第 10 卷 第 5 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 10, No. 5
1986 年 9 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Sept., 1986

超重费米子——$SO(10)$ 磁单极零能束缚态问题

祁 永 昌
(山 西 大 学)

摘　　要

本文讨论了 GUT 中超重费米子——$SO(10)$磁单极零能束缚态的问题，发现此零能束缚态可能存在；由此推得，在超重费米子情况下，可能存在 Rubakov 效应.

一、引　言

最近几年，人们对费米子——磁单极的零能束缚态做了不少讨论[1-3]，对 Rubakov 效应表现了极大的兴趣. 众所周知，Rubakov 效应依赖于费米子在磁单极外场中 Green 函数的渐近行为，而这种渐近行为又依赖于费米子在磁单极外场中的零能束缚态的存在. 人们曾证明，对于 $SU(5)$[1,2] 和 $SO(10)$[3] 磁单极，这种零能束缚态是不存在的.

有人曾指出[4]，超重费米子在早期宇宙中，对于引起 CP 对称的破坏和重子不对称性，起了重要作用. 因此，超重费米子的性质，理应引起人们的重视. 超重费米子在磁单极外场中的行为如何？作者对于在 $SO(10)$ 磁单极场中的超重费米子作了考查，结果发现，文献[3]中不存在零能束缚态解的条件不再成立. 因此，超重费米子——$SO(10)$ 磁单极零能束缚态是可能存在的；相应的，由超重费米子组成的重子，在磁单极催化下衰变的 Rubakov 效应，也可能存在.

二、在 $SO(10)$ 磁单极外场中的超重费米子运动方程

在 $SO(10)$ GUT 模型中[3]，有两个 Higgs 多重态，其真空期望值使 $SO(10)$ 群自发破缺到 $SU(3)_c \times U(1)_{em}$. 一个 Higgs 多重态 Φ 处于 $SO(10)$ 的 $\underline{45}$ 维伴随表示，另一个 Higgs 多重态 H 处于 $SO(10)$ 的 $\underline{10}$ 维表示. 它们的真空期望值：

本文 1985 年 7 月 18 日收到.

$$\langle\Phi\rangle = a\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} &&&&& 2 &&&& \\ &&&&& & 2 &&& \\ &&&&& && 2 && \\ &&&&& &&& -3 & \\ &&&&& &&&& -3 \\ \hline -2 &&&& &&&&& \\ & -2 &&& &&&&& \\ && -2 && &&&&& \\ &&& 3 & &&&&& \\ &&&& 3 &&&&& \end{array}\right], \quad \langle H\rangle = b\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

将 $SU(2)$ 嵌入到 $SO(10)$ 中，考虑 $\underline{10}\longrightarrow 2(\underline{2})+6(\underline{1})$，其生成元

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&& 0 &&& \\ &&&& & 0 && \\ &&&& && \tau_1 & \\ &&&& &&& 0 \\ \hline 0 &&&& &&& \\ & 0 &&& &&& \\ && -\tau_1 && &&& \\ &&& 0 & &&& \end{array}\right], \quad T_2 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 &&&& &&& \\ & 0 &&& &&& \\ && \tau_2 && &&& \\ &&& 0 & &&& \\ \hline &&&& 0 &&& \\ &&&& & 0 && \\ &&&& && \tau_2 & \\ &&&& &&& 0 \end{array}\right],$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{cccc|cccc} &&&& 0 &&& \\ &&&& & 0 && \\ &&&& && \tau_3 & \\ &&&& &&& 0 \\ \hline 0 &&&& &&& \\ & 0 &&& &&& \\ && -\tau_3 && &&& \\ &&& 0 & &&& \end{array}\right]. \tag{2}$$

其中 $\tau_i(i=1,2,3)$ 为同位旋 Pauli 矩阵.

系统的拉格朗日密度

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) + \mathrm{Tr}(\mathscr{D}_\mu\Phi)^2 + |D_\mu H|^2 - V(\Phi, H).$$

其中:

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu, W_\nu],$$

$$W_\mu = \frac{1}{2}W_\mu^{ij}T^{ij},\quad W^{ij} = -W^{ji},\quad i, j = 1, 2, \cdots, 10.$$

$$\mathscr{D}_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + ig[W_\mu, \Phi],\quad D_\mu H = \partial_\mu H + igW_\mu H. \tag{3}$$

球对称的、在 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的同时反演下不变的场位形的普遍形式是:

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{g}\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 &&&& \phi_1(r) &&& \\ & 0 &&& & \phi_1(r) && \\ && \phi_3(r)(\hat{y}\tau_2) && && \phi_2(r)+\phi_3(r)[\hat{x}\tau_1+\hat{z}\tau_3] & \\ &&& 0 & &&& -2[\phi_1(r)+\phi_2(r)] \\ \hline -\phi_1(r) &&&& 0 &&& \\ & -\phi_1(r) &&& & 0 && \\ && -[\phi_2(r)+\phi_3(r)(\hat{x}\tau_1+\hat{z}\tau_3)] && && \phi_3(r)(\hat{y}\tau_2) & \\ &&& 2[\phi_1(r)+\phi_2(r)] & &&& 0 \end{array}\right],$$

$$H(\boldsymbol{r})=\frac{1}{g}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\h(r)\\0\\0\\0\\0\\h(r)\end{bmatrix},\qquad W_i(\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{r})_i(K(r)-1)/gr. \tag{4}$$

其中 $K(r)$、$\phi_j(r)$ $(j=1,2,3)$ 和 $h(r)$ 都是实函数。$\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 分别为 $\boldsymbol{r}$ 的单位矢量 $\hat{r}$ 在 x、y、z 方向的投影。在球坐标中：

$$\hat{x}=\sin\theta\cos\varphi,\quad \hat{y}=\sin\theta\sin\varphi,\quad \hat{z}=\cos\theta.$$

沿 z 方向，Φ 和 H 在无穷远处分别趋于它们的真空期望值 $\langle\Phi\rangle$ 和 $\langle H\rangle$。由此可得：

$$\begin{aligned}&\phi_1(r)\to 2ag,\quad \phi_2(r)\to-\frac{1}{2}ag,\qquad \phi_3(r)\to\frac{5}{2}ag,\\&h(r)\to bg,\quad K(r)\to\exp(-cr),\quad (r\to\infty).\end{aligned}\tag{5}$$

超重费米子场：$\Lambda_{L(R)}$ 为 $\underline{10}$ 维表示。

$$\Lambda_{L(R)}=\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\E\\N\\Q_1^c\\Q_2^c\\Q_3^c\\E^c\\N^c\end{bmatrix}_{L(R)}. \tag{6}$$

超重费米子场和 Higgs 场的 Yukawa 耦合为：

$$\mathscr{L}_{\text{Yukawa}}=G\tilde{\Lambda}_L^c\Phi\Lambda_L+h.c. \tag{7}$$

其中 Λ_L 是左手场，Λ_L^c 是右手场，“$\sim$”表示转置。

由此容易得出超重费米子的运动方程：

$$\begin{cases}\bar{\sigma}_\mu\mathscr{D}_\mu\Lambda_R-G\Phi(\boldsymbol{r})\Lambda_L=0\\ \sigma_\mu\mathscr{D}_\mu\Lambda_L+G\Phi(\boldsymbol{r})\Lambda_R=0\end{cases}\tag{8}$$

其中

$$\begin{cases}\sigma_\mu=(\mathbf{1},\boldsymbol{\sigma}),\quad \bar{\sigma}_\mu=(\mathbf{1},-\boldsymbol{\sigma}),\\ \mathscr{D}_\mu\Lambda=\partial_\mu\Lambda-igW_\mu\Lambda,\\ W_i(\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{T}\times\hat{r})_i(K(r)-1)/gr=\varepsilon_{ijk}(T_j\hat{r}_k)(K(r)-1)/gr,\\ W_0(\boldsymbol{r})=0.\end{cases}\tag{9}$$

(6)式中的 $Q_i(i=1,2,3)$ 及 E、N 以及其电荷共轭，为二分量 Weyl 旋量，(8)式为二分量 Weyl 方程。

在此，我们只讨论稳定的磁单极与超重费米子的零能束缚态，可设超重费米子场与时间无关。由(2)、(8)、(9)可得：

$$\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla - i[(K(r)-1)/r]\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{T}\times\hat{r})\}\Lambda_{R(L)} + G\Phi(\boldsymbol{r})\Lambda_{L(R)} = 0. \tag{10}$$

定义 $\boldsymbol{t}$:4 × 4 矩阵，

$$t_1 = \begin{pmatrix} & \tau_1 \\ -\tau_1 & \end{pmatrix},\quad t_2 = \begin{pmatrix} \tau_2 & \\ & \tau_2 \end{pmatrix},\quad t_3 = \begin{pmatrix} & \tau_3 \\ -\tau_3 & \end{pmatrix}. \tag{11}$$

将(6)代入(10)，利用(11)，可将方程(10)分解为三组：

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_1^c \\ Q_2^c \end{bmatrix}_{R(L)} + G'\phi_1(r)\begin{bmatrix} Q_1^c \\ Q_2^c \\ -Q_1 \\ -Q_2 \end{bmatrix}_{L(R)} = 0, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\begin{bmatrix} N \\ N^c \end{bmatrix}_{R(L)} + 2G'[\phi_1(r)+\phi_2(r)]\begin{bmatrix} -N^c \\ N \end{bmatrix}_{L(R)} = 0, \tag{13}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla - i[(K(r)-1)/2r]\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{t}\times\hat{r})\}\begin{bmatrix} Q_3 \\ E \\ Q_3^c \\ E^c \end{bmatrix}_{R(L)}$$

$$+ G'\left\{\phi_2(r)\begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} + \phi_3(r)\boldsymbol{t}\cdot\hat{r}\right\}\begin{bmatrix} Q_3 \\ E \\ Q_3^c \\ E^c \end{bmatrix}_{L(R)} = 0. \tag{14}$$

其中 $G' = G/g$. (12)、(13)、(14) 就是超重费米子在 $SO(10)$ 磁单极场中运动方程的具体形式.

三、可能存在非零解

为讨论方便，将方程(12)写为同位旋二分量方程：

$$\begin{cases} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}_{R(L)} + G'\phi_1(r)\begin{pmatrix} Q_1^c \\ Q_2^c \end{pmatrix}_{L(R)} = 0, \\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\begin{pmatrix} Q_1^c \\ Q_2^c \end{pmatrix}_{R(L)} - G'\phi_1(r)\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}_{L(R)} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

转置 (15) 的同位旋矩阵，右乘 τ_2，利用 $\tilde{\boldsymbol{\tau}}\tau_2 = -\tau_2\boldsymbol{\tau}$，定义 2×2 矩阵：

$$\begin{cases} f_{1R,L} = (Q_1,\ Q_2)_{R,L}\tau_2 \\ f_{2R,L} = (Q_1^c,\ Q_2^c)_{R,L}\tau_2 \end{cases} \tag{16}$$

这时可不加区别 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\tau}$[5]. 将 f-矩阵按 σ_μ 展开，

$$\begin{cases} f_{iR} = \sigma_\mu R_{i\mu} \\ f_{iL} = \sigma_\mu L_{i\mu} \quad (i = 1,\ 2) \end{cases} \tag{17}$$

由(15)不难得到关于 R_{10}、$\boldsymbol{R}_1$ 和 L_{20}、$\boldsymbol{L}_2$ 的如下方程：

$$\begin{cases} \nabla\cdot\boldsymbol{R}_1+G'\phi_1(r)L_{20}=0 & (18)\\ i\nabla\times\boldsymbol{R}_1+\nabla R_{10}+G'\phi_1(r)\boldsymbol{L}_2=0 & (19)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{L}_2-G'\phi_1(r)R_{10}=0 & (20)\\ i\nabla\times\boldsymbol{L}_2+\nabla L_{20}-G'\phi_1(r)\boldsymbol{R}_1=0 & (21)\end{cases}$$

R_{20}、$\boldsymbol{R}_2$ 和 L_{10}、$\boldsymbol{L}_1$ 也有完全类似的方程. 由

$$L_{20}^*(18)+(21)^*\cdot\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{L}_2^*\cdot(19)+(20)^*R_{10}$$

可得:

$$\nabla\cdot[L_{20}^*\boldsymbol{R}_1-i(\boldsymbol{L}_2^*\times\boldsymbol{R}_1)+\boldsymbol{L}_2^*R_{10}] \\ +G'\phi_1(r)(|L_{20}|^2+|\boldsymbol{L}_2|^2-|R_{10}|^2-|\boldsymbol{R}_1|^2)=0$$

对全空间积分,有

$$\int d^3\boldsymbol{x}G'\phi_1(r)(|L_{20}|^2+|\boldsymbol{L}_2|^2-|R_{10}|^2-|\boldsymbol{R}_1|^2)=0 \tag{22}$$

稳定磁单极应使总能量极小,即系统处于基态. 由基态波函数不存在节点的一般论说,容易看出 $\phi_1(r)$ 应不改变符号. 由此,

$$|L_{20}|^2+|\boldsymbol{L}_2|^2-|R_{10}|^2-|\boldsymbol{R}_1|^2=0 \tag{23}$$

同样有:

$$|R_{20}|^2+|\boldsymbol{R}_2|^2-|L_{10}|^2-|\boldsymbol{L}_1|^2=0 \tag{24}$$

可见,L_{20}、$\boldsymbol{L}_2$、R_{10}、$\boldsymbol{R}_1$ 以及 R_{20}、$\boldsymbol{R}_2$、L_{10}、$\boldsymbol{L}_1$ 不一定同时全都为零, 即可能存在非零解.

用类似于讨论(12)的方法, 讨论(14)(见附录). 即将之写为同位旋二分量的耦合方程,定义 2×2 矩阵:

$$f_{3R,L}=(Q_3,\ E)_{R,L}\tau_2,\ \ f_{4R,L}=(Q_3^c,\ E^c)_{R,L}\tau_2. \tag{25}$$

令

$$f_{jR}=\sigma_\mu R_{j\mu},\ \ f_{jL}=\sigma_\mu L_{j\mu}.\ \ (j=3,4) \tag{26}$$

可得 $R_{j\mu}$, $L_{j\mu}$ 的方程组. 经过适当的运算,并对全空间积分,考虑到系统处于基态,波函数不存在节点的论说,知 $\phi_2(r)$ 应不改变符号,则有

$$\begin{cases}|L_{40}|^2+|\boldsymbol{L}_4|^2-|R_{30}|^2-|\boldsymbol{R}_3|^2=0\\ |R_{40}|^2+|\boldsymbol{R}_4|^2-|L_{30}|^2-|\boldsymbol{L}_3|^2=0\end{cases} \tag{27}$$

故 L_{40}、$\boldsymbol{L}_4$、R_{30}、$\boldsymbol{R}_3$ 及 R_{40}、$\boldsymbol{R}_4$、L_{30}、$\boldsymbol{L}_3$ 也可能不同时为零,即有可能存在非零解.

四、方程的渐近行为

方程组(13)可写为:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla N_{R(L)}-2G'[\phi_1(r)+\phi_2(r)]N^c_{L(R)}=0 & (28)\\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla N^c_{L(R)}+2G'[\phi_1(r)+\phi_2(r)]N_{R(L)}=0 & (29)\end{cases}$$

容易看出,用简单代入法可得:

$$\nabla^2N_{R(L)}/2G'[\phi_1(r)+\phi_2(r)]-\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{r}[\phi_1'(r)+\phi_2'(r)]\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla N_{R(L)}/2G'[\phi_1(r) \\ +\phi_2(r)]^2+2G'[\phi_1(r)+\phi_2(r)]N_{R(L)}=0 \tag{30}$$

当沿着 z 方向，$r\to\infty$ 时，由(5)

$$\phi_1(r)+\phi_2(r)\to\frac{3}{2}ag\ (\text{常数}),\ \phi_1'(r)\to 0,\ \phi_2'(r)\to 0.$$

方程 (30) 变为

$$\nabla^2 N_{R(L)}+9a^2G^2N_{R(L)}=0 \tag{31}$$

因此可能存在非零解.

方程(12)的变形(18)—(21)以及(14)的变形，都可以讨论在沿 z 方向 $r\to\infty$ 时的渐近行为．例如在此情况下，由(18)、(19)分别解出 L_{20} 和 $\boldsymbol{L}_2$，代入(20)和(21)，分别得到：

$$\nabla^2 R_{10}+4a^2G^2R_{10}=0 \tag{32}$$

和

$$\nabla^2\boldsymbol{R}_1+4a^2G^2\boldsymbol{R}_1=0. \tag{33}$$

从而也不难看出，R_{10} 及 $\boldsymbol{R}_1$ 可能存在非零解.

其它，R_{20}、$\boldsymbol{R}_2$、L_{10}、$\boldsymbol{L}_1$ 及 L_{20}、$\boldsymbol{L}_2$，都有类似(32)与(33)的结果.

方程 (12) 和 (13) 都是只存在超重费米子与 Higgs 场的耦合．在这种简单情况下，正如以上讨论，如果超重费米子存在非零解，在沿 z 方向 $r\to\infty$ 时，解必须满足球面波的渐近行为.

五、讨　论

综上所述，可见超重费米子在 $SO(10)$ 磁单极外场中可能有零能束缚态存在．这是和文献[1—3]所不同的.

我们知道，零能束缚态存在与否，显然依赖于耦合的细节．文献[1—3]都是讨论通常三代费米子与 Higgs 场的耦合．在此耦合下作者们已经证明，不存在零能束缚态．我们这里讨论的是超重费米子（而非通常的三代费米子）与 $SO(10)$ 破缺的一个 Higgs 场 Φ (而非 H)的耦合．此超重费米子同位旋空间的结构与通常费米子不同，而 Φ 与 $SO(10)$ 破缺的另一 Higgs H 的结构亦截然不同，这里的耦合自然和上述文献中的耦合完全不同．因而，导致不同的结果，这也是很自然的了.

我们讨论的超重费米子，在现实世界中并未发现．但在有关大统一理论的文献中[6]，却常常指出其存在．文献[4]还特别指出超重费米子在早期宇宙中的作用．可以认为，在早期宇宙中存在的超重费米子，在磁单极诱导催化下发生衰变，产生足够的重子数不对称，产生现实世界中的通常费米子；而这些粒子本身却不复存在.

作者十分感谢李新洲副教授和张鉴祖副教授的有益讨论和帮助.

附　录

方程(14)解的讨论

把(14)分解为同位旋二分量方程组：

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}(\sigma_1\tau_2\hat{z}-\sigma_3\tau_2\hat{x})\right\}\begin{pmatrix}Q_3\\ E\end{pmatrix}_{R(L)}-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}(-\sigma_1\tau_3\hat{y}$$
$$+\sigma_2\tau_3\hat{x}-\sigma_2\tau_1\hat{z}+\sigma_3\tau_1\hat{y})\begin{pmatrix}Q_3^c\\ E^c\end{pmatrix}_{R(L)}+G'\left\{\phi_3(r)\tau_2\hat{y}\begin{pmatrix}Q_3\\ E\end{pmatrix}_{L(R)}+[\phi_2(r)\right.$$
$$\left.+\phi_3(r)(\tau_1\hat{x}+\tau_3\hat{z})]\begin{pmatrix}Q_3^c\\ E^c\end{pmatrix}_{L(R)}\right\}=0 \tag{34}$$

$$\left\{\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}(\sigma_1\tau_2\hat{z}-\sigma_3\tau_2\hat{x})\right\}\begin{pmatrix}Q_3^c\\ E^c\end{pmatrix}_{R(L)}-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}(\sigma_1\tau_3\hat{y}$$
$$-\sigma_2\tau_3\hat{x}+\sigma_2\tau_1\hat{z}-\sigma_3\tau_1\hat{y})\begin{pmatrix}Q_3\\ E\end{pmatrix}_{R(L)}+G'\left\{\phi_3(r)\tau_2\hat{y}\begin{pmatrix}Q_3^c\\ E^c\end{pmatrix}_{L(R)}\right.$$
$$\left.-[\phi_2(r)+\phi_3(r)(\tau_1\hat{x}+\tau_3\hat{z})]\begin{pmatrix}Q_3\\ E\end{pmatrix}_{L(R)}\right\}=0 \tag{35}$$

把(25)、(26)先后代入(34)、(35)，不难得到：

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{R}_3+K_{10}=0 & (36)\\ \nabla R_{30}+i\nabla\times\boldsymbol{R}_3+\boldsymbol{K}_1=0 & (37)\end{cases}$$

其中：

$$\begin{aligned}K_{10}&=-[(K(r)-1)/2r](R_{31}\hat{x}+R_{33}\hat{z}+R_{42}\hat{y}+\boldsymbol{R}_4\cdot\hat{r})\\&\quad-G'\{\phi_3(r)[L_{41}\hat{x}+L_{43}\hat{z}+L_{32}\hat{y}]-\phi_2(r)L_{40}\}\\K_{1x}&=[(K(r)-1)/2r](-R_{30}\hat{x}+iR_{32}\hat{z}-R_{40}\hat{x}-iR_{42}\hat{z})\\&\quad-G'[\phi_3(r)(L_{40}\hat{x}+iL_{42}\hat{z}-iL_{33}\hat{y})-\phi_2(r)L_{41}]\\K_{1y}&=-i[(K(r)-1)/2r](R_{33}\hat{x}-R_{31}\hat{z}+R_{41}\hat{z}-R_{43}\hat{x}\\&\quad-2iR_{40}\hat{y})-G'[\phi_3(r)(iL_{43}\hat{x}-iL_{41}\hat{z}+L_{30}\hat{y})-\phi_2(r)L_{42}]\\K_{1z}&=[(K(r)-1)/2r](-iR_{32}\hat{x}-R_{30}\hat{z}+iR_{42}\hat{x}-R_{40}\hat{z})\\&\quad-G'[\phi_3(r)(L_{40}\hat{z}-iL_{42}\hat{x}+iL_{31}\hat{y})-\phi_2(r)L_{43}]\end{aligned}\tag{38}$$

和

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{L}_4+K_{20}=0 & (39)\\ \nabla L_{40}+i\nabla\times\boldsymbol{L}_4+\boldsymbol{K}_2=0 & (40)\end{cases}$$

其中：

$$\begin{aligned}K_{20}&=-[(K(r)-1)/2r](L_{41}\hat{x}+L_{43}\hat{z}-L_{32}\hat{y}-\boldsymbol{L}_3\cdot\hat{r})\\&\quad-G'[\phi_3(r)(R_{42}\hat{y}-R_{31}\hat{x}-R_{33}\hat{z})+\phi_2(r)R_{30}]\\K_{2x}&=[(K(r)-1)/2r](-L_{40}\hat{x}+iL_{42}\hat{z}+L_{30}\hat{x}+iL_{32}\hat{z})\\&\quad+G'[\phi_3(r)(R_{30}\hat{x}+iR_{32}\hat{z}+iR_{43}\hat{y})-\phi_2(r)R_{31}]\\K_{2y}&=-i[(K(r)-1)/2r](L_{43}\hat{x}-L_{41}\hat{z}+L_{33}\hat{x}-L_{31}\hat{z}+2iL_{30}\hat{y})\\&\quad-G'[\phi_3(r)(R_{40}\hat{y}-iR_{33}\hat{x}+iR_{31}\hat{z})+\phi_2(r)R_{32}]\\K_{2z}&=[(K(r)-1)/2r](-iL_{42}\hat{x}-L_{40}\hat{z}-iL_{32}\hat{x}+L_{30}\hat{z})\\&\quad-G'[\phi_3(r)(iR_{41}\hat{y}+iR_{32}\hat{x}-R_{30}\hat{z})+\phi_2(r)R_{33}]\end{aligned}\tag{41}$$

由
$$L_{40}^*(36)+(40)^*\cdot\boldsymbol{R}_3+\boldsymbol{L}_4^*\cdot(37)+(39)^*R_{30}$$
可得

$$\nabla \cdot [L_{40}^{*}\boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{L}_4^{*}R_{30} - i(\boldsymbol{L}_4^{*} \times \boldsymbol{R}_3)] + L_{40}^{*}K_{10} + \boldsymbol{K}_2^{*} \cdot \boldsymbol{R}_3 + \boldsymbol{L}_4^{*} \cdot \boldsymbol{K}_1 + K_{20}^{*}R_{30} = 0 \tag{42}$$

对全空间积分,注意到含有 $\hat{x}$、$\hat{y}$、$\hat{z}$ 的项积分为零,得:

$$\int d^3\boldsymbol{x}G'\phi_2(r)(|L_{40}|^2 + |\boldsymbol{L}_4|^2 - |R_{30}|^2 - |\boldsymbol{R}_3|^2) = 0 \tag{43}$$

R_{40}, $\boldsymbol{R}_4$, L_{30}, $\boldsymbol{L}_3$ 也有完全相似的结果.

参 考 文 献

[1] T. F. Walsh, P. Weisz and Tai Tsun Wu, *Nucl. Phys.*, **B232**(1984), 349.
[2] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **82A**(1984), 377.
[3] 李新洲,汪克林,张鉴祖,高能物理与核物理, **9** (1985), 653.
[4] 例如, V. A. Kuzmin and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.*, **92B**(1980), 115; A. K. Mohanty and F. W. Stecker, *Phys. Lett.*, **143B**(1984), 351.
[5] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 3398.
[6] 例如, K. Tamvakis and C. E. Vayonakis, *Phys. Lett.*, **109B**(1982), 15; 江向东, 高能物理与核物理, **8** (1984), 272.

ON THE SUPERHEAVY FERMION—*SO*(10) MONOPOLE ZERO-ENERGY BOUND STATES

Qi Yong-chang

(Shanxi University)

Abstract

It is found that the zero-energy bound state of the superheavy fermion and $SO(10)$ Monopole is possible. As a result we conclude that the Rubakov effect may exist in the presence of superheavy fermions.