第 10 卷 第 4 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 10, No. 4
1986 年 7 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　July, 1986

四维反自对偶方程和 Rieman-Hilbert 变换

郑哲洙　林进虎
(延边大学物理系)

摘　　要

本文把 Rieman-Hilbert 变换应用到四维反自对偶方程，并由此导出了 'tHooft 的瞬子解.

一、引　言

反自对偶 (Anti-Self-Dual) 方程[1]的解，首先是由 Ward[2] 和 Atiyah[3] 推导出来的. 他们把自对偶方程或反自对偶方程归结于三维复投射空间上的解析性矢束，并因此试图构成瞬子解.

Zakharov[4] 和 Hauser[5] 等人把 Rieman-Hilbert 问题 (RH 问题) 应用到各种二维场方程，求得解析性二维场方程的工作取得了较明显的进展. 本文中将讨论 RH 变换，并把它应用到四维反自对偶方程，由此要构成 'tHooft 的瞬子解.

二、反自对偶方程

设考虑复规范势 B_y, $B_{\bar y}$, B_z, $B_{\bar z}$，它们是在空间 $\boldsymbol{C}^4 \ni (y, \bar y, z, \bar z)$ 上的 $n \times n$ 矩阵函数. 反自对偶方程为[1]

$$F_{yz} = F_{\bar y \bar z} = 0 \tag{1}$$

$$F_{y\bar y} = F_{z\bar z} = 0 \tag{2}$$

其中:

$$F_{yz} = \partial_z B_y - \partial_y B_z - [B_y, B_z] \tag{3}$$

方程 (1) 相当于 0-弯曲条件，所以积分后可得

$$\begin{aligned} B_y = D^{-1}\partial_y D, \quad B_z = D^{-1}\partial_z D \\ B_{\bar y} = \bar D^{-1}\partial_{\bar y}\bar D, \quad B_{\bar z} = \bar D^{-1}\partial_{\bar z}\bar D \end{aligned} \tag{4}$$

若令:

$$J = D\bar D^{-1} \tag{5}$$

则利用方程 (2) 可知，J 满足如下方程[6]:

$$\partial_{\bar y}(J^{-1}\partial_y J) + \partial_{\bar z}(J^{-1}\partial_z J) = 0 \tag{6}$$

若从 (5) 式起还原上述过程的逆过程，则可得反自对偶方程 (1) 和 (2)，但此时 (4) 式不是唯一的. 譬如，取如下代换:

$$D \to DD', \quad \bar D \to \bar D D' \tag{7}$$

本文 1985 年 4 月 15 日收到.

其中 D' 为任意函数，这就是对应于规范变换．从物理上来说，则要求在实区域中规范势须属于实李环，与此同时将对 J 附加各种制约．J 仅仅是 $GL(n,\boldsymbol{C})$ 值函数．上述 (6) 式就是反自对偶方程的另一种形式．

由 J 构成复规范势 B_y，$B_{\bar{y}}$，B_z，$B_{\bar{z}}$ 的方法，除上述情形外还有几种其他方法．譬如，令 $J\in SL(2,\boldsymbol{C})$，并把它再参数化为

$$J=f^{-1}\begin{bmatrix}1 & -g\\ e^2 & f^2-eg\end{bmatrix}\tag{8}$$

此时反自对偶方程的解为

$$\begin{aligned}B_y&=f^{-1}\begin{pmatrix}\partial_y f & 0\\ -2\partial_z g & -\partial_y f\end{pmatrix} \qquad & B_{\bar{y}}&=f^{-1}\begin{pmatrix}-\partial_{\bar{y}} f & 2\partial_z e\\ 0 & \partial_{\bar{y}} f\end{pmatrix}\\ B_z&=f^{-1}\begin{pmatrix}\partial_z f & 0\\ 2\partial_{\bar{y}} g & -\partial_z f\end{pmatrix} \qquad & B_{\bar{z}}&=f^{-1}\begin{pmatrix}-\partial_{\bar{z}} f & -2\partial_y e\\ 0 & \partial_{\bar{z}} f\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{9}$$

若取 $e=f=g$，则上式就是 'tHooft 解．

三、Rieman-Hilbert 变换[4,5]

下面讨论线性化问题．为此引进如下微分作用元：

$$D_1=\zeta^{-1}\partial_{\bar{z}}+\partial_y,\quad D_2=\zeta^{-1}\partial_{\bar{y}}-\partial_z\tag{10}$$

其中 ζ 为复参量．令 $A_k=A_k(y,\bar{y},z,\bar{z})$ $(k=1,2)$ 为 $n\times n$ 矩阵函数．此时，反自对偶方程 (6) 就等于线性方程系

$$D_kY(\zeta)=\zeta^{-1}A_kY(\zeta)\tag{11}$$

的可积条件：

$$[D_1-\zeta^{-1}A_1,D_2-\zeta^{-1}A_2]=0\tag{12}$$

若利用 (11) 的基本解矩阵时 $Y(\zeta)=Y(y,\bar{y},z,\bar{z};\zeta)$ 在 $\zeta=0$ 附近处为正则的，那末

$$J=Y(0),\quad A_1=\partial_{\bar{z}}J\cdot J^{-1},\quad A_2=\partial_{\bar{y}}J\cdot J^{-1}\tag{13}$$

这些结果可由 Atiyah-Ward[3] 的 Penrose 变换求得，还通过方程 (6) 的对称性考察也可以求得．

下面讨论变换理论．利用线性问题概念这一问题表述如下：先把问题出发点的线性方程 (11) 和基本解矩阵 $Y(\zeta)$ 的组写成 $(Y(\zeta),A_k)$．由此再给出其他另一个组 $(\tilde{Y}(\zeta),\tilde{A}_k)$，这就是变换理论的内容．为实现这样一种过程将利用 Rieman-Hilbert 问题．所谓 RH 问题，就是意味着把某区域边界上的函数写成区域外部正则的函数和区域内部正则的函数之积．将这一问题以如下形式表示：

$$\begin{aligned}X(\zeta')&=X(\zeta')H(\zeta')\quad \zeta'\in C\\ H(\zeta)&=Y(\zeta)u(\zeta)Y(\zeta)^{-1}\end{aligned}\tag{14}$$

其中 C 为围绕 ζ 平面上原点的解析函数． 令 C_+ 和 C_- 各为表示 C 的内部和外部，并取 $C\cup C_+$ 使 $Y(\zeta)$ 成为正则函数．$X_\pm(\zeta)$ 为 $C\cup C_\pm$ 时正则且非奇异的矩阵函数． $X_-(\zeta)$ 的归一化条件为：$X_-(\infty)=1$

此外，令 $u(\zeta)=u(y,\ \bar{y},\ z,\ \bar{z},\ \zeta)$ 是在 C 上解析且非奇异的函数，并满足条件

$D_k u(\zeta)=0$. 这表示 $u(\zeta)$ 为 ζ, w_1, w_2 的函数，其中 $w_1=\bar{z}-\zeta^{-1}y$, $w_2=\bar{y}+\zeta z$.

根据上述 RH 问题的讨论，我们将可以建立 Rieman-Hilbert 变换理论. 假定上述解析矩阵 $X_{\pm}(\zeta)$ 是唯一的，此假定只在 $u(\zeta)$ 十分小时才成立，并且具有关系

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(\zeta)&=X_{+}(\zeta)Y(\zeta) \quad 在\ C_{+}\ 内\\ &=X_{-}(\zeta)Y(\zeta)u(\zeta)^{-1} \quad 在\ C_{-}\ 内\end{aligned} \tag{15}$$

此时可以看出 $\tilde{Y}(\zeta)$ 为如下微分方程组

$$\begin{aligned}&D_k\tilde{Y}(\zeta)=\zeta^{-1}A_k\tilde{Y}(\zeta)\\ &\tilde{A}_1=A_1+\partial_y(\partial_w X_-|_{w=0})\\ &\tilde{A}_2=A_2-\partial_z(\partial_w X_-|_{w=0}),\ \zeta=w^{-1}\end{aligned} \tag{16}$$

的基本解矩阵.

通过上述讨论建立了变换理论，(14) 式就是 RH 变换. 令 $\tilde{J}=\tilde{Y}(0)$，则 $\tilde{J}$ 就是反自对偶方程的新解. 可见，随着 (14) 式中 $u(\zeta)$ 的不同就能构成各种不同解.

四、RH 变换对四维反自对偶方程的应用

下面我们将 RH 变换应用到四维反自对偶方程，并由此将构成 'tHooft 的瞬子解.

令在 RH 变换 (14) 中取

$$u(\zeta)=1+\frac{C}{\zeta-\zeta_1}P \tag{17}$$

其中 P 为 $n\times n$ 常数矩阵，且有 $P^2=0$，并 C, ζ_1 为常数. 假定 $\zeta_1\in C_+$，并有

$$X_-(\zeta)=1+\frac{R}{\zeta-\zeta_1} \tag{18}$$

在此场合求矩阵 R. 先将导出 $X_-(\zeta)Y(\zeta)u(\zeta)^{-1}$ 在 $\zeta=\zeta_1$ 处成为正则的条件，则由此可得

$$R=CY(\zeta)PY(\zeta)^{-1}(1-C\dot{Y}(\zeta_1)PY(\zeta_1)^{-1})^{-1} \tag{19}$$

其中 $\dot{Y}(\zeta)$ 为 $Y(\zeta)$ 对 ζ 的导数.

对于这一类初等变换和线性微分方程反复进行规范变换，就能构成 'tHooft 瞬子解. 前已指出，这种解为

$$e=f=g=\left[1+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j}{(y-y_j)(\bar{y}-\bar{y}_j)+(z-z_j)(\bar{z}-\bar{z}_j)}\right]^{-1} \tag{20}$$

下面讨论这种解的具体构成方法. 先将 $u^{(j)}(\zeta)(j=1,2,\cdots,N)$ 写成

$$u^{(j)}(\zeta)=1+\frac{a_j'}{\zeta-\alpha_j}P \tag{21}$$

其中

$$P=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \alpha_j=\frac{y-y_j}{\bar{z}-\bar{z}_j},\quad a_j'=\frac{a_j}{\bar{z}-\bar{z}_j} \tag{22}$$

并 a_j, y_j, $\bar{z}_j$ 为常数. 令

$$\varphi^{(0)}(\zeta)=0$$

$$\varphi^{(j)}(\zeta)=\frac{1}{1+\varphi^{(j)}(\zeta)}\begin{pmatrix}1+\varphi^{(j+1)}(\zeta), & \{\varphi^{(j)}(\zeta)-\varphi^{(j+1)}(\zeta)\}\sum_{k=1}^{j}\frac{a'_k}{\zeta-a_k}\\ 0 & 1+\varphi^{(j)}(\zeta)\end{pmatrix} \tag{23}$$

其中 $0\leqslant j\leqslant N-1$. 从已知解 $\tilde{Y}^{(0)}(\zeta)=1$ 出发进行逐次变换可得

$$\tilde{Y}^{(j)}(\zeta)=\tilde{Y}^{(j)}(\zeta)g^{(j)}(\zeta) \tag{24}$$

$$\tilde{Y}^{(j+1)}(\zeta)=u^{(j+1)}(\zeta)\circ Y^{(j)}(\zeta),\ (0\leqslant j\leqslant N-1) \tag{25}$$

其中 $u^{(j)}(\zeta)\circ$ 表示 RH 变换. 令取 $\tilde{J}^{(N)}=\tilde{Y}^{(N)}(0)$，则上式就给出瞬子解 (11).

五、小　结

本文把为导出解析的二维方程而建立起来的 Rieman-Hilbert 变换应用到四维反自对偶方程，由此能构成 'tHooft 瞬子解. 但反自对偶方程解的空间构造还是未知问题. 我们认为 RH 变换将会给解决这一问题的线索.

参　考　文　献

[1] C. N. Yang, *Phys. Rev. Lett.*, **38**(1977), 1377.
[2] R. S. Ward, *Phys. Lett.*, **61A**(1977), 81.
[3] M. F. Atiyah, R. S. Ward, *Commun. Math. Phys.*, **55**(1977), 117.
[4] В. Е. Захаров, А. В. Михайлов ЖЭТФ **74**(1978), 1953.
[5] I. Hauser, F. J. Ernst, *J. Math. Phys.*, **21**(1980), 1126; **21**(1980), 1418.
[6] K. Pohmeyer, *Commun. Math. Phys.*, **72**(1980), 37.

THE FOUR-DIMENSION ANTI-SELF-DUAL EQUATION AND RIEMAN-HILBERT TRANSFORMATION

ZHENG ZHE-ZHU　LIN JIN-HU

(Yanbian University)

ABSTRACT

Rieman-Hilbert transformation is applied to the four-dimension Anti-Self-Dual equation and 'tHooft's instanton solution is derived.