

快报

# Skyrme 模型中的 Goldberger-Treiman 关系和核子的强作用半径

李炳安

(中国科学院高能物理研究所, 中国科学技术大学基础物理中心)

### 摘要

在这篇文章中证明, 即使在  $m_\pi \approx 0$  的情况下, 在 Skyrme 模型中仍可得到 Goldberger-Treiman 关系, 核子的强作用半径  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  被计算出来为 0.8fm.

非线性  $\sigma$  模型给出了用流代数得到的软  $\pi$  定理. 在六十年代初 Skyrme 在非线性  $\sigma$  模型的拉氏量中引入  $\lambda$  称之为 Skyrme 项的新作用, 由此得到稳定的孤立子解. Skyrme 指出, 在这个新拉氏量中存在一个守恒的拓扑流, 并把拓扑荷解释为重子数<sup>[1]</sup>. 而重子数为 1 的孤立子在量子化后为费米子-核子和  $\Delta$ <sup>[2]</sup>. 在文献[3]中作者们用这个模型计算了核子和  $\Delta$  的静止性质, 得到与实验较符合的结果.

在文献[3]中, 作者们发现在  $m_\pi = 0$  的情况在 Skyrme 模型中可得到 Goldberger-Treiman 关系, 可是在  $m_\pi \approx 0$  时, 得不到这一关系<sup>[4]</sup>. 在这篇短文中证明后者是不正确的, Goldberger-Treiman 关系在  $m_\pi = 0$  和  $m_\pi \approx 0$  两种情形中都可以得到. 此外, 对核子的强作用物质的分布及半径也进行了计算.

按照文献[4], Skyrme 模型的拉氏量为

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^+ + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [\partial_\mu U U^+, \partial_\nu U U^+]^2 \\ & + \frac{1}{8} m_\pi^2 F_\pi^2 (\text{Tr} U - 2) \end{aligned} \quad (1)$$

(在这篇短文中, 除非特别声明, 都采用文献[4]中的符号), 在(1)中

$$\begin{aligned} U &= A(t) U_0 A^\dagger(t) \\ A(t) &= a_0(t) + i\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}(t), \quad a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1 \\ U_0 &= \exp\{iF(r)\hat{r} \cdot \boldsymbol{\tau}\} \end{aligned} \quad (2)$$

由文献[3], 轴矢量流的空间分量可以写为

$$\begin{aligned} A_i^a(x) = & \left\{ \hat{x}_i \hat{x}_c F' \left( \frac{F_\pi^2}{4} + \frac{2}{e^2 r^2} \sin^2 F \right) \right. \\ & \left. + (\delta_{il} - \hat{x}_i \hat{x}_l) \frac{1}{2r} \sin 2F \left[ \frac{F_\pi^2}{4} + \frac{1}{e^2} \left( F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F \right) \right] \right\} \\ & \cdot \text{Tr} \tau_l A^{-1} \tau^a A \end{aligned} \quad (3)$$

第 3

利用

按照

$\pi^*(x)$

实际

与(2)

这里  
边的

(9)式  
(9)式

其中

比较(

将(11

这就

利用  $F(r)$  所满足的运动方程<sup>[4]</sup> 由(3)式得

$$\partial_i A_i^a = \frac{1}{4} m_\pi^2 F_\pi^2 \hat{x}_i \text{Tr } \tau_i A^{-1} \tau^a A \quad (4)$$

按照 PCAC 有,

$$\partial_i A_i^a = m_\pi^2 F_\pi \pi^a(x) \quad (5)$$

$\pi^a(x)$  是  $\pi$  介子场, 与(4)式比较得

$$\pi^a(x) = \frac{1}{4} F_\pi \sin F \hat{x}_i \text{Tr } \tau_i A^{-1} \tau^a A \quad (6)$$

实际上将  $U$  写为

$$U = \exp \left\{ \frac{2i}{F_\pi} \boldsymbol{\pi}(x) \cdot \boldsymbol{\tau} \right\} \quad (7)$$

得到

与(2)式比较即可得(6)式, 说明从拉氏量(1)可自动得到 PCAC.

在 Skyrme 模型中,  $\pi$ -N 相互作用的形状因子定义为

$$\langle N' | (\nabla^2 - m_\pi^2) \pi^a | N \rangle = i g_{\pi NN} (\mathbf{p}'^2) \bar{U}(\mathbf{p}') \boldsymbol{\tau}^a \boldsymbol{\gamma}_5 u(\mathbf{p}) \quad (8)$$

这里  $q^2 = (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2$ ,  $u(\mathbf{p})$  是核子的 Dirac 波函数和同位旋波函数的积. (8) 式中左边的矩阵元定义为

$$\langle N' | (\nabla^2 - m_\pi^2) \pi^a | N \rangle = \int d^3 \times e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} (\nabla^2 - m_\pi^2) \frac{F_\pi}{4} \sin F(r) \hat{x}_i \cdot \langle \text{Tr } \tau_i A^t \tau^a A \rangle \quad (9)$$

(9) 式中  $\langle \text{Tr } \tau_i A^t \tau^a A \rangle$  是  $\text{Tr } \tau_i A^t \tau^a A$  在初末态核子集体坐标中的矩阵元. 经过计算,

(9) 式可写为

$$\langle N' | (\nabla^2 - m_\pi^2) \pi^a | N \rangle = -\frac{i}{3} F_\pi \partial / \partial q^2 F(q^2) q_i \langle \sigma_i \tau^a \rangle \quad (10)$$

其中

$$F(q^2) = \int d^3 \times e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) - \frac{2}{r^2} - m_\pi^2 \right\} \sin F(r) \quad (11)$$

比较(8)式和(10)式得

$$(1) \quad g_{\pi NN}(q^2) = \frac{2m_N}{3} F_\pi F'(q^2) \quad (12)$$

将(11)式代入(12)式中, 得  $\pi$ -N 耦合常数为

$$(2) \quad g_{\pi NN}(0) = -\frac{4\pi}{9} m_N F_\pi \left\{ r^3 F'(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} - r^2 F(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} - m_\pi^2 \int_0^\infty r^3 \sin F(r) dr \right\} \quad (13)$$

在  $m_\pi = 0$  时,  $F(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{B}{r^2}$ <sup>[3]</sup>, 由(13)式得

$$g_{\pi NN} = g_{\pi NN}(0) = \frac{4\pi}{3} m_N F_\pi B \quad (14)$$

这就是文献 [3] 中用  $\pi^a(x)$  的渐近条件所得到的结果. 在  $m_\pi \neq 0$  时,  $F(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow$

$\frac{m_\pi}{r}$ <sup>[4]</sup>, 由(13)式得

$$(3) \quad g_{\pi NN} = \frac{4\pi}{9} m_\pi^2 m_N F_\pi \int_0^\infty r^3 \sin F(r) dr \quad (15)$$

非线性  $\sigma$   
 Skyrme 指  
 重子数为  
 计算了核

Goldberger-  
 是不正确  
 此外, 对

这个表达式与[4]中的结果是不同的。下面的讨论将指出为什么在  $m_\pi \approx 0$  时不能像文献[4]那样用  $\langle \pi^a(x) \rangle$  的渐近行为去确定  $g_{\pi NN}$ 。由(10)式得

$$\langle \pi^a(x) \rangle = \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2m_N} \int d^3q e^{iq \cdot x} \frac{1}{q^2 + m_\pi^2} g_{\pi NN}(q^2) q_j \langle \sigma_j \tau^a \rangle \quad (16)$$

(16)式中  $\langle \pi^a(x) \rangle$  初末态核子取集体坐标波函数, 而  $\langle \sigma_j \tau^a \rangle$  中则取核子的自旋及同位旋波函数。由(16)式得

$$\langle \pi^a(x) \rangle_{r \rightarrow \infty} = -\frac{m_\pi}{8\pi m_N} \langle \sigma_j \tau^a \rangle \frac{x_j}{r^2} e^{-m_\pi r} \int d^3x' e^{m_\pi q \cdot x'} \tilde{g}_{\pi NN}(x') \quad (17)$$

其中

$$\tilde{g}_{\pi NN}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{iq \cdot x} g_{\pi NN}(q^2) d^3q \quad (18)$$

注意, 我们有下面的表达式

$$g_{\pi NN} = \int d^3x \tilde{g}_{\pi NN}(x) \quad (19)$$

在文献[4]中, (17)式积分中的指数因子  $e^{m_\pi q \cdot x}$  被丢掉了, 因而导致了不正确的结果。

按照文献[5]中的结果, 在  $m_\pi \approx 0$  时有

$$g_A = \frac{2\pi}{9} m_\pi^2 F_\pi^2 \int_0^\infty r^3 \sin F(r) dr \quad (20)$$

比较(15)和(20)式得 Goldberger-Treiman 关系

$$g_A = \frac{F_\pi g_{\pi NN}}{2m_N} \quad (21)$$

与[4]的结论不同, 在  $m_\pi \approx 0$  时, 在 Skyrme 模型中仍可得到 Goldberger-Treiman 关系。原因上面已经指出。

核子的强作用半径平方的平均值  $\langle r^2 \rangle_s$  定义为

$$g_{\pi NN}(q^2) = g_{\pi NN} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle_s q^2 + \dots \right\} \quad (22)$$

用(11)和(12)式得

$$\langle r^2 \rangle_s = \frac{3}{5} \frac{1}{\beta^2 e^2 F_\pi^2} \left\{ \beta^2 \frac{\int_0^\infty \tilde{r}^5 \sin F d\tilde{r}}{\int_0^\infty \tilde{r}^3 \sin F d\tilde{r}} - 10 \right\} \quad (23)$$

用[4]定出的  $e$ 、 $F_\pi$  和  $\beta$  值算出

$$\langle r^2 \rangle_s^{1/2} = 0.8 \text{ fm} \quad (24)$$

将(12)式代入(18)式中经过推导得

$$\begin{aligned} \tilde{g}(r) &= \frac{1}{3} m_N F_\pi^2 e \left\{ \cos F(\tilde{r}) \frac{dF(\tilde{r})}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \sin F(\tilde{r}) \right\} \quad m_\pi = 0 \\ \tilde{g}(r) &= \frac{1}{3} m_N F_\pi^2 e \left\{ \cos F(\tilde{r}) \frac{dF(\tilde{r})}{d\tilde{r}} + \frac{2}{\tilde{r}} \sin F(\tilde{r}) \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 \int_0^\infty \sin F(\tilde{r}') d\tilde{r}' \right\} \quad m_\pi \approx 0 \end{aligned} \quad (25)$$

定义  $G(r) = \frac{3}{m_N F_\pi^2 e} \tilde{g}(r)$ , 将  $m_\pi = 0$  和  $m_\pi \approx 0$  两种情形中的  $G(r)$  画在图 1 中。

寸不能像文

(16)

目旋及同位

(17)

(18)

(19)

结果.

(20)

(21)

ian 关系.

(22)

(23)

(24)

(25)

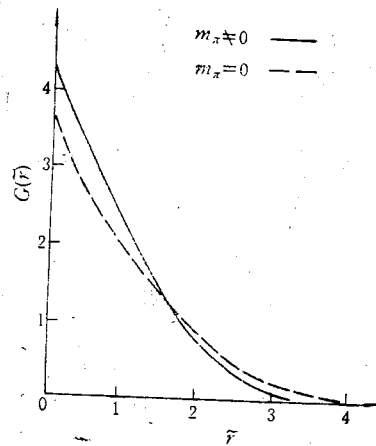


图 1

在这篇文章中我们证明在  $m_\pi \neq 0$  时仍可从 Skyrme 模型中得到 Goldberger-Treiman 关系. 核子的强作用半径也可以从  $m_\pi \neq 0$  的 Skyrme 模型中算出 ( $m_\pi = 0$  时,  $\langle r^2 \rangle$  是发散的), 并得到核子的强作用分布.

本工作由国家自然科学基金支持, 项目编号 1860170.

### 参 考 文 献

- [1] T. H. R. Skyrme, *Proc. Roy. Soc.*, **A260**(1961), 127.  
N. K. Pak and H. C. Tze, *Ann. Phys.*, **117**(1979), 164.  
A. P. Balachandran, V. P. Nair, A. G. Rajeev, and A. Stern, *Phys. Rev.*, **D27**(1983), 1153.
- [2] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B223**(1983), 433.
- [3] G. Adkins, C. Nappi, and E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B228**(1983), 552.
- [4] G. Adkins and C. Nappi, *Nucl. Phys.*, **B233**(1984), 109.
- [5] Bing-an Li and Qi-xing Shen, *Commun. in Theor. Phys.*, **6**(1986), 65.

## GOLDBERGER-TREIMAN RELATION AND NUCLEON'S MEAN SQUARE RADIUS OF STRONG INTERACTION IN THE SKYRME MODEL

BING-AN LI

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing, China and Fundamental  
Physics Center, Univ. of Science and Technology of China, Hefei, Anhui, China)

### ABSTRACT

In this letter it is shown that even in  $m_\pi \neq 0$  case the Goldberger-Treiman relation is still valid in the Skyrme model. The mean square radius of strong interaction of nucleon  $\langle r^2 \rangle^{1/2}$  is computed in the Skyrme model.