第12卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 12, No. 4
1988年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1988

具有角动量的激子态密度公式

陆 中 道
（中国原子能科学研究院，北京）

摘 要

本文根据统计理论推导了包含角动量的激子态密度公式．公式中的自旋切割因子的平方正比于激子数和原子核的转动惯量． 当激子系统趋近统计平衡时，该公式就自动过渡到具有角动量的费米气能级密度公式．

一、引 言

经过人们多年的工作，建立在激子模型基础上的预平衡核反应统计理论已能较好地解释和计算核反应中的能谱和角分布．应用和原子核能级密度公式相统一的激子态密度公式可使蒸发模型与激子模型统一起来，截面可用统一的激子模型公式计算[1,2]． 激子模型的进一步发展就得考虑角动量效应，这在激发能比较低时比较重要． 同时要考虑激子模型和 Hauser-Feshbach 理论的统一问题． 为此必须有一个正确的包含角动量的激子态密度公式． Reffo[3] 曾提出过一个包含角动量的激子态密度公式，但他的公式不能和原子核能级密度公式自然地联系起来．本文根据统计理论，推导了一个包含角动量的激子态密度公式．公式中的与角动量有关的因子为 $\frac{2J+1}{\sqrt{8\pi\sigma_n^3}}e^{-\frac{(J+\frac{1}{2})^2}{2\sigma_n^2}}$． σ_n^2 正比于激子数，在准粒子近似下[4]，它也正比于原子核的转动惯量．更重要的是，当激子系统趋近统计平衡时，该公式就自动过渡到具有角动量的费米气能级密度公式，其中包括自旋切割因子自动过渡到包含角动量的费米气能级密度公式中的自旋切割因子．

本文第二部分是公式推导，第三部分是讨论和小结．

二、公 式 推 导

在费米气体模型下，考虑一个由 p 个激发核子和 h 个空穴组成的激子系统（激子数为 $n=p+h$），其总能量为

$$E=\sum_{i=1}^{p}\varepsilon_{p_i}-\sum_{i=1}^{h}\varepsilon_{h_i}, \tag{1}$$

本文1986年9月29日收到．

总角动量在 Z 轴上的投影为

$$M = \sum_{i=1}^{p} m_{p_i} - \sum_{i=1}^{h} m_{h_i}. \tag{2}$$

这里 $\varepsilon_p(\varepsilon_h)$ 和 $m_p(m_h)$ 分别表示单粒子(空穴)的能量和角动量在 z 轴上的投影.

激子态密度可在满足上述两个条件下,按通常的统计理论方法推导出来.

激子系统的配分函数为

$$Z_{ph}(\beta, \gamma) = \sum_{k} e^{-\beta E_k + \gamma M_k}. \tag{3}$$

k 表示激子系统的状态,求和扩展到所有可能的状态. β 和 γ 是两个 Lagrange 乘子. 在独立粒子假设下,忽略 Pauli 原理,配分函数可近似地表示成

$$\begin{aligned}\mathscr{Z}_{ph}(\beta, \gamma) &= \frac{1}{p!}\left[\sum_{\varepsilon_p} \exp(-\beta\varepsilon_p + \gamma m_p)\right]^p \cdot \frac{1}{h!}\left[\sum_{\varepsilon_h} \exp(\beta\varepsilon_h - \gamma m_h)\right]^h \\ &= \mathscr{Z}_p(\beta, \gamma)\mathscr{Z}_h(\beta, \gamma).\end{aligned} \tag{4}$$

其中 $\mathscr{Z}_p(\beta, \gamma)$ 为费米面上面的激发核子的配分函数, $\mathscr{Z}_h(\beta, \gamma)$ 为费米面下面空穴系统的配分函数. 引入单粒子能级连续近似,则

$$\mathscr{Z}_p(\beta, \gamma) = \frac{1}{p!}\left[\iint d\varepsilon_p dm_p g(\varepsilon_p, m_p) e^{-\beta\varepsilon_p + \gamma m_p}\right]^p. \tag{5}$$

由于 γ 可看作小量,上式可按 γ 展开:

$$\mathscr{Z}_p(\beta, \gamma) = \frac{1}{p!}\int_{\varepsilon_F}^{\infty} d\varepsilon_p g(\varepsilon_p) e^{-\beta\varepsilon_p}\left(1 + \frac{\langle m_p^2\rangle}{2!}\gamma^2 + \frac{\langle m_p^4\rangle}{4!}\gamma^4 + \cdots\right). \tag{6}$$

这里已应用了 $g(\varepsilon_p, -m_p) = g(\varepsilon_p, m_p)$ 这一条件,其中

$$g(\varepsilon_p)\langle m_p^n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon_p, m_p) m_p^n dm_p, \quad n = 0, 2, 4\cdots \tag{7}$$

公式 (6) 的积分主要来自费米能附近的贡献, $g(\varepsilon_p)$ 随单粒子能量变化非常缓慢, 因此 $g(\varepsilon_p)$ 可近似取费米能附近的值,即 $g(\varepsilon_p) \approx g(\varepsilon_F) = g_0$, 则(6)式经积分后得

$$\mathscr{Z}_p(\beta, \gamma) = \frac{g_0^p}{p!}\frac{e^{-\beta p\varepsilon_F}}{\beta^p}\left[1 + \frac{p\langle m_p^2\rangle}{2}\gamma^2 + \cdots\right]. \tag{8}$$

同样,费米面下空穴系统的配分函数为

$$\mathscr{Z}_h(\beta, \gamma) = \frac{g_0^h}{h!}\frac{e^{\beta h\varepsilon_F}}{\beta^h}\left[1 + \frac{h\langle m_h^2\rangle}{2}\gamma^2 + \cdots\right]. \tag{9}$$

由(8)和(9)得激子系统的配分函数为

$$\mathscr{Z}_{ph}(\beta, \gamma) = \frac{g_0^n}{p!h!}\frac{e^{-(p-h)\beta\varepsilon_F}}{\beta^n}\left[1 + \frac{\gamma^2}{2}(p\langle m_p^2\rangle + h\langle m_h^2\rangle) + \cdots\right]. \tag{10}$$

为书写简单起见,把 $\mathscr{Z}_{ph}(\beta, \gamma)$ 写成 $\mathscr{Z}$, 其对数表达式为

$$\ln\mathscr{Z} = \ln\left(\frac{g_0^n}{p!h!}\right) - n\ln\beta - (p-h)\beta\varepsilon_F + \frac{\gamma^2}{2}(p\langle m_p^2\rangle + h\langle m_h^2\rangle) + O(\gamma^4). \tag{11}$$

有了配分函数后,激子系统的态密度就可通过配分函数的逆 Laplace 变换求出:

$$\rho_{p,h}(E, M) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\iint_{-i\infty}^{i\infty} d\beta d\gamma \mathscr{Z}_{ph}(\beta, \gamma) e^{\beta E - \gamma M}. \tag{12}$$

在鞍点近似下，上式积分后得

$$\rho_{p.h}(E, M) = \frac{e^{S_{ph}}}{2\pi\sqrt{D_{ph}}}. \tag{13}$$

其中 S_{ph} 为激子系统的熵:

$$S_{ph} = \ln \mathscr{Z} + \beta E - \gamma M, \tag{14}$$

分母中的D因子为

$$D_{ph} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln \mathscr{Z}}{\partial \beta^2} & \dfrac{\partial^2 \ln \mathscr{Z}}{\partial \beta \partial \gamma} \\ \dfrac{\partial^2 \ln \mathscr{Z}}{\partial \beta \partial \gamma} & \dfrac{\partial^2 \ln \mathscr{Z}}{\partial \gamma^2} \end{vmatrix}. \tag{15}$$

系统总能量E和总角动量的Z分量由鞍点方程确定:

$$\begin{cases} E = -\dfrac{\partial \ln \mathscr{Z}}{\partial \beta} \\ M = \dfrac{\partial \ln \mathscr{Z}}{\partial \gamma}. \end{cases} \tag{16}$$

由(11)式可得 $E = \frac{n}{\beta} + (p-h)\varepsilon_F$. 右边第二项是由初始时费米面上面的核子数和费米面下面的空穴数不等引起. 令 $E^* = E - (p-h)\varepsilon_F$, 则

$$\beta = \frac{n}{E^*} \tag{17}$$

如 $\frac{\gamma^2}{2}(p\langle m_p^2\rangle + h\langle m_h^2\rangle) \ll 1$, 则可认为(10)式右边的展开式收敛很快, $O(\gamma^4)$ 可以忽略. 由(11)式和(16)式中的第二式得

$$\gamma = \frac{M}{p\langle m_p^2\rangle + h\langle m_h^2\rangle}. \tag{18}$$

求得了β和γ以后，就可求得熵为

$$S_{ph} = \ln\left(\frac{g_0^n}{p!\,h!}\right) - n\ln\left(\frac{n}{E^*}\right) + n - \frac{M^2}{2(p\langle m_p^2\rangle + h\langle m_h^2\rangle)}, \tag{19}$$

D因子为

$$D_{ph} = \frac{E^{*2}}{n}(p\langle m_p^2\rangle + h\langle m_h^2\rangle). \tag{20}$$

$\langle m_p^2\rangle$ 和 $\langle m_h^2\rangle$ 实际上分别表示费米面上面的激发核子和费米面下面空穴的角动量Z分量的弥散宽度. 激子系统总的角动量的Z分量的弥散宽度为这两者之和: $\langle m^2\rangle = \langle m_p^2\rangle + \langle m_h^2\rangle$. 假设 $\langle m_p^2\rangle = \langle m_h^2\rangle$, 则激子系统的态密度为

$$\rho_{ph}(E, M) = \frac{g_0^n E^{*n-1}}{2\pi p!\,h!\,n^n}\frac{e^{n-\frac{M^2}{n\langle m^2\rangle}}}{\sqrt{\langle m^2\rangle/2}}. \tag{21}$$

利用 Stirling 公式 $m! = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m$, 并令 $\sigma_n^2 = \frac{n}{2}\langle m^2\rangle$, 则上式进一步写成

$$\rho_{ph}(E, M) = \rho_{ph}(E)\frac{e^{-\frac{M^2}{2\sigma_n^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}, \tag{22}$$

其中

$$\rho_{ph}(E) = \frac{g_0(g_0E^*)^{n-1}}{p!h!(n-1)!} \tag{23}$$

为 Ericson 公式[5].

公式(22)是以角动量的 z 分量表示的激子态密度公式．根据

$$\rho_{ph}(E, J) = -\left.\frac{\partial\rho_{ph}(E, M)}{\partial M}\right|_{M=J+\frac{1}{2}},$$

就得到用角动量表示的激子态密度公式：

$$\rho_{ph}(E, J) = \rho_{ph}(E)\frac{(2J+1)e^{-\frac{(J+\frac{1}{2})^2}{2\sigma_n^2}}}{\sqrt{8\pi}\sigma_n^3}. \tag{24}$$

公式(24)在形式上和含有角动量的费米气能级密度公式一样，但如不作参数调整，当激子系统趋近统计平衡时，此式不能导致能级密度的结果． 关于如何处理将在第三部分中讨论．

在准经典近似下[4]，$\langle m^2\rangle$ 可由原子核的转动惯量 $\mathscr{I}$ 表示：

$$\langle m^2\rangle = \frac{\mathscr{I}}{g_0\hbar^2}, \tag{25}$$

而自旋切割因子的平方为

$$\sigma_n^2 = \frac{n}{2}\frac{\mathscr{I}}{g_0\hbar^2}. \tag{26}$$

三、讨论和小结

公式(24)在 $\bar{n} = \sqrt{2g_0E^*}$ 附近有极大值．而当激子数接近该值时，激子系统也趋近统计平衡．因此激子系统的统计平衡态就是激子系统的最可几状态．我们可以设想和要求，在该态附近激子态密度公式将过渡到原子核能级密度公式．为此，正象作者在[1]或[2]中所作的那样，在公式(24)中，用有效单粒子能级密度

$$g_e = \kappa g_0, \quad \kappa = \frac{\pi^2}{12}, \tag{27}$$

代替 g_0，则公式 (24) 的极大值在 $\bar{n} = \sqrt{2g_eE^*} = at\left(a = \frac{\pi^2}{6}g_0 = 2g_e\right.$ 为能级密度参数，$\left.t = \sqrt{E^*/a}\right.$ 为核温$\Big)$ 附近．当激子系统的激子数接近 $\bar{n}$ 时，$\rho_{ph}(E)$ 就自动过渡到费米气能级密度公式．而 $\sigma_n^2 = t\dfrac{\mathscr{I}}{\hbar^2}$，这就是费米气能级密度公式中的自旋切割因子．因此，应用有效单粒子能级密度(27)式，则当激子系统趋近统计平衡时，公式(24)就自动过渡到

包含角动量的费米气能级密度公式. Reffo[3] 曾提出过一个包含角动量的激子态密度公式,但他的公式不能和能级密度公式自然地联系起来.

现在讨论一下 β 和 γ 的意义. 根据温度的定义,激子系统的温度为 $t_n \equiv \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)^{-1}$. 由(14)式可得 $t_n = \beta^{-1} = E^*/n$. 由此可见 β 的物理意义: β 的倒数就是激子系统的温度. 而激子系统的温度表示每个激子的平均能量. 开始时,激子系统由少数几个激子组成,因此激子系统的温度比较高. 随着激子数的增加,温度逐渐降低. 当激子系统趋近于统计平衡 ($n = \bar{n}$) 时,它的温度就是通常的核温 $t = \sqrt{E^*/a}$. 至于 γ, 由(18)式可得, $\gamma M = \frac{M^2}{\sigma_n^2} = 4g_e \frac{E_{\rm rot}}{n}$ $\left(E_{\rm rot} = \frac{(M\hbar)^2}{2\mathscr{I}}\right.$ 为原子核绕 z 轴转动的转动能$\left.\right)$. 因此 γM 是和每个激子的平均转动能相联系的量.

至此,我们可把公式作一下总结.

包含角动量的激子态密度公式为

$$\rho_{ph}(E, J) = \rho_{ph}(E) \frac{(2J+1)e^{-\frac{(J+\frac{1}{2})^2}{2\sigma_n^2}}}{\sqrt{8\pi}\sigma_n^3}, \tag{28}$$

其中 $\rho_{ph}(E)$ 为和费米气能级密度公式相统一的激子态密度公式[1]:

$$\rho_{ph}(E) = \frac{g_0(g_e E^*)^{n-1}}{p!h!(n-1)!}, \tag{29}$$

E^* 为有效激发能. g_e 为有效单粒子能级密度

$$g_e = \kappa g_0, \quad \kappa = \frac{\pi^2}{12}, \tag{30}$$

g_0 由能级密度参数 a 求出

$$a = \frac{\pi^2}{6} g_0. \tag{31}$$

σ_n 为自旋切割因子

$$\sigma_n^2 = \frac{\mathscr{I}}{\hbar^2} \frac{t^2}{t_n}, \tag{32}$$

其中

$$t_n = \frac{E^*}{n} \tag{33}$$

为激子系统的温度. 当激子系统趋近统计平衡时, 它就是核温 $t = \sqrt{E^*/a}$. 如利用 Cameron[6] 的关系式 $\sigma^2 = 0.0888aA^{2/3}t$, 则(32)式可写为

$$\sigma_n^2 = 0.0888aA^{2/3}t^2/t_n = 0.0888A^{2/3}n. \tag{34}$$

最后讨论一下(10)式合理展开的条件. 在公式(10)的级数展开中,我们用了条件 $\frac{\gamma^2}{4} n\langle m^2\rangle \ll 1$. 由于 $\frac{\gamma^2}{4} n\langle m^2\rangle = \frac{M^2}{2\sigma_n^2}$, 因此要求角动量的值比它的弥散宽度小. 我们可根据(34)式估计一下弥散宽度的值. 对 $A = 100$ 的中重核, $\sigma_n^2 = 1.9n$, 因此即使取 $n = 2$, 也总有几个角动量值能满足这一条件. 实际上,这一条件对实际应用激子态密度

公式并不产生太大影响，因为公式(28)的值随角动量的增加而迅速减小。

作者感谢与卓益忠同志的有益讨论。

参　考　文　献

[1] Lu Zhongdao, Improved Exciton State Density, 待发表.
[2] 陆中道，原子核物理 $^{238}U^{235}U$ 和 ^{93}Nb 的能谱和双微分截面计算，待发表.
[3] G. Reffo and M. Herman, *Lett. al Nuovo Cim.*, **34**, (1982), 261.
[4] A. Bohr, B. R. Mottolson, *Nuclear Strcture*, Vol. I, New York, 1969, p289.
[5] T. Ericson, *adv. in Phys.*, **9**, (1960), 425.
[6] A. Gilbert and A. G. Cameron, *Can. J. Phys.*, **43**, (1965), 1446.

EXCITON STATE DENSITY WITH ANGULAR MOMENTUM

Lu Zhongdao

(Institute of Atomic Energy, Beijing)

Abstract

An exciton state density with angular momentum is derived in this paper based on statistical theory. The square of the spin-cut factor σ_m^2 is proportional to the exciton number and the nuclear moment of inertia. When the exciton system closes to the statistical equilibrium, this exciton state density automatically approaches to the Fermi-gas nuclear level density with angular momentum.