

# $\pi$ 介子分布振幅及其相关的遍举过程

白占武

(西南交通大学,四川)

## 摘 要

本文在 QCD 求和规则的基础上,通过分析  $\pi$  介子相关的遍举过程对 QCD 的检验情况,讨论了  $\pi$  介子分布振幅的行为,用一种尝试的分布振幅计算了  $F_\pi(Q^2)$  和  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$ , 得到的  $F_\pi(Q^2)$  与实验数据相符合,  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$  与实验数据在数量级上相符合.

## 一、引 言

微扰 QCD 应用到遍举过程已经取得了很大进展. 这些遍举过程如强子的形状因子<sup>[1]</sup>, 大动量迁移下的强子弹性散射<sup>[2]</sup>, 以及各种重夸克素的衰变<sup>[3]</sup>等, 其特点是强子的内部动量和大动量迁移  $Q^2$  相比可以忽略, 从而, 振幅具有因子化的形式, 即把小距离下的硬过程和强子波函数的大距离效应分离开来, 如  $\pi$  介子的形状因子具有如下形式<sup>[4]</sup>:

$$\int dx dy \phi(x, Q^2) T_H(x, y; Q^2) \phi(y, Q^2) \quad (1)$$

其中硬过程分布振幅  $T_H$  可用微扰 QCD 来计算. 强子波函数原则上可由强子的束缚态方程求出, 但由于 QCD 的复杂性, 求解非常困难. 近年来, 由于 QCD 求和规则方法所取得的进展<sup>[4]</sup>, 我们可以半唯象地给出  $\pi$  介子分布振幅  $\phi(x, Q^2)$  的分布行为, 从而可以计算各种与  $\pi$  介子相关的遍举过程. 本文希望通过对一系列遍举过程的研究获得更多的有关强子内部结构的信息.

## 二、对分布振幅形状的限制

当  $Q^2$  远大于  $Q_0^2$  时 ( $Q^2 \rightarrow \infty$ ), 分布振幅  $\phi(x, Q^2)$  将趋于渐近形式  $\phi_{as} = \sqrt{3} f_\pi x(1-x)$ . 但由于  $\phi(x, Q^2)$  随  $Q^2$  演化的方程<sup>[4]</sup>, 我们可以看出,  $\phi(x, Q^2)$  随  $Q^2$  的演化很缓慢, 在中等  $Q^2$  时,  $\phi(x, Q^2)$  更加接近于  $\phi(x, Q_0^2)$  而不是  $\phi_{as}(x)$ , 而  $\phi(x, Q_0^2)$  主要由大距离非微扰相互作用来决定.

为了考虑非微扰效应, 文献[5]假定真空是充满着夸克和胶子凝聚  $\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$ 、 $\langle 0 | G_{\mu\nu}^2 | 0 \rangle$  的物理真空, 用经典背景场来描述, 给出如下的  $\pi$  介子矩求和规则:

$$\langle \xi^0 \rangle_\pi = 0.83, \quad \langle \xi^2 \rangle_\pi = 0.46, \quad \langle \xi^4 \rangle_\pi = 0.29, \quad (2)$$

in  
by  
re-  
he  
the  
nu-

而渐近形式仅给出:

$$\begin{aligned}\langle \xi^2 \rangle_\pi &= \frac{\sqrt{3}}{f_\pi} \int_{-1}^1 d\xi \cdot \xi^2 \phi_{as}(\xi) = 0.20 \\ \langle \xi^4 \rangle_\pi &= \frac{\sqrt{3}}{f_\pi} \int_{-1}^1 d\xi \cdot \xi^4 \phi_{as}(\xi) = 0.086.\end{aligned}\quad (3)$$

比结果(2)小得多. 这是由于  $\phi(x, Q_0^2)$  与  $\phi_{as}$  分布差别很大的缘故. 由(2)式与(3)式的比较我们可以看出,  $\phi(x, Q_0^2)$  要比  $\phi_{as}(x)$  宽很多.

$\pi$  介子的形状因子由(1)式给出, 到  $\alpha_s(Q^2)$  幂次的主导阶, “硬散射振幅”  $T_H$  可表达为如下形式<sup>[1]</sup>:

$$T_H(x, y; Q^2) = \frac{16\pi C_F}{Q^2} \left[ \frac{e_1 \alpha_s((1-x)(1-y)Q^2)}{(1-x)(1-y)} + \frac{e_2 \alpha_s(xyQ^2)}{x \cdot y} \right], \quad (4)$$

其中  $e_1, e_2$  为组成  $\pi$  介子的夸克电荷,  $C_F = \frac{n_c^2 - 1}{2n_c} = 4/3$ . 囚禁理论在低能下的一个重要结果是有效耦合常数冻结<sup>[6]</sup>, 文献[7]取  $\alpha_s$  为如下形式:

$$\alpha_s(Q^2, M_0^2) = \frac{4\pi}{\beta \ln \frac{M_0^2 + Q^2}{\Lambda^2}} \quad (5)$$

其中  $\beta = 11 - 2/3 N_f$ . 我们这里选取  $M_0^2$ , 使得  $\alpha_s(0, M_0^2) = 1$ . 若  $\phi$  以渐近形式  $\phi_{as}(x) = \sqrt{3} f_\pi x(1-x)$  代入. 取  $\Lambda = 200$  MeV, 计算表明, 理论值大约是实验值的 50%.

由于  $C$  宇称和  $P$  宇称守恒,  $\chi$  的  $P$  波态中只有  $\chi_0(S=0)$  和  $\chi_2(S=2)$  可以衰变到  $\pi^+\pi^-$ . 详细的计算给出:

$$\text{Br}(\chi_0 \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{8\pi^2}{81 M_c^4} \times \frac{1}{\alpha_s^2(M_c^2)} |I^{(0)}|^2, \quad (6)$$

$$\text{Br}(\chi_2 \rightarrow \pi^+\pi^-) = \frac{4\pi^2}{27 M_c^4} \times \frac{1}{\alpha_s^2(M_c^2)} |I^{(2)}|^2. \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned}I^{(0)} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \phi(x, Q_0^2) \frac{2 + \frac{(x-y)^2}{x+y-2xy}}{x(1-x)(x+y-2xy)y(1-y)} \\ &\times \alpha_s(4xyM_c^2) \alpha_s(4(1-x)(1-y)M_c^2) \phi(y, Q_0^2),\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}I^{(2)} &= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \phi(x, Q_0^2) \frac{1 - \frac{(x-y)^2}{x+y-2xy}}{x(1-x)(x+y-2xy)y(1-y)} \\ &\times \alpha_s(4xyM_c^2) \alpha_s(4(1-x)(1-y)M_c^2) \phi(y, Q_0^2).\end{aligned}\quad (9)$$

由于  $\phi$  随  $Q^2$  演化的效应很小,  $\phi$  中的宗量  $4xyM_c^2, 4(1-x)(1-y)M_c^2$  已用  $Q_0^2$  代替 ( $M_c$  为  $c$  夸克的质量).

若取  $\alpha_s$  如(5)式,  $\Lambda = 200$  MeV,  $\phi = \phi_{as} = \sqrt{3} f_\pi \cdot x(1-x)$  代入(6)、(7)式可算得:

$$\left. \begin{aligned} \text{Br}^{\text{th}}(\chi_0 \rightarrow \pi^+\pi^-) &\simeq 0.053\% , \\ \text{Br}^{\text{th}}(\chi_2 \rightarrow \pi^+\pi^-) &\simeq 0.011\% . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

而实验值为<sup>[9]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \text{Br}^{\text{exp}}(\chi_0 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= (0.9 \pm 0.2)\% , \\ \text{Br}^{\text{exp}}(\chi_2 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= (0.20 \pm 0.11)\% . \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

渐近结果大约是实验值的 1/20. 如果在遍举过程中  $\phi(x, Q^2)$  均以  $\phi_{\text{th}}(x)$  代替, 结果都比实验值小, 表明  $\phi(x, Q_0^2)$  要比  $\phi_{\text{th}}$  宽. 从  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$  看,  $\phi(x, Q_0^2)$  应该比  $\phi_{\text{th}}$  宽很多.

### 三、一种可能的分布振幅形式

文献[2,3,10,11]讨论了 $\pi$ 介子的分布振幅,但是,文献[10]中用的 $\phi(x, Q^2)$ 分布窄且端点区域 $\alpha_s > 1$ ;文献[11]中用的 $\phi(x, Q^2)$ 形式不解析;文献[2,3]中用的 $\phi(x, Q^2)$ 对 $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$ 的计算端点贡献太大.

考虑到文献[3]提出的分布振幅形式能符合矩的求和规则,但有端点贡献太大的缺点,文献[12]在谐振子波函数的基础上吸取了文献[3]中分布振幅的优点而假定,

$$\phi(x, K_{\perp}) = A'(2x-1)^2 e^{-B \frac{K_{\perp}^2 + m^2}{x(1-x)}}, \quad (12a)$$

由此可得

$$\phi(x, Q^2) \simeq Ax(1-x)(2x-1)^2 e^{-\frac{m^2 B}{x(1-x)}}. \quad (12b)$$

利用 $\pi$ 介子价夸克波函数矩的求和规则<sup>[13,2]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 dx \phi(x, Q^2) &= \int_0^1 dx \int_0^Q \frac{d^2 K_{\perp}}{16\pi^3} \phi^{(0)}(x, K_{\perp}) = f_{\pi}/2\sqrt{3}, \\ \int_0^1 dx \phi(x, K_{\perp} = 0) &= \sqrt{3}/f_{\pi}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

可求出常数  $A, B$  ( $A' = 16\pi^2 BA$ ). 当  $m = 300 \text{ MeV}$  时,  $A = 1.25, B = 0.578$  (此时  $\langle \xi^2 \rangle_x = 0.37, \langle \xi^4 \rangle_x = 0.18$ ). 分布振幅  $\phi(x, Q^2)$  对  $x$  的分布图形如图 1 所示. 取  $\alpha$

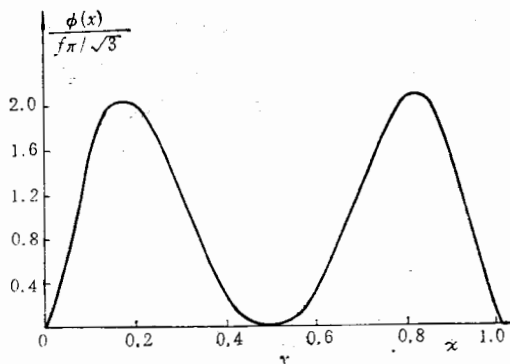
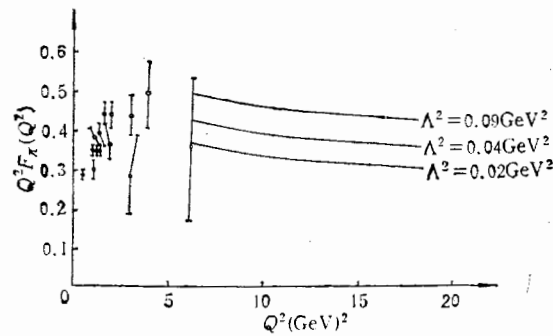


图 1 分布振幅  $\phi(x, Q^2)$  对  $x$  的分布

图2  $\pi$  介子的形状因子

如(5)式,当  $m = 300\text{MeV}$  时对  $F_\pi(Q^2)$  的计算结果如图2(实验数据引自文献[8]).  
取  $m = 300\text{MeV}$ ,  $\Lambda = 200\text{MeV}$ ,  $\alpha_s$  如(5)式,计算(6)–(9)式,得到:

$$\left. \begin{aligned} \text{Br}(\chi_0 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= 0.19\%, \\ \text{Br}(\chi_2 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= 0.04\%. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

这与实验值定性相符.

#### 四、总 结

利用矩求和规则并通过对形状因子和一系列遍举过程的研究,人们认识到  $\pi$  介子的分布振幅  $\phi(x, Q^2)$  在中等  $Q^2$  时与它的渐近行为相比对  $x$  的分布要宽得多,一些作者已在这方面作了尝试. 本文在总结这些文献的基础上,用(12)式所示的分布振幅计算了  $F_\pi(Q^2)$  和  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$ . 这种尝试的分布振幅基本符合了矩求和规则,压低了端点贡献,所得  $F_\pi(Q^2)$  与实验数据相符合,  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$  与实验数据定性相符合. 但是,在  $Q^2$  不大时,  $xy(1-x)(1-y) < \frac{\langle K_1^2 \rangle}{Q^2}$  区域的贡献仍占相当大的比例. 在这样的区域内,  $\alpha_s$  接近于1,因子化是有问题的.

由于形状因子等与  $\pi$  介子相关的遍举过程在中等  $Q^2$  下对  $\pi$  介子价夸克的分布振幅  $\phi(x, Q^2)$  的依赖很大. 因此,在中等  $Q^2$  区域内  $F_\pi(Q^2)$  等的实验结果有助于更准确地确定分布振幅的形式;另一方面,从理论上计算高次矩和更准确地确定矩的数值是进一步确定分布振幅的一个重要研究课题. 为了扩大检验 QCD 和认识强子结构,还必须认真从理论上和实验上分析各种可能的非主导效应(如非微扰效应、高福克态贡献、高次修正等),以便引出正确的结论.

感谢黄涛老师对本文的指导.

#### 参 考 文 献

- [1] G. P. Lepage & S. J. Brodsky, *Phys. Lett.*, **87B**(1979), 359.
- [2] S. J. Brodsky & G. P. Lepage, *Phys. Rev.*, **D24**(1981), 1848; G. P. Lepage & S. J. Brodsky, *Phys. Rev.*, **D22**(1980), 2157.
- [3] V. A. Novitov et al., *Phys. Rep.*, **41C**(1978); V. L. Chernyak & R. A. Zhitnitsky, *Nucl. Phys.*, **B201**(1982),

- 492.
- [ 4 ] M. A. Shifman et al., *Nucl. Phys.*, **B147**(1979), 385; V. L. Chernyak & R. A. Zhitnitsky, *Phys. Rep.*, **112** (1984), 173; Huang T., Wang X. N. & Xiang X. D., *Chinese Phys. Lett.*, **2**(1985), 67.
  - [ 5 ] Xiang X. D., Wang X. N. & Huang T., *Commun. in Theor. Phys.*, **6**(1986), 117.
  - [ 6 ] G. Parisi & R. Petronzio, *Phys. Lett.*, **94B**, (1980), 51.
  - [ 7 ] S. J. Brodsky, T. Huang, G. P. Lepage, *Particles and Fields 2*, Edited by Anton Z. Capri & Abdul N. Kamal (Plenum Publishing Corporation, 1983).
  - [ 8 ] C. J. Bebek et al., *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 25; C. J. Bebek et al., *Phys. Rev.*, **D17**(1978), 1693; C. J. Bebek et al., *Phys. Rev.*, **D14**, (1976), 1936.
  - [ 9 ] Particle Data Group, April 1984 Edition.
  - [ 10 ] Huang Tao, Kong Fan-mei & LUO Ma, *Commun. in Theor. Phys.*, Vol. 5, No. 3(1986), 259.
  - [ 11 ] Wang Xin-nian, Xiang Xiao-dong & Huang Tao, *Commun. in Theor. Phys.*, Vol. 5, No. 2(1986), 123.
  - [ 12 ] S. J. Brodsky, C. Carlson, T. Huang & G. P. Lepage, SLAC-PUB-3559 (1985).
  - [ 13 ] T. Huang, SLAC-PUB-2580(1980), published in the proceedings of the Int. Conf. on High Energy Physics, Madison, Wisc (1980).

## $\pi$ -MESON DISTRIBUTION AMPLITUDE AND RELATIVE EXCLUSIVE PROCESSES

BAI ZHANWU

(Southwest Jiao-song University, Sichuan)

### ABSTRACT

The behavior of the  $\pi$ -meson distribution amplitude is discussed through a phenomenological analysis of some exclusive processes in QCD and on the basis of QCD sum rule.  $F\pi(Q^2)$  and  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$  are calculated by using a trial distribution amplitude. The result of  $F\pi(Q^2)$  is compatible with experimental data,  $\text{Br}(\chi \rightarrow 2\pi)$  is of the same order as experimental data.