

# 利用最大熵方法研究强子-强子碰撞的高能极限\*

吴元芳 刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉)

## 摘 要

利用最大熵方法研究了强子-强子碰撞的高能极限。定义了不同类型的熵并着重讨论了物理约束的作用。对高能极限下的平均多重数和这一极限与现有实验数据之间的内插作出了确定的预言。

在强子-强子碰撞中有大量粒子产生,情况错综复杂,不容易找到明显的规律性。人们期望,在超高能极限情况下,一方面有可能出现少量的反映新物理的特殊事例,另一方面占碰撞事件大多数的非衍过程的末态会变得比较简单,容易总结出规律。近年来,随着质子-反质子对撞技术的发展,碰撞质心系能量迅速提高,更激起了对高能极限研究的兴趣<sup>[1,2]</sup>。本文的目的是要从普遍的物理考虑出发,讨论强子-强子碰撞的高能极限,并分析向这一极限过渡的方式和条件,用这种方法,对于高能碰撞的大截面背景事例作出了明确的预言。这将有助于寻找数量稀少的反常事例。

大量事实表明,在强子碰撞多粒子产生过程中,随机性起着很大的作用<sup>[3-6]</sup>。这表明,在各种物理约束条件的制约下,多粒子产生是按最大随机的方式进行。能够用来描述随机性的量是熵——信息熵<sup>[7]</sup>,因此,多粒子产生的规律遵循相应约束下的最大熵。

但是,为了在实际中能应用最大熵方法,首先必须知道约束条件。在通常情况下由于强子-强子碰撞的动力学十分复杂,物理约束条件一般很难精确地表述。但随着能量的升高,动力学的影响减弱,随机性的因素增强,在高能极限下,动力学的约束变得十分简单,随机性起着支配作用。因而,对于强子-强子碰撞多粒子产生的高能极限有可能利用最大熵方法进行模型无关的研究。

熵可由所对应的不同随机变量来定义。例如,对应于带电多重数  $n$  的熵是<sup>[8]</sup>:

$$S = - \sum_n P(n) \ln P(n); \quad (1)$$

对应于末态粒子总横能  $E_{\perp}$  的熵是:

$$S_{E_{\perp}} = - \int P(E_{\perp}) \times \ln P(E_{\perp}) dE_{\perp}. \quad (2)$$

最普遍的物理约束条件是能量守恒。即: 在任一有限的质心系能量  $\sqrt{s}$  之下,末态粒子

\* 国家自然科学基金资助的课题。  
本文1989年1月3日收到。

的总平均横能  $\langle E_{\perp} \rangle$  只能取特定的有限值, 所以高能极限应该由这一约束下的总横能熵  $S_{E_{\perp}}$  最大值来决定.

如果上述的能量守恒是唯一的约束条件, 则横能分布的高能极限就应该是<sup>[7]</sup>:

$$P(E_{\perp}) = \frac{1}{\langle E_{\perp} \rangle} e^{-E_{\perp}/\langle E_{\perp} \rangle}.$$

然而, 我们还不应该忘记, 这些末态粒子是由两个人射强子碰撞产生的. 产生末态粒子的能量由两个人射强子的纵向运动能量中取得. 上述事实, 即使在高能极限下, 也会留下痕迹. 基于这一考虑, 我们假定, 强子-强子碰撞的高能极限由下述约束条件下的最大熵决定:

约束条件 A: 两个能源分别对末态粒子的平均总横能给出确定的有限的贡献.

用  $\langle e_{\perp} \rangle = \langle E_{\perp} \rangle / 2$  表示单一能源贡献的平均横能. 由最大熵方法得到对应于每个能源的横能分布

$$P_a(E_{\perp}^a) = (1/\langle e_{\perp} \rangle) \exp(-E_{\perp}^a/\langle e_{\perp} \rangle), \quad (a = P, T).$$

总的横能  $E_{\perp} = E_{\perp}^P + E_{\perp}^T$  的分布应由这两个分布的卷积得到. 这样, 我们就有高能极限公式:

$$P(E_{\perp}) = 4 \frac{E_{\perp}}{\langle E_{\perp} \rangle^2} e^{-2E_{\perp}/\langle E_{\perp} \rangle} (\sqrt{s} \rightarrow \infty). \quad (3)$$

作为一种很好的近似, 可以认为带电多重数正比于总横能<sup>[9,10]</sup>:

$$n \propto E_{\perp}. \quad (4)$$

代入(3)式得到多重数分布的高能极限:

$$P(n) = 8 \frac{n}{\langle n \rangle^2} e^{-2n/\langle n \rangle} (\sqrt{s} \rightarrow \infty). \quad (5)$$

再代入(1)式, 就有带电多重数熵的极限公式:

$$S = a + \ln \langle n \rangle (\sqrt{s} \rightarrow \infty); \quad (6)$$

$$a = 2 - \ln 8 - \langle \ln z \rangle = -0.191,$$

其中,

$$\langle \ln z \rangle = \int (\ln z) 4z e^{-2z} dz = -0.2704 \quad (7)$$

是一个普适常数.

实验发现, 在从 ISR 能量到  $p\bar{p}$  对撞机能量的范围内, 带电多重数熵  $S$  和质心系能量  $\sqrt{s}$  的对数有线性关系<sup>[8]</sup>:

$$S = b + c \ln \sqrt{s}; \quad (8)$$

$$b = 0.821 \pm 0.018; \quad c = 0.417 \pm 0.009.$$

假定这一关系可以外推到高能极限, 将它和(6)式合并, 就得到平均带电多重数的极限公式:

$$\langle n \rangle = \beta s^{\gamma} (\sqrt{s} \rightarrow \infty); \quad (9)$$

$$\beta = e^{b-a} = 1.88 \pm 0.04; \quad \gamma = 0.209 \pm 0.005.$$

以上, 我们得到了高能极限下的多重数分布、平均多重数和熵的表达式. 下一步要考

虑的是：这一极限过渡以什么方式实现？在多大能量下可以认为这些极限公式近似地成立？

在文献[8]中总结实验规律发现，对于 ISR 以上的能量，当快度窗口的宽度增加到总快度区间的一半  $Y_{\max}/2$  时，快度窗口中的带电多重数熵达到饱和，不再随窗口的加大而增加。这意味着，能量升高时熵的增加主要在中心快度区；而两个碎裂区的贡献在 ISR 能量以上达到饱和。

由此可见，向高能极限过渡的过程是中心快度区的相对贡献越来越大的过程；在极限情况下，中心快度区占完全的统治地位。

这一极限过渡过程可以方便地用三火球模型<sup>[9,3,11]</sup>来参数化。这一模型将达到高能极限以前的复杂物理约束归结为以下假设：在强子-强子碰撞的非衍射过程中，在三个快度区分别形成三个产生粒子系统，称之为三个“火球”—— $C^*$ ,  $P^*$ ,  $T^*$ 。除了受这一限制以外，末态粒子按最随机的方式产生。这意味着，每个火球都按约束条件 A 下的最大随机性——最大熵产生末态粒子。这样，每个系统都有类似于(5)式的多重数分布：

$$P_i(n_i) = A_i \frac{n_i}{\langle n_i \rangle} e^{-2n_i/\langle n_i \rangle}; \quad (i = C^*, P^*, T^*). \quad (10)$$

应当注意，由于现在讨论的是未达到高能极限的情况，因而归一化条件  $\sum P_i(n_i) = 1$  不能写成积分，归一化常数  $A_i$  与  $\langle n_i \rangle$  有关，从而也和  $\sqrt{s}$  有关。

总的多重数分布  $P(n)$  由三个  $P_i(n_i)$  卷积得到。它仅仅依赖于一个参数：中心火球平均多重数  $\langle n_{C^*} \rangle$  和总平均多重数  $\langle n \rangle$  的比<sup>[12]</sup>：

$$\alpha = \langle n_{C^*} \rangle / \langle n \rangle. \quad (11)$$

当质心系能量  $\sqrt{s}$  升高时，比值  $\alpha$  变大，表示中心火球平均占的比例变大，而两个边缘火球  $P^*$  和  $T^*$  在 ISR 能量以上达到饱和<sup>[1,11]</sup>

$$\langle n_{P^*} \rangle = \langle n_{T^*} \rangle = 3.5 \pm 0.3 (\sqrt{s} \geq 63 \text{ GeV}), \quad (12)$$

不再随能量变化。过渡到极限， $\sqrt{s} \rightarrow \infty$  时  $\alpha \rightarrow 1$ ，中心火球占了完全的统治地位。这样，我们就用一个参数  $\alpha$  随能量的变化描述了向高能极限过渡的过程。

极限公式(9)能够近似应用的条件是  $\alpha \approx 1$ ，例如说  $\alpha > 0.95$  这只有在  $\sqrt{s} > 40$  TeV 时才能达到。因此，有必要寻找一个在现有能区 ( $\sqrt{s} \leq 1 \text{ TeV}$ ) 到高能极限区

$$(\sqrt{s} \geq 40 \text{ TeV})$$

之间适用的内插公式。为此，先用(10)式得到中心火球的熵：

$$S_{C^*} = a_{C^*} + \ln \langle n_{C^*} \rangle; \quad (13)$$

$$a_{C^*} = 2 - \ln A_{C^*} - \langle \ln z_{C^*} \rangle,$$

其中， $A_{C^*}$  和

$$\langle \ln z_{C^*} \rangle = \sum \left( \ln \frac{n_{C^*}}{\langle n_{C^*} \rangle} \right) A_{C^*} \frac{n_{C^*}}{\langle n_{C^*} \rangle^2} e^{-2n_{C^*}/\langle n_{C^*} \rangle} \quad (14)$$

在没有达到高能极限能区时，都是  $\sqrt{s}$  的函数，而不是常数。

值得注意的是，虽然在这一模型中整个末态粒子系统分成了三个部分  $C^*$ ,  $P^*$ ,  $T^*$ ,

然而,描述整个系统的并不是三个变量  $n_{c^*}, n_{p^*}, n_{T^*}$ , 而是它们的和  $n = n_{c^*} + n_{p^*} + n_{T^*}$ . 在附录中证明了,由于这一原因,整个系统的熵不等于三个部分的熵之和;而且由于在 ISR 能区以上,  $\langle n_{p^*} \rangle$  和  $\langle n_{T^*} \rangle$  等于常数,不随能量变化,  $S$  和  $S_{c^*}$  之差将随  $\sqrt{s}$  的增加,很快地趋于零. 具体计算表明,在  $\sqrt{s} > 200\text{GeV}$  以后,  $S$  和  $S_{c^*}$  的差值小于 0.15, 因而可以写  $S - S_{c^*} = 0.075 \pm 0.075$ , 由此再考虑(12), (13)式,最后由(8)式可得到在现有能区至高能极限能区范围内所适用的近似公式:

$$\langle n \rangle = \beta' s^\gamma + \delta (\sqrt{s} > 200\text{GeV}); \quad (15)$$

$$\beta' = 1.74 \pm 0.19; \gamma = 0.209 \pm 0.005; \delta = 7 \pm 0.6.$$

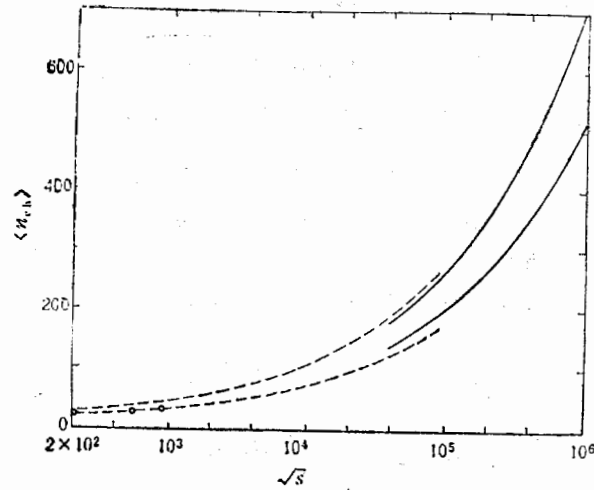


图 1 平均多重数的高能极限公式(9)式和内插公式(15)及其与实验的比较.

——极限公式(9) ---内插公式(15)

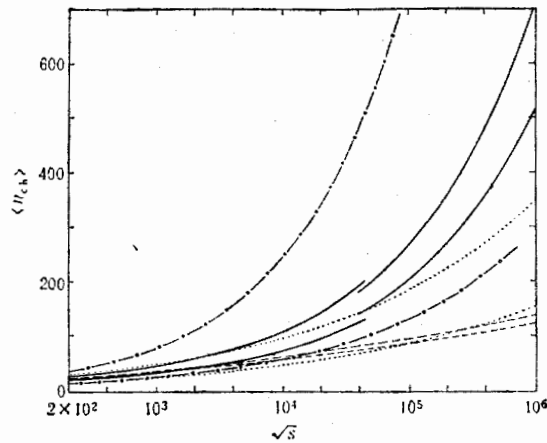


图 2 对平均多重数的四种不同预言的比较

——我们的预言 - · - · - 参考文献[2]的预言 ----经验公式(16) ·····经验公式(17)

图 1 上画出了高能极限公式(9)和内插公式(15)随能量的变化,由图可见,(15)式与现有的实验符合并能和高能极限相衔接.

在图2上画出了我们的预言(9)式,(15)式和两种常用的经验公式<sup>[13]</sup>:

$$\langle n \rangle = (2.7 \pm 0.7) - (0.03 \pm 0.21) \ln s + (0.167 \pm 0.016) (\ln s)^2; \quad (16)$$

$$\langle n \rangle = -(7.1 \pm 1.3) + (7.2 \pm 1.0) s^{0.127 \pm 0.009} \quad (17)$$

以及文献[2]的预言。由图可见,直到费米实验室 TEVATRON 对撞机能量 1.8 GeV 时,这几种预言还不能明显地区分开。超过这一能量以后,按  $(\ln s)^2$  展开到二次的(16)式显著地低于我们的预言。超过 SSC 能量 40 TeV 以后,指数型的(17)式也和我们的预言明显地分开。因此,我们的预言能在未来的实验中得到决定性的检验。文献[2]的结果和我们的预言并不矛盾,但是它的范围太宽没有足够的预言能力。

作者感谢兰志成和赵维勤的有益讨论。

### 附录 关于整体与部分的熵

假定系统由两个部分组成,描述这两个部分的变量分别是  $N_1$  和  $N_2$ , 几率分布是  $P_i(N_i)$ , 其熵是:

$$S_i = - \int P_i(N_i) \ln P_i(N_i) dN_i \quad (i = 1, 2). \quad (A1)$$

这里,为了叙述方便,假定对  $N_i$  可以积分,然而一切讨论对于分离变量求和也适用。

对于整个系统,有两种描述方式:

I. 用  $(N_1, N_2)$  描述。整个系统的相空间(2维),是两个部分系统相空间(1维)的直积。整个系统的几率分布是

$$P(N_1, N_2) = P_1(N_1)P_2(N_2), \quad (A2)$$

系统的熵为

$$S = - \int P(N_1, N_2) \ln P(N_1, N_2) dN_1 dN_2 = S_1 + S_2. \quad (A3)$$

这就是熟知的“熵的可加性”。

II. 用  $N = N_1 + N_2$  描述。整个系统的相空间和两个部分系统的相空间一样,都是一维的。几率分布是

$$\begin{aligned} Q(N) &= \int P_1(N_1)P_2(N_2)\delta(N - N_1 - N_2)dN_1dN_2 \\ &= \int P_1(N_1)P_2(N - N_1)dN_1, \end{aligned} \quad (A4)$$

系统的熵为

$$S = - \int Q(N) \ln Q(N) dQ(N) \neq S_1 + S_2. \quad (A5)$$

这表明,在此情况下,总熵不等于两部分熵之和。

现考虑以下的特殊情况,假定

$$\langle N_2 \rangle = a \text{ 为常数, } \langle N_1 \rangle \rightarrow \infty. \quad (A6)$$

此时,可以近似地忽略  $N_2$  分布的宽度,认为

$$P_2(N_2) \simeq \delta(N_2 - a). \quad (A7)$$

于是

$$Q(N) \simeq \int P_1(N_1)\delta(N - N_1 - a)dN_1 = P_1(N - a),$$

或

$$P_1(N_1) \simeq Q(N_1 + a). \quad (A8)$$

代入式(A1)得到

应  
右

[1  
[2  
[3  
[4  
[5  
[6  
[7  
[8  
[9  
[1  
[1  
[1

II

hi  
cc  
m  
ar

$$S_1 \simeq - \int_a^{\infty} Q(N) \ln Q(N) dN = S - \left[ - \int_0^a Q(N) \ln Q(N) dN \right].$$

应当注意, 归一化的几率分布  $Q(N)$  只在平均值  $\langle N \rangle$  附近才显著地不为零, 因而当  $\langle N \rangle \rightarrow \infty$  时, 上式右边方括号内的表达式趋于零, 即:

$$\Delta S \equiv S - S_1 \simeq - \int_0^a Q(N) \ln Q(N) dN \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \langle N \rangle \rightarrow \infty).$$
 (A9)

### 参 考 文 献

- [1] Cai Xu, Liu Lian-sou and Meng Ta-chung, *Commun. Theor. Phys.*, **4**(1985), 847.
- [2] C. S. Lam, McGill University preprint, SLAC-PPF Print-88-0203.
- [3] 刘连寿、秦立红和庄鹏飞, *中国科学*, **A 29**(1986), 1063.
- [4] 吴元芳和刘连寿, *高能物理与核物理*, **10**(1986), 517.
- [5] Chao Wei-qin, Meng Ta-chung and Pan Ji-cai, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1399.
- [6] Chao Wei-qin, Meng Ta-chung and Pan Ji-cai, *Phys. Rev.*, **D35**(1987), 152.
- [7] See for example, A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, Second Edition, McGraw-Hill International Book Company, London, 1985.
- [8] V. Šimák, M. Šumbera and I. Zborovský, *Phys. Lett.*, **B206**(1988), 159.
- [9] Liu Lian-sou and Meng Ta-chung, *Phys. Rev.*, **D27**(1983), 2640.
- [10] Liu Lian-sou and Wu Yuan-fang, *Intern. Jour. of Modern Phys. A* to be published.
- [11] 蔡勳、吴元芳和刘连寿, *高能物理与核物理*, **11**(1987), 554.
- [12] Cai Xu and Liu Lian-sou, *Lett. Nuovo. Cim.*, **37**(1983), 495.
- [13] G. J. Alner *et al.* (UA5 Collaboration), *Phys. Lett.*, **160B**(1985), 193.

## INVESTIGATION OF THE HIGH ENERGY LIMIT IN HADRON-HADRON COLLISION USING MEM

WU YUANFANG    LIU LIANSHOU

(*Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan*)

### ABSTRACT

Using the Maximum Entropy Method (MEM), we investigated the high energy limit in hadron-hadron collisions. Different kinds of entropy are defined and the role of physical constraints in maximizing the entropy are emphasized. Definite prediction for the average multiplicity in high energy limit and the interpolation between this limit and the existing data are obtained.