第 13 卷 第 5 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 13, No. 5
1989 年 5 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　May, 1989

$SU(N)$ 亚夸克大统一模型中的 Complementarity*

鲍 淑 清
(河南师大物理系，新乡)

摘　　要

本文将 Complementarity 应用于 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型，对亚夸克填充的 $SU(N)$ 反常相消和渐近自由的各种表示进行分析，得到了满足 Complementarity 且有物理意义的 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型的最简单的表示；并预言夸克和轻子的代数 $g_N \geqslant 4$.

一、引　　言

大统一理论和复合模型(亚夸克模型)均是标准模型之外的有力理论，并取得了一些令人满意的结果，解决了标准模型无法解决的问题，如电荷量子化. 但是前者还存在规范等级问题和代问题等，后者又不能对带超色荷的亚夸克的 $[SU(3)\times SU(2)\times U(1)]$ 内容作出很自然的解释. 因此看来它们并不是很完美的理论，许多物理学家将大统一理论与复合模型结合起来，提出了亚夸克大统一模型，期望解决上述问题.

目前，建立满足 Complementarity 的夸克和轻子的复合模型是比较有趣的课题，许多这样的模型已经提出[1]. Complementarity[2] 提供了找到超味群的不破缺子群和确定 't Hooft 方程解的任意性的方法，另外它也是研究 Higgs 机制的一个有趣的指导原则. 鉴于亚夸克大统一理论和上述 Complementarity 二者的优点，我们将 Complementarity 应用于亚夸克大统一模型，讨论亚夸克大统一模型中的 Complementarity. 由于 Complementarity 要求 Higgs 相和禁闭相之间一对一的粒子谱，所以要建立满足 Complementarity 的亚夸克大统一模型是相当困难的，关键在于选择适当的亚夸克表示；而且又由于亚夸克大统一模型的特殊性，并不是所有满足 Complementarity 的模型均具有物理意义，为此我们特别讨论了 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型，对亚夸克填充的 $SU(N)$ 的各种反常相消和渐近自由的表示进行分析，首先看其是否满足 Complementarity，然后若满足再考虑是否得到具有物理意义的结果.

大统一群为 $SU(N)$，其具有物理意义的分解为[3]:

* 本文是国家自然科学基金资助课题.
本文 1988 年 1 月 4 日收到.

$$SU(N) \supset SU_{HC}(N-5) \times SU_F(5) \times U_H(1), \tag{1}$$

其中 Georgi-Glashow SU_F (5) 已经破缺到 $SU_C(3) \times SU(2) \times U(1)$. 由于要满足 $\Lambda_{HC} > \Lambda_C$[5], 从(1)式可知: $N \geqslant 9$.

$SU(N)$ 群的所有无反常和渐近自由的表示为[4]:

$$R = \sum_{i=1}^{9} n_i R_i, \tag{2}$$

其中 R_i 是 $SU(N)$ 的不可约表示. R_i 的内容为:

$$R_1 = [4],\ R_2 = [2,2],\ R_3 = [3],\ R_4 = [N-1,1,1],$$
$$R_5 = [N-2,1],\ R_6 = [2,1],\ R_7 = [1,1],\ R_8 = [2],\ R_9 = [1]. \tag{3}$$

其中 $R_i = [q_1, q_2, \cdots q_l]$, q_i 为第 i 列的格子数. 如 $R_8 = [2] \equiv$ 日. n_i 可正可负,亦可为零,负数表示对应于复共轭表示: 如 $-n_8 R_8 \equiv n_8$日. n_i 的数值需由反常相消条件来决定.

由(2)式可知, $SU(N)$ 的一些较简单的表示 R(按维数从小到大排列)为: $n_9R_9 + n_8R_8$; $n_9R_9 + n_7R_7$; $n_9R_9 + n_3R_3$; $n_9R_9 + n_7R_7 + n_8R_8$; $n_9R_9 + n_7R_7 + n_3R_3$; $\cdots$. 下面我们将对 $SU(N)$ 的这些表示分别进行讨论,寻找满足 Complementarity 的且有物理意义的最简单的表示.

本文将如下安排: 首先我们证明, 表示为 $n_9R_9 + n_7R_7$ 的 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型可以满足 Complementarity, 但得到的结果无物理意义; 而且 $n_9R_9 + n_7R_7 + n_8R_8$ 也是如此; 接着我们证明表示为 $n_9R_9 + n_3R_3$、$n_9R_9 + n_8R_8$ 和 $n_9R_9 + n_8R_8 + n_3R_3$ 的 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型得不到有意义的结果;最后我们得到表示

$$n_9R_9 - n_7R_7 + n_3R_3$$

是满足 Complementarity 且有物理意义的 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型的最简单的表示. 特别是表示为 $4R_9 - R_7 + R_3$ 的 $SU(9)$ 模型是最小的满足 Complementarity 的亚夸克大统一模型;表示为 $14R_9 - 2R_7 + R_3$ 的 $SU(10)$ 模型是最小的满足 Complementarity 的手征亚夸克大统一模型.

二、表示为 $n_9R_9+n_7R_7$ 的 $SU(N)$ 模型

反常相消要求: $n_9 + (N+4)n_7 = 0$, 取 $n_7 = -1$, $n_9 = N+4$, 即表示为$(N+4)$□ + 田. 下面我们讨论表示为 $(N+4)$□ + 田 的 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型.

大统一群为 $SU(N)$, 所有亚夸克均为左手二分量 *Weyl* 旋量, 填入如下反常相消复表示

$$(N+4)\square + 田. \tag{4}$$

在亚夸克层次,规范对称群为

$$SU_{HC}(N-5) \times [SU_C(3) \times SU(2) \times U(1)], \tag{5}$$

方括号内为标准模型, 若记 $SU_F(5)$ 为 Georgi-Glashow $SU(5)$ 大统一模型中的规范群,则本模型中的超色非单态亚夸克对 $SU_{HC}(N-5) \times SU_F(5)$ 的表示为:

$$P_1: (N+4)(\square, \cdot), P_2: (田, \cdot), P_3: (⊡, ⊡), \tag{6}$$

超色单态旁观费米子为：

$$A:(N+4)(\cdot,□),\quad B:(\cdot,⊡⊡). \tag{7}$$

在 't Hooft 极限下，上述亚夸克具有如下超味对称性：

$$G_{HF}=SU_F(N+4)\times SU_F(5)\times\prod_{i=1}^{2}U_i(1), \tag{8}$$

其中 $SU_F(N+4)$ 来自于亚夸克 P_1 的多重态数，$SU_F(5)$ 则来自于亚夸克 P_3，$U_i(1)$ 是无反常亚夸克整体对称性，$\prod_{i=1}^{n}U_i(1)=U_1(1)\times U_2(1)\times\cdots\times U_n(1)$，并且我们已经考虑了超色瞬子效应．$U_i(1)$ 的生成元取为：

$$Q_1=N(P_1)-N(P_2)-\frac{7}{5}N(P_3),$$

$$Q_2=N(P_2)-\frac{1}{5}(N-3)N(P_3), \tag{9}$$

其中 $N(P_j)(j=1,2,3)$ 分别为亚夸克 P_j 的数算符．这样在 $SU_{HC}(N-5)\times G_{HF}$ 下，亚夸克重新标志如表 1 所示．下面我们将分别从 Higgs 相和禁闭相来讨论．

表 1　表示为 $(N+4)$□ + ⊡⊡ 的 $SU(N)$ 模型中的亚夸克

亚 夸 克	$SU_{HC}(N-5)$	$SU_F(N+4)$	$SU_F(5)$	$U_1(1)$	$U_2(1)$
P_1	□	□	●	1	0
P_2	⊡⊡	●	●	-1	1
P_3	⊡	●	⊡	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}(N-3)$

〈1〉 Higgs 相

$$\mathrm{MAC}:\langle P_1P_2\rangle=(⊡,□,\cdot,0,1), \tag{10}$$

$$SU_F(N+4)\longrightarrow SU_F(N-5)\times SU_F(9)\times U_F(1)$$

$$□\longrightarrow(□,\cdot,-9)+(\cdot,□,N-5), \tag{11}$$

则在对称群 $SU_{HC}(N-5)\times SU_F(N-5)\times SU_F(9)\times U_F(1)\times SU_F(5)\times U_1(1)\times U_2(1)$ 下，$\langle P_1P_2\rangle=(⊡,□,\cdot,-9,\cdot,0,1)\neq 0$ 将实现如下破缺：

$$SU_{HC}(N-5)\times SU_F(N+4)\times SU_F(5)\times U_1(1)\times U_2(1)\longrightarrow$$

$$\widetilde{SU_F(N-5)}\times SU_F(9)\times SU_F(5)\times\widetilde{U_1(1)}\times\widetilde{U_2(1)}, \tag{12}$$

其中 $\widetilde{SU_F(N-5)}$ 为 $SU_{HC}(N-5)$ 与 $SU_F(N-5)$ 的对角子群，即 $SU_{HC}(N-5)$ 完全破缺；$\widetilde{U_i(1)}$ 是 $U_1(1)$、$U_2(1)$ 与 $U_F(1)$ 的线性组合，以使 MAC 荷为零．

$\widetilde{U_i(1)}$ 可取为：

$$\widetilde{U_1(1)}=9U_1(1)+U_F(1),$$

$$\widetilde{U_2(1)}=U_1(1). \tag{13}$$

这样，所有亚夸克在新的对称性：$\widetilde{SU_F(N-5)} \times SU_F(9) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{2} \widetilde{U_i(1)}$ 下分解为：

$$
\begin{aligned}
&P_{11}:(\square\square,\cdot,\cdot,-9,1),\quad P'_{11}:(日,\cdot,\cdot,-9,1),\\
&P_{12}:(\square,\square,\cdot,N-5,1),\ P_2:(⊞,\cdot,\cdot,9,-1),\\
&P_3:\left(⊡,\ \cdot,\ ⊡,\ -\frac{9}{5}(N-3),\ -\frac{7}{5}\right).
\end{aligned}
\tag{14}
$$

注意到 P_{11} 将与 P_2 耦合变重，从理论中退耦掉。这样从 Higgs 相得到的无质量费米子为：

$$
\begin{aligned}
&(日,\cdot,\cdot,-9,1),\quad (\square,\square,\cdot,N-5,1),\\
&\left(⊡,\ \cdot,\ ⊡,\ -\frac{9}{5}(N-3),\ -\frac{7}{5}\right).
\end{aligned}
\tag{15}
$$

〈2〉禁闭相

从 Higgs 相中得到的不变的超味群为

$$
H_{HF} = \widetilde{SU_F(N-5)} \times SU_F(9) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{2} \widetilde{U_i(1)}. \tag{16}
$$

则在 $SU_{HC}(N-5) \times H_{HF}$ 下，所有亚夸克表示和超色单态三亚夸克复合态如表 2 所示。

表 2　禁闭相中的亚夸克和复合态

	$SU_{HC}(N-5)$	$\widetilde{SU_F(N-5)}$	$SU_F(9)$	$SU_F(5)$	$\widetilde{U_1(1)}$	$\widetilde{U_2(1)}$	't Hooft 指标
亚夸克							
P_{11}	□	□	●	●	-9	1	
P_{12}	□	●	□	●	$N-5$	1	
P_2	⊞	●	●	●	9	-1	
P_3	⊡	●	●	⊡	$-\frac{9}{5}(N-3)$	$-\frac{7}{5}$	
复合态							
$P_{11}P_{11}P_2$	●	日	●	●	-9	1	l_1
$P_{11}P_{12}P_2$	●	□	□	●	$N-5$	1	l_2
$P^*_{11}P_3P^*_2$	●	⊡	●	⊡	$-\frac{9}{5}(N-3)$	$-\frac{7}{5}$	l_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	l_i

从表 2 很容易列出 't Hooft 方程，而且稍经计算即可得一解为 $l_i=0$，$l_1=l_2=l_3=1$。这样我们从禁闭相中得到的无质量费米子与从 Higgs 相中得到的无质量费米子（(15)式所示）一一对应，满足 Complementarity。

根据 $SU_F(5)$ 的意义，在低能下，这些无质量费米子对应于 $SU_F(5)$ 的表示为

$$
\left[\frac{(N-5)(N-6)}{2} + 9(N-5)\right]\cdot + (N-5)⊡, \tag{17}
$$

甚至不能描述一代夸克和轻子，所以表示为 $(N+4)\square + ⊞$ 的 $SU(N)$ 模型虽能满足

Complementarity，但却无物理意义。

同理可证表示 $n_9R_9+n_7R_7+n_8R_8$ 也是如此。

三、表示为 $n_3R_3+n_9R_9$ 的 $SU(N)$ 模型

无反常条件要求：

$\frac{1}{2}(N-3)(N-6)n_3+n_9=0$，取 $n_3=-1$，$n_9=\frac{1}{2}(N-3)(N-6)$，

即

$$\frac{1}{2}(N-3)(N-6)R_9-R_3 \tag{18}$$

或

$$\frac{1}{2}(N-3)(N-6)\square+日. \tag{19}$$

同上，可将此表示下模型中的亚夸克列表如表 3 所示。

表 3　表示为 $\frac{1}{2}(N-3)(N-6)\square+日$ 的 $SU(N)$ 模型中的亚夸克

亚夸克	$SU_{HC}(N-5)$	$SU_F(n_9)$	$SU_F(5)$	$\prod_{i=1}^{3}U_i(1)$
P_1	□	□	●	$\prod_i x_i$
P_2	日	●	⊡	$\prod_i y_i$
P_3	⊡	●	日	$\prod_i z_i$
P_4	目	●	●	$\prod_i \rho_i$

〈1〉 Higgs 相

$$\mathrm{MAC}:\langle P_1P_3\rangle=\left(\cdot,\square,日,\prod_i(x_i+z_i)\right)$$

但是不论能否满足 Complementarity，$\langle P_1P_3\rangle\neq 0$ 将使 $SU_F(5)$ 破缺，从而失去物理意义。

同理可以证明，表示为 $n_9R_9+n_8R_8$ 和 $n_9R_9+n_8R_8+n_3R_3$ 的 $SU(N)$ 模型也不能得到有意义的结果。

四、表示为 $n_9R_9+n_7R_7+n_3R_3$ 的 $SU(N)$ 模型

上述几种较简单的表示均不是很合适的，从引言中可知，除了这几种表示外，另一种较简单的表示为

$$n_9R_9-n_7R_7+n_3R_3 \text{ 或 } n_9\square+n_7田+n_{3}{}_3目, \tag{20}$$

上式中我们令 $n_7'=-n_7$，并仍记 $n_7'\equiv n_7$。反常相消条件要求

$$n_9 - n_7(N+4) + n_3 \cdot \frac{1}{2}(N-3)(N-6) = 0. \tag{21}$$

按照前面的分析,此时的亚夸克内容如表 4 所示.

旁观费米子为: $A:(\cdot,\square,\cdot,\cdot,\square)$, $B:(\cdot,\cdot,\square,\cdot,\square\square)$, $C:(\cdot,\cdot,\cdot,\square,\text{目})$.
$U_i(1)$ 的量子数满足

$$\begin{aligned} &n_9 x_i - n_7(n-3)y_i - 5n_7 z_i + \frac{1}{2}(N-7)(N-8)n_3\rho_i \\ &+ 5n_3(N-7)\sigma_i + 10n_3\omega_i = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

而旁观费米子的 $U_i(1)$ 量子数任意.

表 4　表示为 $n_9R_9 - n_7R_7 + n_3R_3$ 的 $SU(N)$ 模型中的亚夸克

亚夸克	$SU_{HC}(N-5)$	$SU_F(n_9)$	$SU_F(n_7)$	$SU_F(n_3)$	$SU_F(5)$	$\prod_{i=1}^{5} U_i(1)$
P_1	□	□	●	●	●	$\prod_i x_i$
P_2	□□	●	□	●	●	$\prod_i y_i$
P_3	⊡	●	□	●	⊡	$\prod_i z_i$
P_4	目	●	●	□	●	$\prod_i \rho_i$
P_5	日	●	●	□	□	$\prod_i \sigma_i$
P_6	□	●	●	□	日	$\prod_i \omega_i$

〈1〉 Higgs 相

$$\begin{aligned} &\text{MAC}: \langle P_1P_2\rangle = \left(\boxdot,\square,\square,\cdot,\cdot,\prod_i (x_i+y_i)\right), \\ &SU_F(n_9) \longrightarrow SU_F(N-5) \times SU_F(n_9-N+5) \times U_{F1}(1) \\ &\square \longrightarrow (\square,\cdot,(n_9-N+5)) + (\cdot,\square,-(N+5)), \\ &SU_F(n_7) \longrightarrow SU_F(n_7-1) \times U_{F2}(1) \\ &\square \longrightarrow (\square,-1) + (\cdot,(n_7-1)). \end{aligned} \tag{23}$$

因此 $\langle P_1P_2\rangle = \left(\boxdot,\square,\cdot,(n_9-N+5),\cdot,(n_7-1),\cdot,\cdot,\prod_i (x_i+y_i)\right) \neq 0$ (在对称群 $SU_{HC}(N-5) \times SU_F(N-5) \times SU_F(n_9-N+5) \times U_{F1}(1) \times SU_F(n_7-1) \times U_{F2}(1) \times SU_F(n_3) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{5} U_i(1)$ 下的表示)将实现如下破缺:

$$SU_{HC}(N-5) \times SU_F(n_9) \times SU_F(n_7) \times SU_F(n_3) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{5} U_i(1) \rightarrow$$

$$\widetilde{SU_F(N-5)} \times SU_F(n_9-N+5) \times SU_F(n_7-1) \times SU_F(n_3) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{5} \widetilde{U_i(1)}$$

其中 $\widetilde{SU_F(N-5)}$ 为 $SU_{HC}(N-5)$ 和 $SU_F(N-5)$ 的对角子群, $\widetilde{U_i(1)}$ 为 $U_i(1)$、

表 5　禁闭相中的亚夸克和复合态（表示为 $n_9R_9 - n_7R_7 + n_3R_3$）

	$SU_{HC}(N-5)$	$\widetilde{SU_F(N-5)}$	$SU_F(n_9-N+5)$	$SU_F(n_7-1)$	$SU_F(n_3)$	$SU_F(5)$	$\prod_{i=1}^{5}\widetilde{U_i(1)}$	'tHooft 指标
亚夸克								
P_{11}	□	□	●	●	●	●	A	
P_{12}	□	●	□	●	●	●	B	
P_{21}	⊡⊡	●	●	□	●	●	C	
P_{22}	⊡⊡	●	●	●	●	●	D	
P_{31}	⊡	●	●	□	●	⊡	E	
P_{32}	⊡	●	●	●	●	⊡	F	
P_4	目	●	●	●	□	●	G	
P_5	⊡	●	●	●	□	□	H	
P_6	□	●	●	●	□	⊡	I	
复合态								
$P_{11}P_{11}P_{22}$	●	⊡	●	●	●	●	A	l_1
$P_{11}P_{12}P_{22}$	●	□	□	●	●	●	B	l_2
$P_{11}^{*2}P_{22}^{*2}P_{21}$	●	⊡⊡	●	□	●	●	C	l_3
$P_{11}^{*}P_{21}^{*}P_{31}$	●	⊡	●	●	●	⊡	F	l_4
$P_{11}^{*}P_{22}^{*}P_{31}$	●	⊡	●	□	●	⊡	E	l_5
$P_{11}^{3}P_{4}P_{22}^{3}$	●	目	●	●	□	●	G	l_6
$P_{11}^{2}P_{5}P_{22}^{3}$	●	日	●	●	□	□	H	l_7
$P_{11}P_6P_{22}$	●	□	●	●	□	日	I	l_8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	l_i

$U_2(1)$、…、$U_5(1)$ 与 $U_{F1}(1)$、$U_{F2}(1)$ 的线性组合，以使 MAC 荷为零.

$$\widetilde{U_i(1)} = a_{ij}U_j(1) + b_iU_{F1}(1) + c_iU_{F2}(1),\quad j = 1,2,\cdots,5, \tag{24}$$

a_{ij}、b_i 和 c_i 满足如下关系

$$a_{ij}(x_j + y_j) + b_i(n_9 - N + 5) + c_i(n_7 - 1) = 0. \tag{25}$$

(另外 $\langle P_1P_2\rangle \neq 0$ 也可实现如下破缺：

$$SU_{HC}(N-5) \times SU_F(n_9) \times SU_F(n_7) \times SU_F(n_3) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{5} U_i(1) \to$$

$$\widetilde{SU_F(N-5)} \times SU_F(n_9-1) \times SU_F(n_7-N+5) \times SU_F(n_3) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{5}\widetilde{U_i(1)},$$

但是可以证明这种分解不能满足 Complementarity，同理也可以证明 $n_9 = 0$ 时，表示 n_7⊡⊡ + n_3目 的 $SU(N)$ 模型无法满足 Complementarity.)

在新的对称群 $\widetilde{SU_F(N-5)} \times SU_F(n_9-N+5) \times SU_F(n_7-1) \times SU_F(n_3) \times SU_F(5) \times \prod_{i=1}^{5}\widetilde{U_i(1)}$ 下，所有亚夸克分解为：

P_{11}：[日,·,·,·,·,$(a_{ij}x_j + b_i(n_9 - N + 5))$]

P'_{11}：[□□,·,·,·,·,$(a_{ij}x_j + b_i(n_9 - N + 5))$]

P_{12}：[□,□,·,·,·,$(a_{ij}x_j + b_i(-N + 5))$]

P_{21}：[⊡⊡,·,□,·,·,$(a_{ij}y_j + c_i\cdot(-1))$]

P_{22}:[⊡⊡,·,·,·,·,$(a_{ij}y_j + c_i(n_7 - 1))$]

P_{31}:[⊡,·,□,·,⊡,$(a_{ij}z_j + c_i\cdot(-1))$]

P_{32}:[⊡,·,·,·,⊡,$(a_{ij}z_j + c_i(n_7 - 1))$]

P_4:[目,·,·,□,·,$a_{ij}\rho_j$]

P_5:[日,·,·,□,□,$a_{ij}\sigma_j$]

P_6:[□,·,·,□,日,$a_{ij}\omega_j$] (26)

若在(25)式中选取适当的 a_{ij}, b_i 和 c_i 使

$$a_{ij}x_j + b_i(n_9 - N + 5) = -[a_{ij}y_j + c_i(n_7 - 1)], \tag{27}$$

则 P'_{11} 与 P_{22} 耦合变重. 所以从 Higgs 相中得到的无质量费米子就是: $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{31}, P_{32}, P_4, P_5, P_6$. ⟨2⟩禁闭相.

所有亚夸克和可能的超色单态复合费米子如表 5 所示. 表中记:

$$A = \prod_i A_i = \prod_i [a_{ij}x_j + b_i(n_9 - N + 5)],$$

$$B = \prod_i B_i = \prod_i [a_{ij}x_j + b_i(-N + 5)], \qquad C = \prod_i C_i = \prod_i [a_{ij}y_j - C_i],$$

$$D = \prod_i D_i = \prod_i [a_{ij}y_j + c_i(n_7 - 1)], \qquad E = \prod_i E_i = \prod_i [a_{ij}z_j - c_i],$$

$$F = \prod_i F_i = \prod_i [a_{ij}z_j + c_i(n_7 - 1)], \qquad G = \prod_i G_i = \prod_i a_{ij}\rho_j,$$

$$H = \prod_i H_i = \prod_i a_{ij}\sigma_j, \qquad I = \prod_i I_i = \prod_i a_{ij}\omega_i.$$

这样式(27)可以表示为

$$A_i = -D_i. \tag{28}$$

令所有 $l_i = 0, (i = 9, 10, \cdots)$ 则由表 5 可知, 't Hooft 方程为:

$SU_F(N-5)^3$:

$$N - 5 = (N-9)l_1 + (n_9 - N + 5)l_2 - (N-1)(n_7-1)l_3 - n_3l_4 - 5(n_7-1)l_5$$
$$+ \frac{1}{2}(N-8)(N-11)n_3l_6 + (N-9)\cdot 5n_3l_7 + 10n_3l_8, \tag{29}$$

$SU_F(n_9 - N + 5)^3$:

$$N - 5 = (N-5)l_2, \tag{30}$$

$SU_F(n_7 - 1)^3$:

$$\frac{1}{2}(N-5)(N-4) + (N-5) = \frac{1}{2}(N-5)(N-4)l_3 + (N-5)l_5, \tag{31}$$

$SU_F(n_3)^3$:

$$\frac{1}{6}(N-5)(N-6)(N-7) + \frac{5}{2}(N-5)(N-6) + 10(N-5)$$
$$= \frac{1}{6}(N-5)(N-6)(N-7)l_6 + \frac{5}{2}(N-5)(N-6)l_7 + 10(N-5)l_8, \tag{32}$$

$SU_F(5)^3$:

$$-(n_7-1)(N-5)-(N-5)+n_3\cdot\frac{1}{2}(N-5)(N-6)+n_3(N-5)$$
$$=-(N-5)l_4-(n_7-1)(N-5)l_5+n_3$$
$$\times\frac{1}{2}(N-5)(N-6)l_7+n_3(N-5)l_8, \tag{33}$$

$S\widetilde{U_F(N-5)}^2\cdot U_i(1)$:

$$(N-5)A=(N-7)A_il_1+(n_9-N+5)B_il_2+(N-3)(n_7-1)C_il_3+5F_il_4$$
$$+5(n_7-1)E_il_5+\frac{1}{2}(N-7)(N-8)n_3G_il_6+(N-7)\cdot 5n_3H_il_7$$
$$+10n_3I_il_8\cdots\cdots, \tag{34}$$

$SU_F(n_9-N+5)^2\cdot U_i(1)$:

$$(N-5)B_i=(N-5)B_il_2, \tag{35}$$

$SU_F(n_7-1)^2\cdot U_i(1)$:

$$D(\text{皿})C_i+5(N-5)=D(\text{皿})c_il_3+5(N-5)l_5, \tag{36}$$

$SU_F(n_3)^2\cdot U_i(1)$:

$$D(\text{目})G_i+5D(\text{日})H_i+10(N-5)I_i=D(\text{目})G_il_6+5D(\text{日})H_il_7$$
$$+10(N-5)I_il_8, \tag{37}$$

$SU_F(5)^2\cdot U_i(1)$:

$$(n_7-1)(N-5)E_i+(N-5)F_i+n_3\cdot D(\text{日})H_i+3n_3(N-5)I_i=(N-5)F_il_4$$
$$+(n_7-1)(N-5)E_il_5+n_3\cdot D(\text{日})H_il_7+3n_3(N-5)I_il_8, \tag{38}$$

$U_i(1)^3$:

$$(N-5)^2A_i^3+(N-5)(n_9-N+5)B_i^3+D(\text{皿})(n_7-1)C_i^3+D(\text{皿})D_i^3$$
$$+5(n_7-1)(N-5)E_i^3+5(N-5)F_i^3+n_3\cdot D(\text{目})G_i^3+5n_3D(\text{日})H_i^3$$
$$+10n_3(N-5)I_i^3=D(\text{日})A_i^3l_1+(N-5)(n_9-N+5)B_i^3l_2$$
$$+D(\text{皿})(n_7-1)C_i^3l_3+(N-5)\cdot 5F_i^3l_4+(N-5)(n_7-1)\cdot 5E_i^3l_5$$
$$+D(\text{目})n_3G_i^3l_6+D(\text{日})n_3\cdot 5H_i^3l_7+(N-5)n_3\cdot 10I_i^3l_8, \tag{39}$$

$U_i(1)^2\cdot U_j(1)$:

将(39)式中 A_i^3 换成 $A_i^2A_j, B_i^3\to B_i^2B_j,\cdots,I_i^3\to I_i^2I_j$ 得到的方程式. (40)

以上各式中，$D(R_i)$ 表示群 $SU_{HC}(N-5)$ 的各种表示 R_i 的维数. 注意到(21)式式(28)式,不难看出,上述方程的解为 $l_j=1,j=1,2,\cdots,8;l_i=0,i=9,10\cdots$.

从表 5 可以看出,与解 $l_j=1(j=1,2,\cdots,8)$对应的无质量费米子 (即从禁闭相中得到的无质量费米子)与从 Higgs 相中得到的无质量费米子(式(26) 中除去 P_{11}' 和 P_{22})一一对应,故本模型是满足 Complementarity 的.

在低能下,除了一些例外粒子外(例外粒子可以通过与旁观费米子耦合或通过其它机制使其变重[2]),上述无质量费米子对应 $SU_F(5)$ 的表示为

$$(N-5)\cdot n_7\boxed{\cdot}+(N-5)\cdot n_3\text{日}. \tag{41}$$

至少可以描述 g_N 代夸克和轻子:

$$g_N = (N - 5) \cdot \min(n_3, n_7). \tag{42}$$

从引言中可知 $N \geqslant 9$，这样我们得到 $g_N \geqslant 4$。由此可见，表示为 $n_9R_9 - n_7R_7 + n_3R_3$ 的 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型满足 Complementarity，而且可以得到有物理意义的结果。

特殊情况下

(1) $N = 9$，$SU(9)$ 的反常相消和渐近自由的表示为：$4\square + \boxdot\boxdot + $目，即取 $n_3 = n_7 = 1$，$n_9 = 4$。此模型是满足 Complementarity 的，并且得到四代夸克和轻子[2]。

(2) $N = 10$，$SU(10)$ 的反常相消和渐近自由的表示为：$14\square + 2\boxdot\boxdot + $目，即取 $n_9 = 14$，$n_7 = 2$，$n_3 = 1$。此模型可以得到：$g_N = 5 \times \min(1,2) = 5$ 代夸克和轻子。而且特别需要指出的是，$SU(10)$ 模型同时也满足手征性要求[5]。关于这种满足 Complementarity 的 $SU(10)$ 手征亚夸克大统一模型，我们准备详细讨论。

综上所述，我们讨论了 $SU(N)$ 亚夸克大统一模型中的各种反常相消和渐近自由的表示，结果表明满足 Complementarity 且有物理意义的最简单的表示为：$n_9R_9 - n_7R_7 + n_3R_3$。而且最小的满足 Complementarity 的且有物理意义的模型是表示为：$4\square + \boxdot\boxdot + $目 的 $SU(9)$ 模型，表示为 $14\square + 2\boxdot\boxdot + $目 的 $SU(10)$ 模型是最小的满足 Complementarity 且有物理意义的手征亚夸克大统一模型。

感谢薛晓舟教授、鲁公儒和万陵德老师、张会同志的有益讨论。

参 考 文 献

[1] J. -M. Gerard et al., *Phys. Lett.*, **169**B(1986), 386; T. Kobayashi, *Phys. Lett.*, **180**B(1986), 107.
[2] S. Dimopoulos, S. Raby and L. Susskind, *Nucl. Phys.*, **173B**(1980), 208. S. Raby, S. Dimopoulos and L. Susskind, *Nucl. Phys.*, **169B** (1980), 373. 鲍淑清，薛晓舟，高能物理与核物理，Vol. **12**(1988), 324.
[3] A.Davidson et al., *Phys. Rev.*, D**31**(1985), 1127.
[4] A. J. Buras et al., *Phys. Rev.*, D**26** (1982), 3225.
[5] 鲍淑清，薛晓舟，物理学报，**37**(1988)，347；及其所引文献。

COMPLEMENTARITY IN $SU(N)$ UNIFIED PREON MODELS

BAO SHUQING
(*Henan Normal University*)

ABSTRACT

We consider in detail the complementarity principle between the Higgs Phase and the confining phase in $SU(N)$ unified preon models. We analyse all anormaly-free and asymptotically free representations of all $SU(N)$ groups, and we get the simplest representation of $SU(N)$ models and the generations of quarks and leptons $g_N \geqslant 4$.