B**(1981), 294.
- [3] H. Kuhnelt, C. B. Lang and G. Vones, *Nucl. Phys.*, **B230**[FS10](1984), 16.
- [4] M. Tomiya and T. Hattori, *Phys. Lett.*, **140B**(1984), 370.
- [5] I. Montavay, *Phys. Lett.*, **150B**(1985), 441.
- [6] 郑希特, 成都科技大学校庆卅周年论文选集, (1984), 440.
- [7] X. T. Zheng, J. Wang and Z. G. Tan, *Mod. Phys. Lett.*, **A2**(1987), 199.
- [8] X. T. Zheng, Z. G. Tan and J. Wang, *Nucl. Phys.*, **B287**(1987), 171.
- [9] W. Kerler and L. Schulke, *Phys. Lett.*, **201B**(1988), 123.
- [10] X. T. Zheng, C-I Tan and T. L. Chen, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843.
- [11] S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D7**(1973), 1888.

CALCULATION OF THE FIXED LENGTH FUNDAMENTAL $SU(2)$ HIGGS MODEL

ZHENG XITE LIU BEISHU

(Department of Physics, Chengdu University of Science and Technology)

ABSTRACT

The phase diagram of the lattice system of $SU(2)$ gauge field coupled with the fixed length Higgs field in fundamental representation has been calculated by the variational-cumulant expansion method to the third order approximation. The method of determining the variational parameter has been improved by using the free energy to the second order approximation. Thus calculated phase diagram is in good agreement with the Monte Carlo estimation and the order of the phase transition is clearly determined in the third order approximation.