第 13 卷 第 11 期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 11
1989 年 11 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1989

夸克-反夸克束缚态的 B-S 方程与介子谱的计算*

董宇兵　　苏君辰
（吉林大学物理系，长春）

摘　　要

本文对瞬时近似的夸克-反夸克体系的 Bethe-Salpeter 方程中的 γ- 矩阵给出正确的 Gordon 约化的结果，并恰当地考虑了方程中投影算子及 B-S 振幅的小分量的贡献. 在此基础上推导出准至 p^2/m^2 级近似的 B-S 方程的正确形式. 进而利用 B-S 振幅的归一化条件，找到了 B-S 振幅与 Pauli-Schrödinger 波函数之间的关系. 据此求得了包含相对论修正的 Pauli-Schrödinger 方程. 利用变分法求解此方程，得到了与实验符合较好的介子谱.

一、引　　言

近年来，在 QCD 基础上对强子结构的研究已进行了大量的工作. 现已公认，不仅对轻夸克介子，而且对重夸克介子，其组成粒子的相对论运动效应都是不可忽视的[1]. 于是人们便倾向于利用相对论协变的 Bethe-Salpeter (B-S) 方程[2,3] 来计算强子谱和强子衰变[4-15].

Mitra 及其随后的一些研究者在他们利用梯形和瞬时近似的 B-S 方程计算强子谱的工作中[4-11]，采取了一个与 Rujura[16] 等人不同的假设，即认为在 B-S 方程的相互作用核中加进的禁闭势与单胶子交换势具有相同的旋量结构，并应用 Gordon 恒等式来分解相互作用核中的 γ- 矩阵. 本文作者之一及其合作者在前文[17]中曾指出，他们对 B-S 方程中的 γ- 矩阵并未给出完全正确的 Gordon 约化的结果，因而也不能得到瞬时近似下的 B-S 方程的正确形式.

Mitra 及其合作者还认为[4,5]，他们通过 γ- 矩阵的 Gordon 分解所求得的 B-S 方程，在未作瞬时近似时是完全相对论的. 其实不然，因为他们对方程中的投影算子实际上不自觉地采取了极端非相对论近似. 这一近似必然导致完全忽略 B-S 振幅的小分量对方程的贡献. 这显然是不够适当的.

鉴于上述工作中存在的问题，本文重新研究了瞬时近似下包含单胶子交换势和禁闭

* 国家自然科学基金资助课题
本文 1989 年 1 月 19 日收到.

势的 B-S 方程．本文在第二节给出了 B-S 方程中 γ- 矩阵正确的 Gordon 约化的形式．此外，还准确地考虑了方程中投影算子的离壳形式．据此，写出了四个大小 B-S 振幅分量所满足的联立方程组．

本文第三节找到了在 p^2/m^2 级近似下大小 B-S 振幅分量之间的关系．利用此种关系推导出包括小分量振幅贡献的大分量 B-S 振幅所满足的方程式．进而利用 B-S 振幅的归一化条件，建立了在 p^2/m^2 级近似下 B-S 振幅与归一化的 Schrödinger 波函数之间的关系．由此将 B-S 方程转化为包含相对论修正的 Pauli-Schrödinger (P-S) 方程，或称 Fermi-Breit 方程．

为了检验所求得方程的有效性，本文最后一节计算了介子谱．与 Mitra 等人[5]不同，本文不是将单胶子交换势作为微扰来处理，而是采用变分方法求解此方程．计算结果的分析表明，在介子中，尤其在轻夸克介子中，夸克和反夸克的相对论运动效应是不可忽视的．

二、B-S 方程

熟知，正反夸克束缚态的 B-S 方程在动量空间中可表为[2]

$$\chi_{p\zeta}(q) = S_F(\eta_1 p + q) S_F^c(\eta_2 p - q) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} G(p, q, k) \chi_{p\zeta}(k) \tag{1}$$

式中 $\chi_{p\zeta}(q)$ 为描写体系束缚态的 B-S 振幅．p 为体系的四维总动量，ζ 代表自旋、味道和颜色量子数．q、k 为正反夸克间的相对动量．它们定义如下：

$$\begin{gathered} p = p_1 + p_2 = p_1' + p_2', \quad p^2 = M^2 \\ q = \eta_2 p_1 - \eta_1 p_2, \quad k = \eta_2 p_1' - \eta_1 p_2' \\ \eta_{1,2} = \frac{m_{1,2}}{m_{12}}, \quad m_{12} = m_1 + m_2 \end{gathered} \tag{2}$$

$p_1'(p_1)$ 和 $p_2'(p_2)$ 分别为夸克和反夸克在作用前(后)的四维动量．m_1、m_2 为它们的质量．M 为介子的质量．

(1)式中的不可约相互作用核，在梯形近似下取为

$$G(p, q, k) = -i\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)\left(-\frac{\lambda_2^*}{2}\right)\gamma_{1\mu}\gamma_2^{\mu}\langle q|V|k\rangle \tag{3}$$

式中 $\frac{\lambda_1}{2}$ 和 $-\frac{\lambda_2^*}{2}$ 分别为夸克和反夸克的色矩阵．$\gamma_{1\mu}$ 和 γ_2^{μ} 为分别与正、反夸克相关的旋量矩阵．而

$$\langle q|V|k\rangle = -\frac{4\pi\alpha_s}{(q-k)^2} + \frac{3}{4}(2\pi)^3\omega_{q\bar{q}}^2\nabla_{\boldsymbol{k}}^2\delta^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k}) \tag{4}$$

其中前后两项分别由单胶子交换和谐振子禁闭势所产生．

在正反粒子对称的形式中，(1)式中的夸克和反夸克的传播子具有相同的形式，且可表为

$$S_F(p) = S_F^c(p) = \frac{2mi}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \Lambda^+(p) \tag{5}$$

$$\Lambda^+(p) = \frac{\not p + m}{2m} \tag{6}$$

这里指出，$\Lambda^+(p)$ 同质壳上的正能态投影算子形式上完全相同，但其中的动量是离壳的．我们称其为离壳的投影算子．若将 $\Lambda^+(p)$ 视为在质壳上，则可表为[20]

$$\Lambda^+(p) = \sum_\alpha u^\alpha(p)\bar{u}^\alpha(p) \tag{7}$$

根据此式以及 B-S 振幅的微扰展开式所展示的旋量结构，可应用下列 Gordon 恒等式[20]:

$$\bar{u}^\alpha(p)\gamma^\mu u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p)\frac{1}{2m}[(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu]u^\beta(q) \tag{8}$$

以及文献[19]中的约化公式:

$$\begin{aligned}\bar{u}^\alpha(p)i\sigma_{i0}u^\beta(q) = \bar{u}^\alpha(p)&\frac{1}{4m^2-(p_0-q_0)^2}\{(p_0-q_0)(p_i+q_i)\\&-i[(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q})\times\boldsymbol{\Sigma}]_i - 2m\gamma_0[(p-q)_i-[(\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\\&\times\boldsymbol{\Sigma}]_i]\}u^\beta(q)\end{aligned} \tag{9}$$

将(1)式中的 γ- 矩阵分解为通过块对角矩阵 I (单位矩阵)、γ_0 和自旋矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 表示的形式．据此，在瞬时近似 ($k_0 = q_0$) 之下和在质心系 ($\boldsymbol{p} = 0$) 之中，可将方程(1)化为三维空间的 B-S 振幅所满足的方程，如下:

$$\begin{aligned}\phi_{p\zeta}(\boldsymbol{q}) = i\frac{4}{3}\int\frac{dq_0}{2\pi}\mathscr{D}^{-1}(p,q)\Lambda^+(\eta_1 p+q)\Lambda^+(\eta_2 p-q)\\ \cdot\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}(T_0+T_1q_0+T_2q_0^2)\langle\boldsymbol{q}|v|\boldsymbol{k}\rangle\phi_{p\zeta}(\boldsymbol{k})\end{aligned} \tag{10}$$

在上式中，已对色矩阵取了色单态的期望值，且各量定义如下:

$$\phi_{p\zeta}(\boldsymbol{q}) = \int\frac{dq_0}{2\pi}\chi_{p\zeta}(q) \tag{11}$$

$$\mathscr{D}^{-1}(p,q) = \{[(\eta_1 p+q)^2 - m_1^2 + i\varepsilon][(\eta_2 p - q) - m_2^2 + i\varepsilon]\}^{-1} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}T_0 = \tau M^2 + (\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k})^2 + 2iM(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})\cdot(\tau_1\gamma_1^0\boldsymbol{\Sigma}_1+\tau_2\gamma_2^0\boldsymbol{\Sigma}_2)\\ -M(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})^2(\tau_1\gamma_1^0-\tau_2\gamma_2^0) - \frac{1}{m_1m_2}\gamma_1^0\gamma_2^0[(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\Sigma}_1][(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\Sigma}_2]\\ -\frac{i}{2m_1m_2}\gamma_1^0\gamma_2^0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})^2(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{\Sigma}_1+\boldsymbol{\Sigma}_2) + \frac{1}{4m_1m_2}\gamma_1^0\gamma_2^0(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})^4\\ -(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})^2\boldsymbol{\Sigma}_1\cdot\boldsymbol{\Sigma}_2 + 2i(\boldsymbol{\Sigma}_1+\boldsymbol{\Sigma}_2)\cdot(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}) + [(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\\ \cdot\boldsymbol{\Sigma}_1][(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\Sigma}_2]\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}T_1 = 4M(m_1\tau_1 - m_2\tau_2) - 2i(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{1}{m_1}\gamma_1^0\boldsymbol{\Sigma}_1 - \frac{1}{m_2}\gamma_2^0\boldsymbol{\Sigma}_2\right)\\ +\left(\frac{1}{m_1}\gamma_1^0+\frac{1}{m_2}\gamma_2^0\right)(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})^2\end{aligned} \tag{14}$$

$$T_2 = -4 \tag{15}$$

$$\tau = \frac{4m_1m_2}{m_{12}^2}, \quad \tau_1 = \frac{m_2}{m_1m_{12}}, \quad \tau_2 = \frac{m_1}{m_2m_{12}} \tag{16}$$

本文作者之一及其合作者在前文[17]中曾指出过，以上 T_0 和 T_1 的表示式与 Mitra 等人推得的结果具有明显的差别。原因在于他们对矩阵 $i\sigma i_0$ 应用了一个错误的约化公式。这里应当指出，(13)—(15)式的结果是在将 $\Lambda^+(p)$ 视为在质壳上的投影算子的情况下得到的。这是考虑到 Gordon 约化是一种在质壳上施行的运算。但约化结果呈现四维协变的形式，若将其中组成粒子的四维动量视为离壳的，如将(10)式中的 q_0 看作独立于 $\boldsymbol{q}$ 的变量，就在一定程度上顾及了 $\Lambda^+(p)$ 的离壳性。

另一点需要强调的是，在对方程(1)中的 γ- 矩阵实行 Gordon 分解之后，投影算子 $\Lambda^+(p)$ 并不会在方程(10)中消失掉。Mitra 等人在推导相应于(10)式的方程时，没有能够注意到这一事实。他们所得的结果相当于对(10)式中的投影算子采取如下的极端非相对论近似：

$$\Lambda^+(p) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

在此近似下，若将 B-S 振幅按大小分量写为

$$\phi_{p\zeta}(\boldsymbol{q}) = [\phi_{++}(\boldsymbol{q})、\phi_{+-}(\boldsymbol{q})、\phi_{-+}(\boldsymbol{q})、\phi_{--}(\boldsymbol{q})] \tag{18}$$

则从(13)—(15)式的块对角形式可见，方程(10)式将退化为仅仅关于 $\phi_{++}(\boldsymbol{q})$ 的方程。文献[3]中的(4.12)-(4.13)式均可按如上方式求得，假如他们关于 $i\sigma_{i0}$ 的错误约化公式被利用的话。显而易见，(17)式的近似是很粗糙的，因为它不适当地忽略了小分量 B-S 振幅对大分量 B-S 振幅 $\phi_{++}(\boldsymbol{q})$ 所满足的方程的贡献。因此，有必要对方程(10)给予一种逻辑上协调的处理方式。

根据(10)式中 T_0、T_1 和 T_2 的块对角性和(18)式，可将(10)式写为如下联立方程的形式

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{q}) = i\frac{4}{3}\int\frac{dq_0}{2\pi}\mathscr{D}^{-1}(p,q)\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\langle\boldsymbol{q}|V|\boldsymbol{k}\rangle\Lambda^{\alpha\beta}V^\beta\phi(\boldsymbol{k})$$
$$\alpha,\beta = 1、2、3、4 \tag{19}$$

这里 $\alpha,\beta = 1、2、3、4$ 对应 $++、+-、-+,--$。$\Lambda^{\alpha\beta}$ 为下列由 $\Lambda^+(p_1)$ 和 $\Lambda^+(p_2)$ 的直积所构成的矩阵 Λ 的 2×2 子矩阵，

$$\Lambda = \Lambda^+(p_1)\otimes\Lambda^+(p_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon_1+m_1}{2m_1}, & \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{q}}{2m_1} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{q}}{2m_1}, & \dfrac{m_1-\varepsilon_1}{2m_1} \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} \dfrac{\varepsilon_1+m_2}{2m_2}, & \dfrac{\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{q}}{2m_2} \\ -\dfrac{\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{q}}{2m_2}, & \dfrac{m_2-\varepsilon_2}{2m_2} \end{pmatrix} \tag{20}$$

其中

$$\varepsilon_1 = \frac{m_1}{m_{12}}M + q_0, \quad \varepsilon_2 = \frac{m_2}{m_1}M - q_0 \tag{21}$$

$$V^\alpha = V_1^iV_2^j + \boldsymbol{V}_1\cdot\boldsymbol{V}_2 \tag{22}$$

这里 $\alpha = (ij)$，$\alpha = 1、2、3、4$ 对应 $ij = ++、+-、-+、--$。

$$V_1^{\pm} = \frac{2m_1}{m_{12}} M + 2q_0 \pm \frac{i}{m_1} (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \mp \frac{1}{2m_1} (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k})^2 \tag{23}$$

$$V_2^{\pm} = \frac{2m_2}{m_{12}} M - 2q_0 \pm \frac{i}{m_2} (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \mp \frac{1}{2m_2} (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k})^2 \tag{24}$$

$$\boldsymbol{V}_{1,2} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{k} - i(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{\sigma}_{1,2} \tag{25}$$

在(19)式中将遇到下列对 q_0 的积分:

$$I_n = \frac{i}{2\pi} \int \mathscr{D}^{-1}(p, q) q_0^n dq_0 \tag{26}$$

$$n = 0、1、2、3、4$$

利用 $\mathscr{D}^{-1}(p、q)$ 的极点性质,不难完成上述积分. 这里仅写出准至 $\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}$ 级近似的结果:

$$I_n = \frac{1}{M^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2} \tilde{I}_n, n = 0、1、2、3、4 \tag{27}$$

其中

$$\tilde{I}_0 \approx \frac{m_{12}}{2m_1m_2} \left[1 - \frac{(m_1^2 + m_2^2 - m_1m_2)}{2m_1m_2} \boldsymbol{q}^2\right] \tag{28}$$

$$\tilde{I}_1 \approx \frac{m_2^2 - m_1^2}{4m_1m_2} \boldsymbol{q}^2 \tag{29}$$

$$\tilde{I}_2 \approx \tilde{I}_3 \approx \tilde{I}_4 \approx 0 \tag{30}$$

$$\omega_i = (\boldsymbol{q}^2 + m_i^2)^{\frac{1}{2}}, i = 1,2 \tag{31}$$

在上述近似下,(19)式便化为

$$\phi_\alpha(\boldsymbol{q}) = \frac{4}{3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle \boldsymbol{q} | V | \boldsymbol{k} \rangle \Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{k}) \phi_\beta(\boldsymbol{k}) \tag{32}$$

$$\alpha, \beta = 1、2、3、4$$

式中

$$\Omega^{\alpha\beta} = \Lambda_0^{\alpha\beta} V_0^\beta I_0 + (\Lambda_0^{\alpha\beta} V_1^\beta + \Lambda_1^{\alpha\beta} V_0^\beta) I_1 \tag{33}$$

$$V_0^\beta = W_1^i W_2^j + V_1^i V_2^j \tag{34}$$

$$V_1^\beta = -2(W_1^i - W_2^j) \tag{35}$$

这里 $\alpha, \beta = 1、2、3、4$ 对应 $i,j = ++、+-、-+、--$.

$$W_{1,2}^{\pm} = \frac{2m_{1,2}M}{m_{12}} \pm \frac{i}{m_{1,2}} (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{1,2} \mp \frac{1}{2m_{1,2}} (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{k})^2 \tag{36}$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \eta_1^2 & -\xi_2\eta_1 & -\xi_1\eta_2 & \xi_1\xi_2 \\ \xi_2\eta_1 & \eta_1\eta_2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\eta_2 \\ \xi_1\eta_1 & -\xi_1\xi_2 & \eta_1\eta_2 & -\xi_2\eta_1 \\ \xi_1\xi_2 & \xi_1\eta_2 & \xi_2\eta_2 & \eta_2^2 \end{pmatrix} \tag{37}$$

$$\Lambda_1 = \left(\begin{array}{cccc} \frac{m_2 - m_1}{2m_1m_2} & \frac{-\xi_2}{2m_1} & \frac{\xi_1}{2m_2} & 0 \\ \frac{\xi_2}{2m_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1}{m_1} + \frac{\eta_2}{m_2}\right) & 0 & \frac{-\xi_1}{2m_2} \\ \frac{-\xi_1}{2m_2} & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_1}{m_1} + \frac{\eta_2}{m_2}\right) & \frac{\xi_2}{2m_1} \end{array} \right. \tag{38}$$

$$\left| \begin{matrix} 0 & \frac{\xi_1}{2m_2} & \frac{-\xi_2}{2m_1} & \frac{m_1-m_2}{2m_1m_2} \end{matrix} \right|$$

其中

$$\xi_{1,2}(\boldsymbol{q}) = \pm \frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}_{1,2}}{2m_{1,2}} \tag{39}$$

$$\eta_{1,2}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\left(1\pm \frac{M}{m_{1,2}}\right) \approx \frac{1}{2}\left[1\pm\left(1+\frac{\boldsymbol{q}^2}{2m_1m_2}\right)\right] \tag{40}$$

(39)式中最后一步已利用了 I_n 中极点的性质,将M代以 $\omega_1+\omega_2$, 并取 $\frac{\boldsymbol{q}^2}{m^2}$级近似.

三、P-S 方 程

(32)式所示是关于四个 B-S 振幅分量 ϕ_{++}、ϕ_{+-}、ϕ_{-+} 和 ϕ_{--} 在 $\boldsymbol{q}^2/m^2$ 级近似下的联立方程组. 仔细分析 $\Omega^{\alpha\beta}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k})$ 的表示式和(32)式中的四个方程,可以发现在 $\boldsymbol{q}^2/m^2$ 级近似(也仅仅在这个近似)下,各 4×1 振幅分量之间存在着如下的关系式:

$$\begin{aligned} &\phi_{+-}(\boldsymbol{q}) = \xi_2(\boldsymbol{q})\phi_{++}(\boldsymbol{q}),\ \phi_{-+}(\boldsymbol{q}) = \xi_1(\boldsymbol{q})\phi_{++}(\boldsymbol{q}), \\ &\phi_{--}(\boldsymbol{q}) = \xi_1(\boldsymbol{q})\xi_2(\boldsymbol{q})\phi_{++}(\boldsymbol{q}) \end{aligned} \tag{41}$$

利用上述关系式,可从(32)式的方程组求得一个 4×1 振幅分量,譬如 $\phi_{++}(\boldsymbol{q})$ 所满足的方程式,如下:

$$\phi_{++}(\boldsymbol{q}) = \frac{4}{3}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\langle \boldsymbol{q}|V|\boldsymbol{k}\rangle \Gamma(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k})\phi_{++}(\boldsymbol{k}) \tag{42}$$

其中

$$\begin{aligned} \Gamma(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}) = {} & \Omega_{11}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k}) + \Omega_{12}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k})\xi_2(\boldsymbol{k}) + \Omega_{13}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k})\xi_1(\boldsymbol{k}) \\ & + \Omega_{14}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{k})\xi_1(\boldsymbol{k})\xi_2(\boldsymbol{k}) = 2m_{1,2}\left\{1 + \frac{1}{4m_1m_2}\right. \\ & \cdot\left[3\boldsymbol{q}^2 + \frac{m_{12}^2}{m_1m_2}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{k} - \frac{(m_1^2+m_2^2-m_1m_2)}{m_1m_2}\boldsymbol{k}^2\right] \\ & - (\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})^2\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 + i(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{k})\cdot\left[\left(2+\frac{m_2}{m_1}\right)\boldsymbol{\sigma}_1\right. \\ & \left.\left. + \left(2+\frac{m_1}{m_2}\right)\boldsymbol{\sigma}_2\right] + [(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\sigma}_1][(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{\sigma}_2]\right\} \end{aligned} \tag{43}$$

这里强调指出,上式中比例于 Ω_{12} 和 Ω_{13} 的项是由振幅分量 ϕ_{+-} 和 ϕ_{-+} 所贡献的,即使在 $\boldsymbol{q}^2/m^2$ 级近似下,这些贡献也是不能忽略的;但比例于 Ω_{14} 的由 ϕ_{--} 贡献的项在此近似下则是可以忽略的.

方程(43)式是一种准 P-S 方程,其中振幅分量 ϕ_{++} 不是归一化的波函数. 为了求得标准的 P-S 方程,可利用瞬时近似下 B-S 振幅的归一化条件[1][18][19].

$$\frac{1}{4\pi^2M}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\phi^+_{p\zeta}(\boldsymbol{q})[\Lambda_1^+(\boldsymbol{q})\Lambda_2^+(\boldsymbol{q}) - \Lambda_1^-(\boldsymbol{q})\Lambda_2^-(\boldsymbol{q})]\phi_{p\zeta}(\boldsymbol{q}) = 1 \tag{44}$$

寻求 B-S 振幅与归一化的 P-S 波函数之间的关系. (44)式中的 $\Lambda^\pm(\boldsymbol{q})$ 是如下定义的

正、负能态的投影算子：

$$\Lambda_i^{\pm}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2\omega_i}[\omega_i \pm H_i(\boldsymbol{q})] \tag{45}$$

$$H_i(\boldsymbol{q}) = (-1)^{i+1}\boldsymbol{\alpha}_i \cdot \boldsymbol{q} + m_i\beta_i \tag{46}$$

$i = 1$、2 分别对应夸克和反夸克．$H_i(\boldsymbol{q})$ 为单粒子的 Hamilton 算符．

将(18)、(41)以及(45)-(46)式代入到(44)式中，在准至 $\boldsymbol{q}^2/m^2$ 级近似下，可得

$$\frac{1}{8\pi^2M^2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\phi_{++}^{+}(\boldsymbol{q})\left[\frac{1+m_1^2+m_2^2}{4m_1m_2}\boldsymbol{q}^2\right]\phi_{++}(\boldsymbol{q}) = 1 \tag{47}$$

由此推出 $\phi_{++}(\boldsymbol{q})$ 与归一化波函数 $\varphi(\boldsymbol{q})$ 的关系为

$$\phi_{++}(\boldsymbol{q}) = \sqrt{8M}\,\pi\left[1-\frac{m_1^2+m_2^2}{8m_1^2m_2^2}\boldsymbol{q}^2\right]\varphi(\boldsymbol{q}) \tag{48}$$

在(42)式中代入(48)式，即得 $\varphi(\boldsymbol{q})$ 所满足的包含 $\boldsymbol{q}^2/m^2$ 级相对论修正的 P-S 方程，在坐标空间中表示如下：

$$\left[-\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right]\varphi(\boldsymbol{r}) = \varepsilon\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{49}$$

式中

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\quad \varepsilon = \frac{M^2-m_{12}^2}{2m_{12}} \tag{50}$$

$$V(\boldsymbol{r}) = V_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{r}) + V_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r}) \tag{51}$$

$V_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{r})$ 和 $V_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r})$ 分别代表由单胶子交换和谐振子禁闭位所产生的位势，表示如下：

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{G}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4}{3}\alpha_s\Big\{&\frac{1}{r} + \frac{2\pi}{3m_1m_2}\left(\frac{15}{2}-2\boldsymbol{s}^2\right)\delta(\boldsymbol{r}) \\ &+ \frac{1}{4m_1^2m_2^2}\Big[(m_1^2+m_2^2+8m_1m_2)\frac{\boldsymbol{r}\cdot\nabla}{r^3} \\ &+ (m_1^2+m_2^2-12m_1m_2)\frac{\nabla^2}{2r}\Big] - \frac{1}{4m_1m_2r^3}\boldsymbol{L} \\ &\cdot\left[\left(2+\frac{m_2}{m_1}\right)\boldsymbol{\sigma}_1 + \left(2+\frac{m_1}{m_2}\right)\boldsymbol{\sigma}_2\right] - \frac{3T(\boldsymbol{r})}{4m_1m_2r^3}\Big\} \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r}) = \omega_{q\bar{q}}^2\Big\{&\boldsymbol{r}^2 - \frac{1}{m_1m_2}\left(\frac{15}{2}-2\boldsymbol{s}^2\right) + \frac{1}{8m_1^2m_2^2}\cdot[(m_1^2+m_2^2 \\ &-12m_1m_2)\boldsymbol{r}^2\nabla^2 - 4(m_1^2+m_2^2+8m_1m_2)\boldsymbol{r}\cdot\nabla] \\ &+ \frac{1}{2m_1m_2}\boldsymbol{L}\cdot\left[\left(2+\frac{m_2}{m_1}\right)\boldsymbol{\sigma}_1 + \left(2+\frac{m_1}{m_2}\right)\boldsymbol{\sigma}_2\right]\Big\} \end{aligned} \tag{53}$$

在以上二式中，

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times(-i\nabla),\quad \boldsymbol{s} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2) \\ &T(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_1)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\sigma}_2) - \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2 \end{aligned} \tag{54}$$

依次表示体系的轨道角动量、总自旋和张量力算符．

四、计算与讨论

本文利用(49)—(54)式计算了介子谱. 计算中未将 $V_G(\boldsymbol{r})$ 作为微扰来处理. 考虑到在(49)式中禁闭势对介子谱起着主要作用，故采取谐振子波函数作为构成介子波函数的基。又考虑到张量力将使不同的轨道态发生混合，故采取下述谐振子基的线性组合的方式,按照介子的自旋和宇称来选择介子的试探波函数

$$\varphi_{JM}(\boldsymbol{r}) = \sum_{n_r l s} A^{JM}_{n_r l s} \sum_{m m} C^{JM}_{l m s m_s} \phi^{n_r}_{l m}(\boldsymbol{r}) \chi_{s m_s} \tag{55}$$

式中 $\phi^{n_r}_{lm}(\boldsymbol{r})$ 和 χ_{sm_s} 分别为谐振子波函数和自旋波函数. $C^{JM}_{lmsm_s}$ 为 C-G 耦合系数，$A^{JM}_{n_r ls}$ 为组合系数。

在此计算中可调的自由参数共有三种. 一是 QCD 的有效精细结构常数 α_s. 这里引用 A. De Rujula 等人采用过的值:

$$\alpha_s^{u,d} = 0.30,\ \alpha_s^s = 0.27,\ \alpha_s^c = 0.20,\ \alpha_s^b = 0.10$$

以上对不同的夸克 u、d、s、c、b 选取不同的有效耦合常数，这是为重整化群方程给出的论据所容许的. 二是禁闭势的弹性常数 ω，其定义为 $\omega^2_{q\bar{q}} = (m_1 + m_2)\omega^2$. 这里选为 $\omega = 0.125\text{GeV}$. 三是夸克的质量. 这里选为

$$m_{u,d} = 0.0795\text{GeV},\ m_s = 0.1865\text{GeV}$$

$$m_c = 1.3640\text{GeV},\ m_b = 4.5320\text{GeV}$$

这些质量值是按照最好地拟合实验数据的方式选取的，其中轻夸克的质量值比通常选取的结构质量小些. 实际上,按照重整化群方程的讨论,它们只能被看作夸克的有效质量.

介子谱计算的结果列于表 1. 为了比较和说明问题,我们也利用 Mitra 等人对投影算子所采取的由(17)式所示的极端非相对论近似所导致的(49)式形式的方程计算了介子谱(为了节约篇幅,省写了该方程中与(52)—(53)式有明显差别的位势形式),结果列于表中每项的最后一列. 通过比较可见，利用恰当地考虑投影算子和 B-S 振幅小分量的贡献的方程计算的结果,显然地比未考虑这些贡献的结果要好,尤其对轻夸克介子，其理论值明显地有了改善. 这一事实表明,正确地计及 B-S 方程中各因子的相对论修正，会更好地逼近介子内部运动的真实情况.

这里有必要比较一下由(49)式所示的 P-S 方程与在 Schrödinger 方程中直接插入 Fermi-Breit 势和禁闭势而建立起来的相应方程. 显然,前者由(53)式所示的禁闭势比后者的禁闭势（仅(53)式中的第一项）具有丰富得多的内容. 所多出的那些项产生于禁闭势也具有矢量耦合结构的假设. 这些项对重夸克介子影响不大；但对轻夸克介子却具有明显的效应. 至于对(52)式所示的单胶子交换势,其中库仑作用项以及自旋-自旋、自旋-轨道和张量力的耦合项,与通常的 Fermi-Breit 势的相应项完全相同,但对其余的项两者之间有很大的差别. 其原因在于 Fermi-Breit 势是从质壳上的 S- 矩阵推得的等效位势，它不可能包括 B-S 方程中由离壳的 B-S 振幅和投影算子所给出的贡献.

正如引言中所申明的,本文的目的在于给 Mitra 等人的工作以正确的形式. 因此以

表 1　介子谱计算结果

$^{2s+1}L_J J^{PC}$	$u\bar{u}$ $d\bar{d}$ $s\bar{s}$($I=0$)	$u\bar{u}$ $d\bar{d}$ $s\bar{s}$ ($I=1$)	$s\bar{u}$ $s\bar{d}$ $\left(I=\frac{1}{2}\right)$	$c\bar{c}$ ($I=0$)	$b\bar{b}$ ($I=0$)
$^1S_0 0^{-+}$	η(549) 524 696 η'(958) 1019 1253	π(140) 139 561 π^*(1300) 1541 1676	K(496) 496 800	η_c(2980) 2983 2985 η'_c(3591) 3524 3469	
$^3S_1 1^{--}$	ω(783) 777 910 ϕ(1020) 1006 1051	ρ(770) 777 910 ρ'(1600) 1756 1820	K^*(892) 918 1118	J/ψ(3100)3073 3071 χ(3685) 3601 3545	Υ(9460) 9442 9259 χ_b(10355)10448 10505
$^1P_1 1^{+-}$	H(1190) 1286 1485	B(1035) 984 1175	Q_B(1400) 1409 1251		
$^3P_0 0^{++}$	ε(1300) 1335 1490	δ(980) 982 1180	K^*(1350) 1206 1459	χ(3415) 3415 3460	χ_b(9875) 9875 9892
$^3P_1 1^{++}$	E(1400) 1404 1569	A(1100) 1158 1282	Q_A(1280) 1298 1572	χ(3510) 3510 3506	χ_b(9895) 9887 9909
$^3P_2 2^{++}$	f(1217) 1218 1236 f'(1525) 1529 1544	A_2(1320) 1239 1458	K^*(1430) 1476 1298	χ(3555) 3540 3585	χ_b(9915) 9908 9936
$^3D_1 1^{--}$				χ(3770) 3911 3961	
$^3D_3 3^{--}$	ω(1670) 1664 1711	g(1690) 1669 1620	K^*(1780) 1778 1776		

表中所列数值均以 MeV 为单位．第一列括号内所列的是实验数据．第二列上行所示是用考虑投影算子的离壳性所得的 P-S 方程计算的结果．第二列下行所示是用未考虑这种离壳性所得的方程计算的结果．

上的讨论仍采取 Mitra 等人的假定，即禁闭势具有同单胶子交换势一样的旋量结构．然而，从 B-S 不可约核的相对论协变性可知[14]，用来模拟多胶子交换效应的禁闭势，不限于矢量-矢量耦合的方式，它容许更一般的 Lorentz 张量耦合的形式．因此，在 B-S 方程的形式下，通过与实验比较，来探讨禁闭势的旋量结构是一个饶有兴趣的问题．

感谢吴式枢教授对本文提出了很好的意见．

参　考　文　献

[1] T. Murota, *Prog. Theor. Phys.*, **69**(1983), 181.
[2] E. E. Salpeter & H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 1232.
[3] N. Nakanish, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **43** (1969), 1.
[4] A. N. Mitra, *Z. Phys.*, **C8** (1981), 25.
[5] A. N. Mitra & I. Santhanam, *Z. Phys.*, **C8** (1981), 33.
[6] A. N. Mitra & D. S. Kulshreshtha, *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 3123.

[7] A. N. Mitra & D. S. Kulshreshtha, *Phys. Rev.*, **D28** (1983), 589.
[8] A. N. Mitra & A. Mittal, *Phys. Rev.*, **D29** (1984), 1399.
[9] A. Mittal & A. N. Mitra, *Phys. Rev. Lett.*, **57**(1986), 290.
[10] M. Arafah, R. Bhandari & B. Ram, *Lett. Nuovo. Cimento.*, **38**(1983), 305.
[11] V. Kriss & B. Ram, *Mod. Phys. Lett.*, **A3**(1988), 33.
[12] Wai-Yee Keung & L. J. Muzinich, *Phys. Rev.*, **D27** (1983), 1518.
[13] Chris Long & D. Robson, *Phys. Rev.*, **D27**(1983), 644.
[14] Chris Long, *Phys. Rev.*, **D30**(1984), 1970.
[15] 赵光达,中国科学,A辑,(1983),247.
[16] A. De Rujula, et al., *Phys. Rev.*, **D12** (1975), 147.
[17] 苏君辰和吴式枢,高能物理与核物理,5(1987),644.
[18] E. E. Salpeter, *Phys. Rev.*, **87** (1952), 328.
[19] M. Mandelstam, *Prog. Roy Soc.*, **A233** (1955), 248.
[20] C. Itzykson & B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980.

BETHE-SALPETER EQUATION FOR $q\bar{q}$ SYSTEM AND CALCULATION OF MESON SPECTRA

DONG YUBING, SU JUNCHEN

(*Department of Physics Jilin University, Changchun*)

ABSTRACT

In this paper, an adequate form of $q\bar{q}$ Bethe-Salpeter (B-S) equation with one gluon exchange interaction and harmonic oscillator confining potential being taken into account has been derived, based on correct Gordon decompositions of the γ-matrices and a proper treatment for the fermion propagators in the equation. Furthermore, a Pauli-Schrödinger (P-S) equation including relativistic corrections has been established on the basis of the B-S equation by making use of relations between 4×1 components of the 16×1 B-S amplitude and a connection between the B-S amplitude and the P-S wave function both of which were found in the approximation of the order of P^2/m^2. Calculations of meson spectra by employing the latter equation give a better agreement with the experimental data.