第 13 卷 第 11 期　　高能物理与核物理　　Vol. 13, No. 11
1989 年 11 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Nov., 1989

一个八维 Kaluza-Klein 宇宙模型

刘　棋　徐建军　李新洲
（复旦大学物理系，上海）

摘　　要

本文讨论了一个八维 Kaluza-Klein 宇宙模型. 它不仅自洽地包含 Georgi 三族 $SU(11)$ 大统一模型，而且得到了与观测宇宙一致的物理解. 在这一模型中，通常四维的宇宙标度因子记作 R_3 而额外维度的宇宙标度因子记作 R_4，它们的物理性质可分成四个阶段来描述. 第一阶段，R_3 和 R_4 都在膨胀；第二阶段，R_3 是一个 inflation 解而 R_4 是个常数；第三阶段，R_4 开始坍缩到它的极小值，而 R_3 继续单调地增加；第四阶段，R_4 稳定在 Kaluza-Klein 半径 R_{KK} 而 R_3 以通常的 FRW 方式膨胀，这时四维的宇宙常数变为零.

近几年来，人们对于 Kaluza-Klein 宇宙学[1]，产生了相当大的兴趣. 一些作者[2]已经研究了由纯 Kaluza-Klein 理论得到 inflation 宇宙学的可能性. 可是，要达到满意的 inflation 程度，需要引进过高的维数. 因此，用较低紧致维数 Kaluza-Klein 宇宙学找到 inflation 解是相当感兴趣的[3-5]. 在本文中，我们讨论了加上物质项的八维爱因斯坦-规范理论的宇宙解模型. 另一方面，在高维时空中，爱因斯坦方程的自发紧致解与手征费米子存在性的关系已经被研究[6]. 从这一角度来说，Georgi 的三族 $SU(11)$ 大统一模型可以自洽地包含在我们的模型中，即我们所得到的宇宙解应称为八维爱因斯坦-GUT 的宇宙解. 在我们的模型中，通常四维的宇宙标度因子 R_3 和额外维的宇宙标度因子 R_4 都仅仅作为时间的函数. R_3 和 R_4 的物理性质分四个阶段来描述. 第一阶段：所有的维数开始于一个"大爆炸"(我们可以将它称为第一次"大爆炸"). 由于 K_3 是负的，R_3 将连续单调地增加而不会发生坍缩. 当 R_4 膨胀到它的最大值时，R_3 开始迅速地增加. 第二阶段：$R_4(t)$ 是一个常数而 $R_3(t)$ 有一个 inflation 行为. inflation 宇宙的目的是为了解决视界、平坦性、宇宙年龄和磁单极等问题. 第三阶段：$R_4(t)$ 坍缩到它的极小值，而 $R_3(t)$ 将继续单调地增加. 第四阶段：通过一些可能的（量子）效应使 $R_4(t)$ 稳定在 Kaluza-Klein 半径 R_{KK}，而 R_3 则以通常的 FRW 方式膨胀，这时四维宇宙常数变为零.

象通常一样，我们采用广义 Robertson-Walker 形式的度规：

$$\tilde{g}_{MN}(z^P)dz^M dz^N = -dt^2 + R_3^2(t)g_{ij}(x^k)dx^i dx^j + R_4^2(t)g_{mn}(y^p)dy^m dy^n \tag{1}$$

其中 $M,N = 0,1,2,3,5,6,7,8$; $i,j = 1,2,3$; $\mu,\nu = 0,1,2,3$; $m,n = 5,6,7,8$. 指

本文 1989 年 1 月 25 日收到.

$$\frac{3\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{4\ddot{R}_4}{R_4}=\frac{1}{2}\kappa^2\left[-\frac{1}{g^2R_4^4}-\frac{1}{6}(3p+4p'+5\rho)+\frac{1}{3}\lambda\right] \tag{16}$$

$$\frac{2K_3}{R_3^2}+\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2}+\frac{4\dot{R}_3\dot{R}_4}{R_3R_4}=\frac{1}{2}\kappa^2\left[-\frac{1}{g^2R_4^4}+\frac{1}{6}(3p-4p'+\rho)+\frac{1}{3}\lambda\right] \tag{17}$$

$$\frac{\ddot{R}_4}{R_4}+\frac{3R_4^2}{R_4^2}+\frac{3\dot{R}_3\dot{R}_4}{R_3R_4}+\frac{3}{R_4^2}=\frac{1}{2}\kappa^2\left[\frac{2}{g^2R_4^4}+\frac{1}{6}(-3p+2p'+\rho)+\frac{1}{3}\lambda\right] \tag{18}$$

$R_3(t)$ 和 $R_4(t)$ 清楚地显示在四个阶段中．第一阶段：在宇宙早期假设宇宙以辐射为主是合理的，而且标度因子对三维和四维空间有相同的量级，这样态方程就可写成 $p=p'$，$\rho=7p$．把态方程代入(16)—(18)中，令 $K_3=-1$，$\lambda=12\frac{g^2}{\kappa^4}$，我们有：

$$R_3(t)=\sqrt{\frac{2}{5}}+\sum_{j=0}^{\infty}a_j\left(\frac{\sqrt{2}g}{\kappa}t\right)^j \tag{19}$$

$$R_4(t)=\left(\frac{\kappa}{\sqrt{2}g}t\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{\infty}b_j\left(\frac{\sqrt{2}g}{\kappa}t\right)^j \tag{20}$$

$$\rho(t)=\frac{2g^2}{\kappa^4}\sum_{j=0}^{\infty}c_j\left(\frac{\sqrt{2}g}{\kappa}t\right)^j \tag{21}$$

其中

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=\frac{19}{825},\ a_3=\frac{441182}{83551875},\cdots;$$

$$b_0=1,\ b_1=-\frac{1}{5},\ b_2=\frac{19}{660},\ b_3=\frac{367601}{83551875},\cdots;$$

$$c_0=0,\ c_1=0,\ c_2=0,\ c_3=\frac{33902288}{83551875},\cdots;$$

在(19)—(21)中，收敛半径约为 $\frac{\kappa}{g}$ 从这个解知道 R_3 和 R_4 都膨胀，所有的维数开始于一个“大爆炸”．我们应该强调，在(16)—(18)中 R_4^4 项是重要的，和纯 Kaluza-Klein 宇宙学相反，这项决定着 $\rho(t)$ 的性质．容易检验当 $t\sim\frac{\kappa}{g}$时，$R_3\gg R_4$．由于 K_3 是负的，R_3 将继续单调地增加而不会坍缩．当 R_4 膨胀到它的极大值时，R_3 被迫迅速地膨胀，我们可以期望这时 $R_3\gg R_4$．

第二阶段：在 $R_3\gg R_4$ 期间，我们可以忽略内压强，并且物质的贡献仍以辐射为主．这样 $\rho=3p$，$p'=0$．这个选择为场方程提供了如下的膨胀解：

$$R_3(t)=\left(\alpha e^{2lt}+\beta e^{-2lt}+\frac{K_3}{2l^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{22}$$

$$R_4(t)=\frac{\kappa}{g} \tag{23}$$

$$\rho(t)=\frac{6l^2}{\kappa^2}\left(\frac{K_3^2}{4l^4}-4\alpha\beta\right)\left(\alpha e^{2lt}+\beta e^{-2lt}+\frac{K_3}{2l^2}\right)^{-2} \tag{24}$$

其中 α, β 为积分常数，$I = g^2/2\kappa^2$.

在这个解中，$R_4(t)$ 是个常数，$R_3(t)$ 有一个 inflation 行为，而 $\rho(t) \sim R_3^{-4}(t)$. 这个 inflation 解可以解决诸如视界、平坦性、宇宙年龄和磁单极等大爆炸宇宙学所遗留下的问题.

第三阶段: inflation 阶段过后的状态方程仍为 $\rho=3p, p'=0$. 我们假定 $K_3=-1$. 那么可用反证法证明，在 R_4 达到极小值（即 Kaluza-Klein 半径 R_{KK}）之前，R_3 将单调地增加而不会坍缩. 假设 $R_3(t)$ 膨胀到某个极大值并开始坍缩. 在这个假设的极大值，有 $\dot{R}_3=0$，$\ddot{R}_3<0$. 那么方程(17)变为

$$-\frac{2}{R_3^2}+\frac{\ddot{R}_3}{R_3}=\frac{1}{2}\kappa^2\left[-\frac{1}{g^2R_4^4}+\frac{1}{3}\rho+\frac{1}{3}\lambda\right] \tag{25}$$

方程(25)的左边是负的，而右边是正的 $(R_4 \gg R_{KK}, \rho>0)$. 因而假设不成立. 实际上，在 $R_3(t_0) \gg R_4(t_0)$，我们可以忽略内压强，而物质的贡献仍采用辐射为主的形式 $\rho=3p$，$p'=0$. 我们定义 $\tau=t-t_0$，那么方程(16)—(18)在 $t=t_0$ 附近的解为

$$R_3(\tau)=A+B\tau+\left[\frac{1}{2A}+\frac{Bb}{2a}+\frac{A}{a^2}+\frac{Ab^2}{a^2}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{B^2}{2A}+\frac{\kappa^2}{2g^2}\frac{A}{a^4}\right)\right]\tau^2+O(\tau^3) \tag{26}$$

$$R_4(\tau)=a+b\tau+\left[\frac{g^2}{\kappa^2}a+\frac{\kappa^2}{2g^2a^3}\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2}\left(\frac{b^2}{a}+\frac{1}{a}+\frac{Bb}{A}\right)\right]\tau^2+O(\tau^3) \tag{27}$$

$$\rho(\tau)=\left(\frac{18Bb}{Aa\kappa^2}+\frac{12}{a^2\kappa^2}+\frac{12b^2}{a^2\kappa^2}-\frac{12g^2}{\kappa^4}-\frac{3}{g^2a^4}-\frac{6}{A^2\kappa^2}\right)+O(\tau) \tag{28}$$

其中 τ 可以取任意单位，$A, B>0$，$b<0$. 从这个解看出 R_4 开始坍缩而 R_3 继续单调地增加.

第四阶段: R_4 达到极小值 R_{KK}，而量子引力效应使 R_4 稳定在 R_{KK}. 从这个时候到 $R_4=R_{KK}$，R_3 则以通常的 FRW 方式膨胀. 事实上，用状态方程 $p'=0$，$\rho=3p$ 代入方程(18)，我们得到方程

$$12\frac{g^4}{\kappa^2}R_{KK}^4-18g^2R_{KK}^2+6\kappa^2=0 \tag{29}$$

解之得

$$R_{KK}=\sqrt{\frac{\kappa^2}{2g^2}} \tag{30}$$

用方程(30)和状态方程代入(16)、(17)中，我们得方程

$$\frac{3\ddot{R}_3}{R_3}=-\frac{\kappa^2}{2}\rho \tag{31}$$

$$\frac{2K_3}{R_3^2}+\frac{\ddot{R}_3}{R_3}+\frac{2\dot{R}_3^2}{R_3^2}=\frac{\kappa^2}{6}\rho \tag{32}$$

方程(34)、(35)正是四维宇宙常数为零的 Friedmann 模型的场方程. 现在的宇宙可以很

好地用 Friedmann 模型描述．能量守恒方程是

$$\dot{\rho} + 4\rho R_3^{3}\dot{R}_3 = 0 \tag{33}$$

这个方程积分后给出 $\rho \propto R_3^{-4}(t)$．这是一致性所要求的．方程(33)也和场方程一致．从(32)、(33)得到

$$\frac{K_3}{R_4^3} = H^2(q-1) \tag{34}$$

注意 $K_3 < 0$ 在辐射宇宙中和 $q < 1$ 对应．我们将可以从(31)和(32)式中得到与观测宇宙学相一致的结果，同时我们也已经解决了视界、宇宙年龄、平坦性和磁单极等宇宙问题．所以本文所建立的八维模型是一个较好的宇宙模型．

参　考　文　献

[1] T. Kaluza, *Sitzungsber. Press. Akad. Wiss. Phys. Math.*, **K1** (1926), 966; O. Klein, *Z. Phys.*, **37**(1926), 895.

[2] D. Sahdev, *Phys. Lett.*, **137B** (1984), 155; R. B. Abbott, S. M. Barr and S. D. Ellis, *Phys. Rew.*, **D30** (1984), 720;
P. G. O. Freund and P. Oh, *Nucl. Phys.*, **B255**(1985), 688.

[3] M. Gleiser, S. Rajpoot and J. G. Taylor, *Ann. Phys.* (N. Y.) **160** (1985), 299; Q. Shafi and C. Wtterich, *Nucl. Phys.*, **B289** (1987), 787.

[4] S. Randjbar-Daemi, A Salam and J. Strathdee, *Nucl. Phys.*, **B214**(1983), 491; *Phys. Lett.* **124B**(1983), 245, **132B**(1983) 56.

[5] Xinzhou Li, Shengshan Cai, Sizhu Hu and Jianjun Xu, *Phys. Lett.*, **201B** (1988), 34; Xinzhou Li, *Phys. Lett.*, **205B** (1988), 451; Jianjun Xu and Xinzhou Li *Phys. Lett.*, **208B** (1988), 391; 徐建军，李新洲，倪光炯，高能物理与核物理，12(1988)，852.

[6] R. H. Frampton and K. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.*, **52**(1984), 2016.

AN EIGHT-DIMENSIONAL KALUZA-KLEIN COSMOLOGY

LIU QI　　XU JIANJUN　　LI XINZHOU

(Department of Physics, Fudan University, Shanghai)

ABSTRACT

We present a cosmological solution of eight-dimensional Kaluza-Klein theory with Georgi's three -family $SU(11)$ model in M_4, to which a matter term is added. In this solution, the general behavior of the scale factors is depicted in four stages. In stage one, both R_3 and R_4 expand with time; in stage two, R_4 is a constant while R_3 is an inflationary solution and R_3 will continue to increase with time monotonically while R_4 recollapses toward its minimum in stage three; finally, in stage four, R_4 will be stabilized at R_{KK} through some quantum effects and R_3 expands with time in the usual FRW way in which the four-dimensional cosmological constant becomes zero.