

^{31}Si 核的能谱与波函数

——对复合粒子表象理论的一个检验

王 柏 庐

(西南师范大学)

摘 要

本文用复合粒子表象理论对 ^{31}Si 核进行研究计算, 求出了 ^{31}Si 核的能谱和波函数。能谱与壳模型能谱完全一致, 波函数与壳模型波函数严格等价, 因而有力地支持了复合粒子表象理论。

在研究核场论 (NFT)^[1] 的过程中, 吴成礼和冯达旋提出了玻色子-费米子混合表象理论 (BFH)^[2], 不久他们又将 BFH 理论推广为复合粒子表象理论 (CPR)^[3]。在 BFH 中所引用的复合粒子是由费米子对构成的玻色子。吴和冯采用广义表象变换的方法, 由原始的费米子体系的哈密顿量出发自然地导出了 NFT 的薛定谔方程及其所有附加经验规则, 这样极为透彻地阐明了 NFT 的理论基础及其有效性。CPR 理论通过引进复合粒子自由度可以大大地简化多体问题的计算。

CPR 理论的正确性对核系统在单 i 壳的情形已经作了数值验证^[4]。最近王克协、王爱莲等又在多 i 壳非全同粒子情形下 (^{91}Nb , ^{19}O , ^{20}O , ^{19}F , ^{20}F , ^{20}Ne 等) 对 CPR 理论作了检验, 结果也是肯定的^[5]。

本文亦是采用 CPR 理论中所论证的方法对 ^{31}Si 核进行研究, 并与相应的壳模型计算结果作比较, 工作概况如下:

一、建立 ^{31}Si 核的 BFH 空间

^{31}Si 核在满壳外有三个中子, 对于低能态可以认为这三个价核子仅处于 $s_{1/2}$ 和 $d_{3/2}$ 壳层, 因而可能的单粒子态为 $|s_{1/2}\rangle$ 和 $|d_{3/2}\rangle$ (对 ^{31}Si 核都是中子态), 宇称为正。构造各种可能的三费米子态 $|FFF\rangle_i = \{A_{ji}^\dagger(k_{1i}k_{2i}) \otimes \alpha_{k_{3i}}^\dagger\}_{JM}|0\rangle$, 对 $J=3/2$ 可能的三费米子态共有 8 个, 它们是

$$\begin{aligned} & |(s_{1/2})^2 0, d_{3/2}; 3/2\rangle, & |(d_{3/2})^2 0, d_{3/2}; 3/2\rangle \\ & |(s_{1/2}d_{3/2}) 1, s_{1/2}; 3/2\rangle, & |(s_{1/2}d_{3/2}) 1, d_{3/2}; 3/2\rangle \\ & |(s_{1/2}d_{3/2}) 2, s_{1/2}; 3/2\rangle, & |(s_{1/2}d_{3/2}) 2, d_{3/2}; 3/2\rangle \end{aligned}$$

$$|(d_{3/2})^2 2, s_{1/2}; 3/2\rangle, \quad |(d_{3/2})^2 2, d_{3/2}; 3/2\rangle$$

类似地可以得出在 $J = 1/2$ 时三费米子态的基有 6 个, $J = 5/2$ 时三费米子态的基有 5 个。

按 BFH 理论, 还构造了与三费米子态的 8 个基相对应的 8 个玻色子-费米子基 $|BF\rangle_i = \{B_{a_i}^+ \otimes \alpha_{k_i}^+\}_{JM}|0\rangle$ 与 8 个负玻色子-费米子基 $|\bar{B}F\rangle_i = \{\bar{B}_{a_i}^+ \otimes \alpha_{k_i}^+\}_{JM}|0\rangle$ 。 $|FFF\rangle_i, |BF\rangle_i, |\bar{B}F\rangle_i$ 三种基矢一起, 构成超完备的 BFH 空间。

二、能量参数

为了与壳模型的结果作比较, 我们选用的能量参数即单粒子能量与两体相互作用矩阵元与文献[6]完全一致, 如表 1 所示:

表 1 能量参数值 (单位: MeV)

$\epsilon_s - 8.480$	$\epsilon_d - 7.200$	$V_0^d - 1.060$	$V_2^d - 0.080$	$\Delta_{1/2}^{d, s^2} 0.600$
$V_{1/2}^{d, d} 2.350$	$V_{3/2}^{d, d} - 0.960$	$V_0^s - 2.020$	$\Delta_{1/2}^{s, d} 0.500$	

三、计算公式与计算步骤

在 BFH 空间中薛定谔方程的求解, 通常是采用 Brillouin-Wigner 微扰理论, 把整个空间分为由 $|BF\rangle$ 型基构成的模型空间 (P 空间) 和 Q 空间, 在 P 空间中求解方程

$$(H_P^0 + V_{eff})_P \phi_P^{(\omega)} = E \phi_P^{(\omega)} \quad (1)$$

$$H_P^0 |P_n\rangle = E_n^{(0)} |P_n\rangle$$

$$\phi_P^{(\omega)} = \sum_n C_n^{(\omega)} |P_n\rangle$$

化(1)式的求解为解线性方程组

$$\sum_{m=1}^l [\langle P_n | V_{eff} | P_m \rangle - (E - E_n^{(0)}) \delta_{mn}] C_m^{(\omega)} = 0, \quad (n = 1 \cdots l) \quad (2)$$

式中 l 为模型空间的维数。计算式(2)中的有效相互作用矩阵元要注意加上“无泡泡图规则”。

由(2)式的久期方程求出能级, 进一步求出各能级对应的波函数。若波函数取得

$$\phi_n^{(\omega)} = \phi_P^{(\omega)} + \varphi^{(\omega)}(\hat{O}) \quad (3)$$

的形式, 则是物理态。即要求波函数化为

$$\begin{aligned} \phi_n^{(\omega)} = & \sum_n b_n^{(\omega)} |FFF; J\rangle_n + \sum_i a_i^{(\omega)} |BF; J\rangle_i \\ & + \sum_i \bar{a}_i^{(\omega)} |\bar{B}F; J\rangle_i \end{aligned} \quad (4)$$

的形式, 并以 $a_i = \bar{a}_i$ 作为物理态判据的充要条件。

象理
所引
始的
], 这
由度

、王
了检

计算

1/2 壳
种可
态共

四、计算结果

设(2)式的系数行列式为 $|D(E)|$, 作 $|D(E)| \sim E$ 的函数曲线(图1), 曲线与 $E = 0$ 的坐标横轴的交点是 $|D(E)| = 0$ 的根, 每个根对应的波函数亦可求出. 对于 $J = 3/2$ 的情况求出了7个根, 其中三个根合乎物理态的判据, 是 ^{31}Si 的能级. 其余四个根不满足解的物理态判据条件, 作为伪根舍弃, 其根的物理态判断见表2.

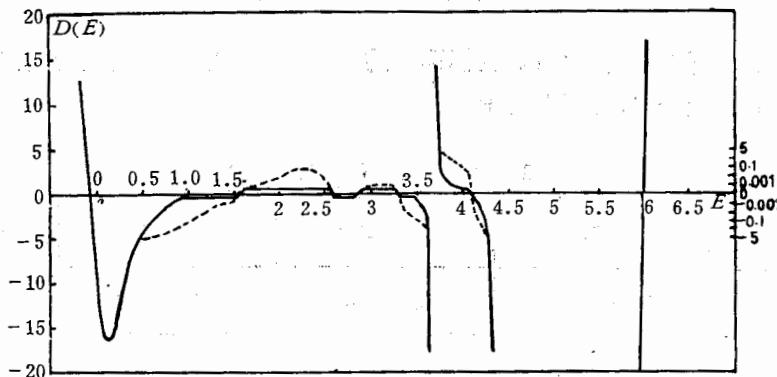


图1 ^{31}Si 核 $J = 3/2$ 时的 $D(E) \sim E$ 函数曲线.
(图中虚线系纵坐标按左方刻度绘制的同一函数曲线)

表2 ^{31}Si 核 $J = 3/2$ 时BFH法求得七个根的物理态判断表

根值 E_n	-0.066	1.543	2.583	2.822	3.259	4.084	5.997
归一化系数 N_n	0.2617	0.621×10^{-2}	0.1609	-0.1993×10^{-1}	0.1238	0.1567×10^{-2}	1.176
判断真伪态	$a_i = \bar{a}_i$	$a_i \neq \bar{a}_i$	$a_i \neq \bar{a}_i$	$a_i \neq \bar{a}_i$	$a_i = \bar{a}_i$	$a_i \neq \bar{a}_i$	$a_i = \bar{a}_i$
结论	物理态	伪态	伪态	伪态	物理态	伪态	物理态

应指出 NFT 经验地用归一化系数 $N > 0$ 作为物理态的判据条件. CPR 理论论证了 $N > 0$ 是物理态的必要条件而非充要条件. 用 CPR 理论的充要条件 $a_i = \bar{a}_i$ 判断, 才能正确地去掉四个伪态. 对于角动量 $J = 1/2, 5/2, 7/2$ 的情形, 亦作了类似的计算, 结果表明用 CPR 方法算得的 ^{31}Si 能谱与壳模型的结果完全一致, 作于图2中.

6.00	$3/2^+$
3.26	$3/2^+$
2.32	$1/2^+$
1.63	$5/2^+$
-0.07	$3/2^+$

图2 ^{31}Si 核的能谱.
(CPR 与壳模型完全一致)

五、BFH 波函数与壳模型波函数的等价性

以 ^{31}Si 核对应于 $E_1 = -0.066$ 的基态波函数为例, 求得的波函数为 $\psi_n^{(0)} = \varphi(\hat{O}) + \sum_n b_n^{(0)} |FFF; 3/2\rangle_n$

3 =
3 /
满

$$\begin{aligned}
 &= 1.285(|0_1 d_{3/2}; 3/2\rangle + |\bar{0}_1 d_{3/2}; 3/2\rangle) \\
 &+ 0.3624 \times 10^{-1}(|0_2 d_{3/2}; 3/2\rangle + |\bar{0}_2 d_{3/2}; 3/2\rangle) \\
 &+ 0.1259 \times 10(|1_1 d_{3/2}; 3/2\rangle + |\bar{1}_1 d_{3/2}; 3/2\rangle) \\
 &+ 0.1280(|1_2 d_{3/2}; 3/2\rangle + |\bar{1}_2 d_{3/2}; 3/2\rangle) \\
 &- 0.7480(|2_1 s_{1/2}; 3/2\rangle + |\bar{2}_1 s_{1/2}; 3/2\rangle) \\
 &- 0.7402 \times 10^{-1}(|2_2 d_{3/2}; 3/2\rangle + |\bar{2}_2 d_{3/2}; 3/2\rangle) \\
 &+ 0.4737 \times 10^{-1}(|2_3 s_{1/2}; 3/2\rangle + |\bar{2}_3 s_{1/2}; 3/2\rangle) \\
 &- 0.1709 \times 10^{-2}(|2_4 d_{3/2}; 3/2\rangle + |\bar{2}_4 d_{3/2}; 3/2\rangle) \\
 &+ 1.278|(s_{1/2})^2 0, d_{3/2}; 3/2\rangle - 0.1414|(d_{3/2})^2 0, d_{3/2}; 3/2\rangle \\
 &+ 1.259|(s_{1/2} d_{3/2}) 1, s_{1/2}; 3/2\rangle + 0.1280|(s_{1/2} d_{3/2}) 1, d_{3/2}; 3/2\rangle \\
 &- 0.7122|(s_{1/2} d_{3/2}) 2, s_{1/2}; 3/2\rangle - 0.7208 \\
 &\times 10^{-1} |(s_{1/2} d_{3/2}) 2, d_{3/2}; 3/2\rangle \\
 &+ 0.2335|(d_{3/2})^2 2, s_{1/2}; 3/2\rangle + 0.1691 \times 10^{-1} |(d_{3/2})^2 2, d_{3/2}; 3/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{5}$$

式中 0_1 和 0_2 表示由双费米子态 $|(s_{1/2})^2, J=0\rangle$ 和 $|(d_{3/2})^2, J=0\rangle$ 解二体薛定谔方程得到的两个角动量为零的玻色子^[2], $\bar{0}_1, \bar{0}_2$ 为与 $0_1, 0_2$ 对应的负玻色子, 余类推. 从(5)式中可以看出基态波函数中对应的玻色费米子态与负玻色费米子态前面的系数相等, 故是物理态. 而后 8 项为(3)式中的费米子波函数 $\phi_F^{(1)}$, 由(5)式利用角动量耦合关系的变换得到

$$\begin{aligned}
 \phi_F^{(1)}(J=3/2) = &\varphi(\hat{O}) + 0.9839|(s_{1/2})^2 0, d_{3/2}; 3/2\rangle \\
 &+ 0.0665|(d_{3/2})^2 2, s_{1/2}; 3/2\rangle - 0.1270|(d_{3/2})^3; 3/2\rangle.
 \end{aligned} \tag{6}$$

因为用 ϕ_h 计算物理量的期待值时 $\varphi(\hat{O})$ 的贡献为零, 所以这个波函数与壳模型波函数完全吻合. 对于其它物理态 ϕ_h 与壳模型波函数的一致可以类似证明.

结 论

用复合粒子表象理论对 ^{31}Si 核的计算, 得到的能谱与壳模型完全相同, 波函数与壳模型波函数严格等价. 因而对于复合粒子表象理论及其推断的核场论波函数是壳模型波函数在广义表象变换下一个表示的论点, 这里又提供了一个很好的例证.

本文是在吉林大学物理系吴成礼教授和王爱莲老师的热心指导下完成的, 并得到王克协、回瑞发老师的许多帮助, 在此一并致谢.

参 考 文 献

- [1] B. R. Mottelson, *J. Phys. Soc. Japan*, Suppl., 24(1968), 87; A. Bohr and B. R. Mottelson, "Nuclear Structure", Vol. II, Addison-Wesley, New York, 1975.
- [2] C. L. Wu(吴成礼) and D. H. Feng(冯达旋), *Ann. Phys.*, 135(1981), 166.
- [3] C. L. Wu and D. H. Feng, *Commun. in Theor. Phys.*, (Beijing, China), 1(1982), 705; 2(1983), 811.
- [4] C. L. Wu, *Nucl. Phys.*, A309(1978), 301; C. L. Wu, and D. H. Feng, *Phys. Rev.*, C24 (1981), 727.

17
16
a_i
—
了
的
动
用
图

导

- [5] 王克协, 王爱莲、回瑞发、刘广州、吴承勋、吴成礼,
Commun. in Theor. Phys., (Beijing, China), 待发表.
- [6] 杨善德, 《吉林大学自然科学学报》, 3(1963), 145.

THE ENERGY SPECTRUM AND WAVEFUNCTION OF NUCLEUS ^{31}Si —A TEST ON THE COMPOSITE PARTICLE REPRESENTATION THEORY

WANG BAI-LU

(Southwest China Teachers University)

ABSTRACT

The nucleus $^{31}_{14}\text{Si}_{17}$ is studied by the composite particle representation theory and compared with the shell model calculations. It is shown that the entire energy spectrum agrees with the shell model results very well, and the wave function is equivalent to the shell model wavefunction exactly. Therefore it strongly supports the composite particle representation theory.

旋态
子转
另外
在束
的高
外,
说明
了老
本身
很可
研究
的函