第 9 卷 第 6 期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 6
1985 年 11 月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Nov., 1985

格点规范理论的随机方程和 Wilson 圈变量的 Schwinger-Dyson 方程

薛社生 先鼎昌
(中国科学院高能物理研究所)

摘 要

本文把随机量子化方法应用到格点规范理论中，建立了格点上 $U(N)$、$SU(N)$ 规范群的链变量及圈变量的 Langevin 方程．讨论了方程的解的形式及其和 Wilson 圈的 Schwinger-Dyson 方程的关系．

引 言

随机量子化方法是从统计物理中借鉴来的一种场论方法． 1981 年，Parisi 和吴泳时[1,2] 讨论了场论体系的 Langevin 方程用于数值计算的可能性及玻色场体系的随机量子化方案．这一方法有别于费曼路径积分量子化的场论方法，具有许多独特之点． 最有兴趣的是讨论了场论体系从"非平衡态"向"平衡态"的演化过程，这可以和目前的计算机模拟数值计算紧密地联系起来．近几年来，一些用随机量子化方案进行数值计算的结果[3,4] 表明这种方法较通常的 Monte-Carlo 模拟计算方法有许多优点，特别是在有费米场的情况． 另外，这一量子化方案也提供了非微扰解析计算的可能途径[5]． 这方面的工作刚刚开始，正在逐渐呈现出它的潜力．

一、 格点规范场论中的 Langevin 方程

1981 年，Parisi 和吴泳时在场论中引入了随机量子化方法[2]．以标量场理论为例，这个方法简述如下：写出体系的作用量：

$$S(\phi)=\int dx^4\left(\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2+\frac{1}{2}m^2\phi^2+\frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) \tag{1.1}$$

推广 $\phi(x)$ 为"非平衡态"场论的场量 $\phi(x,\tau)$，其中 x 为四维时空坐标，τ 为想像的，标志"非平衡态" $\phi(x,\tau)$ 到"平衡态"——一般的场论 $\phi(x)$ 演化进程的参量，称为第五维时间．"非平衡态"场量 $\phi(x,\tau)$ 的演化方程为 Langevin 方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\phi(x,\tau)=-\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x,\tau)}+\eta(x,\tau) \tag{1.2}$$

本文 1984 年 12 月 30 日收到．

其中 η 为高斯分布的随机变量,满足:

$$\langle\eta(x,\tau)\eta(x',\tau')\rangle_\eta = 2\delta^4(x-x')\delta(\tau-\tau')$$

$$\langle\eta_1\eta_2\cdots\cdots\eta_n\rangle_\eta = \sum_{\substack{\text{所有可能}\\\text{的组合}}}\prod_{ij}\langle\eta_i\eta_j\rangle \tag{1.3}$$

平均值 $\langle\cdots\rangle_\eta$ 表示对 η 的分布取平均:

$$\langle\cdots\rangle_\eta = \frac{\int d[\eta](\cdots)e^{-\frac{1}{4}\int dx^4 d\tau\eta^2(x,\tau)}}{\int d[\eta]e^{-\frac{1}{4}\int dx^4 d\tau\eta^2(x,\tau)}} \tag{1.4}$$

一旦我们得出了 Langevin 方程(1.2)的解 $\phi_\eta(x,\tau)$ 表为 η 和 τ 的函数,代入由 ϕ_η 构成的物理量 $F[\phi_\eta(x,\tau)]$,对 η 的分布求平均,令 $\tau\to\infty$ 时有:

$$\lim_{\tau\to\infty}\langle F[\phi_\eta(x,\tau)]\rangle_\eta = \langle F[\phi]\rangle_{S_E}$$

其中 $\langle F[\phi]\rangle_{S_E}$ 表示通常欧氏场论的平均值,即得到了通常的路径积分量子化的结果. 这就是随机量子化的基本思想方法.

在格点上,我们对 $U(N)$, $SU(N)$ 规范群链变量所满足的 Langevin 作如下推广

$$\mathrm{Tr}\left[U_l^{-1}T^a\frac{\partial U_l}{\partial\tau}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}_l}T^aU_l - \frac{\delta S}{\delta\tilde{U}_l^+}U_l^+T^a\right\} + i\mathrm{Tr}\eta^a \tag{1.5}$$

其中, $U_l(\tau)$ 为链上的群变量, l 为链指标, (n,μ) 的简写. T^a 为规范群的生成元,对 $U(N)$ 群 $a=0,1,2,\cdots,N^2-1$. 对 $SU(N)$ 群 $a=1,2,3,\cdots,N^2-1$. $S=\beta\sum_p\left[2-\frac{1}{N}(\mathrm{Tr}U_p+\mathrm{Tr}U_p^+)\right]$ 为 Wilson 作用量. η_l^a 为一定义在链 l 上的 $N\times N$ 随机矩阵. 由对应关系:

$$U_l(\tau) = e^{iA_l^a(\tau)T^a} \tag{1.6}$$

和 Baker-Hausdorff 公式

$$e^Ae^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots} \tag{1.7}$$

可以证明(细节见附录 A),在 $a\to 0$ 的情况下,(1.5)式变为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}A_\mu^a(x,\tau) = -\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x,\tau)} + \eta_\mu^a(x,\tau) \tag{1.8}$$

即过渡到连续 Q. C. D. 理论中的随机量子化方案的 Langevin 方程[2].

对 $U(N)$ 规范群情况,经过简单的矩阵运算,可以将(1.5)写成简洁的形式(附录 A(ii))

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U_l = \frac{\beta}{2N}X_l\cdot U_l + i\eta_l\cdot U_l \tag{1.9}$$

其中, U_l 为幺正矩阵, $\eta_l = T^a\eta_l^a$, X_l 的定义为:

$$X_l = -\sum_{\{P_l\}}(U_{P_l} - U_{P_l}^+) \tag{1.10}$$

$\sum_{\{P_l\}}$ 表示遍及和 U_l 链相连的所有元格 U_{P_l} 的求和. 与式(1.9)相应的共轭方程为

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U_l^+ = \frac{\beta}{2N}U_l^+X_l^+ - iU_l^+\eta_l^+ \tag{1.11}$$

对 $SU(N)$ 群的链变量 U_l，由 (1.5) 式得到的结果较为复杂：

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U_l=\frac{\beta}{2N}X_lU_l+i\eta_lU_l+\frac{1}{2N}\mathrm{Tr}\left\{U_l^{+1}\frac{\partial}{\partial\tau}U_l-\frac{\beta}{2N}X_l\right\}U_l \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U_l^+=\frac{\beta}{2N}U_l^+X_l^+-iU_l^+\eta_l^++\frac{1}{2N}\mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial U_l^+}{\partial\tau}U_l-\frac{\beta}{2N}X_l^+\right\}U_l^+ \tag{1.13}$$

很明显，在大 N 的情况下，(1.12)、(1.13) 分别退化为 (1.9)、(1.11)。 链变量所满足的方程 (1.9) 到 (1.13) 式中的随机矩阵 η_l 满足高斯分布，于是：

$$\langle\cdots\rangle_\eta=\frac{1}{Z_\eta}\int[d\eta]e^{-\frac{1}{2}\sum_l\int_0^\infty(\mathrm{Tr}\eta_l^+\eta_l)d\tau}(\cdots) \tag{1.14}$$

这里随机矩阵的测度定义为

$$\int[d\eta]=\prod_l\prod_\tau\prod_{ij}\int_{-\infty}^{\infty}d\eta_{ij}^l(\tau)d\eta_{ij}^{*l}(\tau) \tag{1.15}$$

由 (1.14) 可得出随机变量 η 之间的关联：

$$\langle\eta_{ij}^l(\tau)\rangle_\eta=0 \tag{1.16}$$

$$\langle\eta_{ij}^l(\tau)\eta_{km}^{l'}(\tau')\rangle_\eta=4\delta_{ll'}\delta_{im}\delta_{jk}\delta(\tau-\tau') \tag{1.17}$$

不难证明，随机变量的关联还满足如下的 Wick 分解：

$$\langle\eta_1\eta_2\cdots\eta_i\cdots\eta_j\cdots\rangle_\eta=\sum_{\left(\substack{\text{所有可能}\\\text{的组合}}\right)}\prod_{\langle ij\rangle}\langle\eta_i\eta_j\rangle$$

这里 $\eta_i\equiv\eta_{km}^l(\tau)$. Langevin 方程 (1.9)—(1.13) 及随机变量的高斯分布 (1.14) 将给出格点规范场论的全部信息。

二、 Wilson 圈变量的 Langevin 方程

有了链变量 U_l 所满足的方程，我们进一步推出 Wilson 圈变量所满足的方程。对任意的一个 Wilson 圈 c (图 1) 的圈变量 $\mathrm{Tr}w_c$

$$\mathrm{Tr}w_c=\mathrm{Tr}\{U_1U_2U_3\cdots U_i^+\cdots U_n\} \tag{2.1}$$

对 τ 求导得

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{Tr}w_c=\mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}w_c\right\}$$
$$=\mathrm{Tr}\{\dot U_1U_2\cdots\}+\mathrm{Tr}\{U_1\dot U_2\cdots\}+\cdots+$$
$$\cdots+\mathrm{Tr}\{U_1U_2\cdots\dot U_n\} \tag{2.2}$$

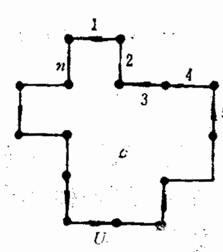

图 1

分别将 (1.9)、(1.11) 代入上式，可以得到 $U(N)$ 群的 Wilson 圈变量所满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{Tr}w_c=\frac{\beta}{2N}\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c}X_lw_c(l)+\sum_{l\in\bar c}X_l^+w_{\bar c}^+(l)\right\}+\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c}\tilde\eta_lw_c(l)+\sum_{l\in\bar c}\tilde\eta^+w_{\bar c}(l)\right\} \tag{2.3}$$

这里，$\bar c$ 表示和 c 反向的 Wilson 圈. $\tilde\eta=i\eta$, $l\in c$ 表示 $U_l\in c$、$l\in\bar c$ 表示 $U_l^+\in c$,

$$w_c(l) = P_c(l)\left\{\prod_{l\in c} U_l \prod_{l^+\in c} U_l^+\right\} = U_l U_{l+1}^+ \cdots U_n^+ U_1 \cdots U_{l-1}^+ \tag{2.4}$$

$$w_{\bar{c}}(l) = P_{\bar{c}}(l)\left\{\prod_{l\in c} U_l \prod_{l^+\in c} U_l^+\right\} = U_l^+ U_{l-1} \cdots U_1^+ U_n \cdots U_{l+1} \tag{2.5}$$

$$w_{\bar{c}}^+(l) = U_{l+1}^+ \cdots U_n^+ U_1 \cdots U_{l-1}^+ U_l = w_c(l+1) \tag{2.6}$$

算符 $P_c(l)$、$P_{\bar{c}}(l)$ 分别为以链 l 为始沿有向闭线段 c、$\bar{c}$ 的编序。在 c 上为 U_l 的元素，在 $\bar{c}$ 上为 U_l^+. 同样，将(1.12)、(1.13)代入(2.2)式，也可以得到 $SU(N)$ 群的圈变量所满足的方程

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{Tr}w_c &= \frac{\beta}{2N}\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c} X_l w_c(l) + \sum_{l\in\bar{c}} X_l^+ w_{\bar{c}}^+(l)\right\}\\ &+ \mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c}\tilde{\eta}_l w_c(l) + \sum_{l\in\bar{c}}\tilde{\eta}_l^+ w_{\bar{c}}^+(l)\right\}\\ &+ \frac{1}{2N}\left\{\sum_{l\in c} Y_l \mathrm{Tr}w_c(l) + \sum_{l\in\bar{c}} Y_l^+ \mathrm{Tr}w_{\bar{c}}^+(l)\right\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

这里

$$Y_l = \mathrm{Tr}\left\{U_l^+\frac{\partial}{\partial\tau}U_l - \frac{\beta}{2N}X_l - \tilde{\eta}_l\right\}$$

$$Y_l^+ = \mathrm{Tr}\left\{\frac{\partial}{\partial\tau}(U_l^+)U_l - \frac{\beta}{2N}X_l^+ - \tilde{\eta}_l^+\right\} \tag{2.8}$$

(2.3)、(2.7)式分别为 $U(N)$ 群和 $SU(N)$ 群的圈变量所满足的 Langevin 方程. 在下一节，我们将试图寻找这些方程的解的形式.

三、随机方程的解的形式

当 $\beta=0$ 时，方程(1.9)式变成如下形式

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U^0 = \tilde{\eta}U^0 \tag{3.1}$$

U^0 表示 $\beta=0$ 的零级解，将(3.1)式两边积分得:

$$U^0(\tau) - U^0(0) = \int_0^\tau \tilde{\eta}(t')U^0(t')dt' \tag{3.2}$$

由于我们仅限于讨论稳态的随机过程，初始状态如何对过程本身不产生影响. 因此可以选择"初始"条件 $U(\tau)|_{\tau=0}=1$. 就有 $U^0(0)=1$. 逐步迭代(3.2)式，就可以得到如下形式的解

$$\begin{aligned}U^0(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_0^\tau dt_1\cdots\int_0^\tau dt_n T\{\tilde{\eta}(t_1)\tilde{\eta}(t_2)\cdots\tilde{\eta}(t_n)\}\\ &= T\exp\left\{\int_0^\tau \tilde{\eta}(\tau')d\tau'\right\}\end{aligned} \tag{3.3}$$

在 $\beta\neq 0$ 时，设 U 的形式为 $U=U^0\cdot v$. 由(1.9)式可以得到 v 所满足的方程

$$\dot{v} = \frac{\beta}{2N}U^{0^{-1}}XU^0 v \tag{3.4}$$

Wilson 圈的解可以由 $U(\tau)$ 来构成

$$w_c(l) = P_c(l)\left\{\prod_{l\in c} U_l(\tau) \prod_{l^+\in c} U_l^+(\tau)\right\} \tag{3.5}$$

由 $U_l(\tau) = U_l^0(\tau)v_l$，(3.5) 又可以写成

$$w_c(l) = P_c(l)\{w_c^0(l,\tau)\cdot V_c(l,\tau)\} \tag{3.6}$$

这里:

$$W_c^0(l,\tau) = P_c(l)\left\{\prod_{l\in c} U_l^0(\tau)\prod_{l^+\in c} U^{+0}_l(\tau)\right\} \tag{3.7}$$

$$V_c(l,\tau) = P_c(l)\left\{\prod_{l\in c} v_l(\tau)\prod_{l^+\in c} v_l^+(\tau)\right\} \tag{3.8}$$

对 $SU(N)$ 群的链，圈变量所满足的随机方程 (1.12) 的解同样有上述结果.

四、 随机方程和 Schwinger-Dyson 方程

在这一节里，我们将说明，当体系趋向平衡态 ($\tau\to\infty$) 时，Wilson 圈变量的 Langevin 方程 (2.3)、(2.7) 恰好就是格点理论中很重要的 Schwinger-Dyson 方程——一个 Wilson 圈满足的方程.

由 § 2 的 (2.3) 式，两边分别对随机变量 η 取平均

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{Tr}w_c(\tau)\right\rangle_\eta = \frac{\beta}{2N}\left\langle\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c} X_l w_c(l) + \sum_{l\in\bar c} X_l^+ w_{\bar c}^+(l)\right\}\right\rangle_\eta$$
$$+\left\langle\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c}\tilde\eta_l w_c(l) + \sum_{l\in\bar c}\tilde\eta^+ w_{\bar c}^+(l)\right\}\right\rangle_\eta \tag{4.1}$$

在 $\tau\to\infty$ 时，显然 (4.1) 式左边 $\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\mathrm{Tr}w_c\right\rangle_\eta\to 0$，右边第一项 $\langle\cdots\rangle_\eta|_{\tau\to\infty}\to\langle\cdots\rangle_{S_E}$. (4.1) 式变成

$$\frac{\beta}{2N}\left\langle\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c} X_l\cdot w_c(l) + \sum_{l\in\bar c} X_l^+ w_{\bar c}^+(l)\right\}\right\rangle_{S_E}$$
$$+\left\langle\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c}\tilde\eta_l w_c(l) + \sum_{l\in\bar c}\tilde\eta^+ w_{\bar c}^+(l)\right\}\right\rangle_\eta = 0 \tag{4.2}$$

利用 η 高斯分布的性质及 § 3 中得到 Langevin 方程的解的形式，附录 B 证明下列等式成立:

$$\langle\tilde\eta_{l_{ij}}(\tau)U^0_{l_{jk}}(\tau)\rangle_{\eta l} = -2N\langle U^0_{l_{ik}}(\tau)\rangle_\eta \tag{4.3}$$
$$\langle\tilde\eta_l(\tau)\cdot v_{l'}(\tau)\rangle_\eta = 0$$

于是 (4.2) 式中的第二项 (见附录 B)

$$\left\langle\mathrm{Tr}\left\{\sum_{l\in c}\tilde\eta_l w_c(l) + \sum_{l\in\bar c}\tilde\eta^+ w_{\bar c}^+(l)\right\}\right\rangle_\eta\Bigg|_{\tau\to\infty}$$
$$= -2N\cdot L\langle\mathrm{Tr}w_c\rangle_{S_E} \tag{4.4}$$

L 表示圈 c 的长度. 因此，处于平衡态时，Wilson 圈的 Langevin 方程就是:

$$\langle \mathrm{Tr} w_c \rangle_{S_E} = \frac{\beta}{4N^2 L} \left\langle \mathrm{Tr} \left\{ \sum_{l \in c} X_l w_c(l) + \sum_{l \in \bar{c}} X_l^+ w_{\bar{c}}^+(l) \right\} \right\rangle_{S_E} \tag{4.5}$$

在平均值的意义上

$$\mathrm{Tr} w_c = \frac{\beta}{4N^2 L} \left\{ \mathrm{Tr} \sum_{l \in c} X_l \cdot w_c(l) + \mathrm{Tr} \sum_{l \in \bar{c}} X_l^+ w_{\bar{c}}^+(l) \right\} \tag{4.6}$$

即为格点理论上熟知的 Schwinger-Dyson 方程[6]当 $N = 1$ 的 $U(1)$ 情况，(4.5) 和 [7] 得到的结果一致. (4.6)式可以用图形形象地表示如图 2 .

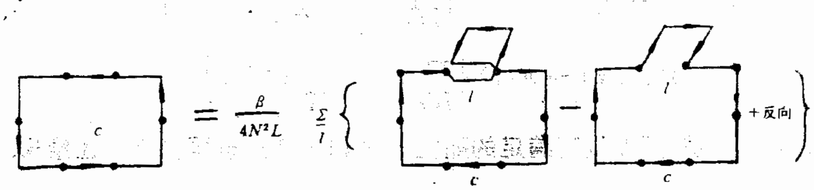

图 2

同样，对 $SU(N)$ 规范群的情况，在 $\tau \to \infty$ 时，(2.7)式对 η 的平均值

$$\begin{aligned} &\frac{\beta}{2N} \left\langle \mathrm{Tr} \left\{ \sum_{l \in c} X_l \cdot w_c(l) + \sum_{l \in \bar{c}} X_l^+ w_{\bar{c}}^+(l) \right\} \right\rangle_{S_E} \\ &+ \left\langle \mathrm{Tr} \left\{ \sum_{l \in c} \tilde{\eta}_l w_c(l) + \sum_{l \in \bar{c}} \tilde{\eta}_l^+ w_{\bar{c}}^+(l) \right\} \right\rangle_\eta \\ &+ \frac{1}{2N} \left\langle \sum_{l \in c} y_l \cdot \mathrm{Tr} w_c(l) + \sum_{l \in \bar{c}} y_l^+ \cdot \mathrm{Tr} w_{\bar{c}}^+(l) \right\rangle_\eta = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

这里:

$$\begin{aligned} y_l &= -\mathrm{Tr} \left\{ \frac{\beta}{2N} X_l + \tilde{\eta}_l \right\} \\ y_l &= -\mathrm{Tr} \left\{ \frac{\beta}{2N} X_l^+ + \tilde{\eta}_l^+ \right\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

除公式 (4.3) 式之外，还可证明下式成立:

$$\langle \mathrm{Tr} \tilde{\eta}_l(\tau) \cdot U_{l_{jk}}^0(\tau) \rangle_\eta = -2 \langle U_{l_{jk}}^0(\tau) \rangle_\eta \tag{4.9}$$

计算 (4.7) 式 (附录 B) 可得

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Tr} w_c \rangle_{S_E} = \frac{\beta}{4N \cdot K \cdot L} &\left\langle \sum_{l \in c} \mathrm{Tr} \left\{ \left(X_l - \frac{1}{2N} \mathrm{Tr} X_l \right) \cdot w_c(l) \right\} \right. \\ &\left. + \sum_{l^+ \in c} \mathrm{Tr} \left\{ \left(X_l^+ - \frac{1}{2N} \mathrm{Tr} X_l^+ \right) \cdot w_{\bar{c}}^+(l) \right\} \right\rangle_{S_E} \end{aligned} \tag{4.10}$$

其中，$K = N - \frac{1}{2N}$. (4.10)式即为 $SU(N)$ 群格点上的 Wilson 单圈变量满足的 Schwinger-Dyson 方程. 近年来，对一个 Wilson 圈所满足的 Schwinger-Dyson 方程有过许多讨论[6]. 这些方程在格点理论中的地位很重要，它包含了体系的所有动力学信息. 但这类方程的具体求解是较困难的. 随机量子化方法可能提供一种进一步探讨和计算机模拟计算 $\mathrm{Tr} w_c$ 的可能途径.

结论: Wilson 圈变量的 Langevin 方程在平衡态时就是通常的 Schwinger-Dyson 方

程这一点说明我们在格点上建立的规范场随机量子化方案是合理和可行的. 进一步的讨论将会知道这一随机量子化方案的确和费曼的路径积分量子化方案等价.

附　录 A

(i) §1 中的 (1.5) 式

$$\mathrm{Tr}\left[U_l^{-1}T^a\frac{\partial U_l}{\partial\tau}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}_l}T^aU_l-\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}_l^+}U_l^+T^a\right\}+i\mathrm{Tr}\eta_l^a \tag{A.1}$$

式中 $U_l\doteq e^{iA_\mu^aT^a}$. 在格距 a 趋于零的情况下:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}U_{n,\mu}=\frac{\partial U_{n,\mu}}{\partial A_\mu^a}\cdot\frac{\partial A_\mu^a}{\partial\tau}\simeq\frac{\partial A_\mu^a}{\partial\tau}\{iT^aU_{n,\mu}+\triangle\} \tag{A.2}$$

$\triangle$ 为正比于 a 一次幂以上的小量. 因此,

$$\mathrm{Tr}\left[U_{n,\mu}^{-1}T^a\frac{\partial U_{n,\mu}}{\partial\tau}\right]\cong i\mathrm{Tr}[U_{n,\mu}^{-1}T^aT^bU_{n,\mu}]\cdot\frac{\partial A_\mu^b}{\partial\tau}=\frac{i}{2}\frac{\partial A_\mu^a}{\partial\tau} \tag{A.3}$$

其中 $\mathrm{Tr}(T^aT^b)=\frac{1}{2}\delta_{ab}$. 同样

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a}&=\frac{\delta S}{\delta U_{ij}}\cdot\frac{\delta U_{ij}}{\delta A_\mu^a}+\frac{\delta S}{\delta U_{ij}^+}\cdot\frac{\delta U_{ij}^+}{\delta A_\mu^a}\\&=\mathrm{Tr}\left\{\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}}\cdot\frac{\delta U}{\delta A_\mu^a}+\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}^+}\cdot\frac{\delta U^+}{\delta A_\mu^a}\right\}\end{aligned} \tag{A.4}$$

在格距 a 趋于零有:

$$\begin{cases}\dfrac{\delta U^+}{\delta A_\mu^a}=-iU_{n,\mu}^+T^a+\triangle\\[2ex]\dfrac{\delta U}{\delta A_\mu^a}=iT^aU_{n,\mu}+\triangle\end{cases} \tag{A.5}$$

因此:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a}\cong i\mathrm{Tr}\left\{\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}_{n,\mu}}T^aU_{n,\mu}-\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}_{n,\mu}^+}\cdot U_{n,\mu}^+T^a\right\} \tag{A.6}$$

由 (A.3), (A.6) 代人 (A.1) 即可得

$$\frac{\partial A_\mu^a}{\partial\tau}=-\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a}+\eta^a \tag{A.7}$$

其中: $\eta^a=2\mathrm{Tr}\eta^a$. (A.7) 即为连续理论中的 Langevin 方程:

(ii) 由 (A.1) 式,两边乘上 T_{ij}^a、对 $U(N)$ 群,指标 a 求和由 0 到 N^2-1, 得

$$T_{ij}^aT_{km}^a\frac{\partial U_{ml}}{\partial\tau}U_{lk}^{-1}=\frac{1}{2}T_{ij}^aT_{lk}^a\left\{\left(U\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}}\right)_{kl}-\left(\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}^+}U^+\right)_{kl}\right\}+iT_{ij}^a\eta_{mm}^a \tag{A.8}$$

由公式:

$$\sum_a T_{ij}^aT_{km}^a=\frac{1}{2}\delta_{im}\delta_{jk} \tag{A.9}$$

(A.8) 式变成

$$\left(\frac{\partial U}{\partial\tau}U^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left\{U\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}}-\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}^+}U^+\right\}+i\eta \tag{A.10}$$

也即:

$$\frac{\partial U}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\left\{U\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}}-\frac{\delta S}{\delta\tilde{U}^+}U^+\right\}U+i\eta\cdot U \tag{A.11}$$

其中,随机矩阵 η 为 $\eta=\sum_a T^a\eta^a$, $\eta^+=\eta$. 定义链上算符 $\hat{E}_{n\mu}$

$$\hat{E}_{n,\mu} = U_{n,\mu}\frac{\delta}{\delta \tilde{U}_{n,\mu}} - \frac{\delta}{\delta \tilde{U}^+_{n,\mu}} U^+_{n,\mu} \tag{A.12}$$

$$\hat{E}_{n,\mu}(S) = U_{n,\mu}\frac{\delta S}{\delta U_{n,\mu}} - \frac{\delta S}{\delta \tilde{U}^+_{n,\mu}} U^+_{n,\mu} \tag{A.13}$$

将纯规范场的作用量 $S = \beta\sum_p\left[2 - \frac{1}{N}(\mathrm{Tr}U_p + \mathrm{Tr}U_p^+)\right]$ 代入上式得:

$$\hat{E}_{n,\mu}(S) = \frac{\beta}{N}\sum_{\{P_{n,\mu}\}}\{U_{P_{n,\mu}} - U^+{}_{P_{n,\mu}}\} \equiv \frac{\beta}{N} X_{n,\mu} \tag{A.14}$$

从而，(A.11) 变成

$$\frac{\partial U_{n,\mu}}{\partial \tau} = \frac{\beta}{2N} X_{n,\mu}U_{n,\mu} + i\eta_{n,\mu}U_{n,\mu} \tag{A.15}$$

即为文章中的 (1.9) 式.

附 录 B

这里给出正文中的 (4.3) 式

$$\langle \tilde{\eta}^l_{ij}(\tau)U^0{}_{l\,jk}(\tau)\rangle_\eta = -2N\langle U^0{}_{l\,ik}(\tau)\rangle_\eta \tag{B.1}$$

的证明. 由

$$U^0{}_{l\,jk}(\tau) = \left\{T\exp\left[\int_0^\tau \tilde{\eta}_l(\tau')d\tau'\right]\right\}_{jk} \tag{B.2}$$

于是有

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{\eta}^l{}_{ij}(\tau)U^0{}_{l\,jk}(\tau)\rangle_\eta \\
&= \left\langle \tilde{\eta}^l{}_{ij}(\tau)\sum_{n=0}^\infty\left[\int_0^\tau \tilde{\eta}_l(\tau_1)d\tau_1\int_0^{\tau_1}\tilde{\eta}_l(\tau_2)d\tau_2\cdots\right]_{jk}\right\rangle_\eta \\
&= \sum_{n=1}^\infty\int_0^\tau\langle \tilde{\eta}^l{}_{ij}(\tau)\tilde{\eta}^l{}_{j\sigma}(\tau_1)\rangle_\eta d\tau_1\left\langle\left[\int_0^{\tau_1}\underbrace{\tilde{\eta}_l(\tau_2)d\tau_2\cdots}_{n-1}\right]_{\sigma k}\right\rangle_\eta \\
&= -4\sum_{n=1}^\infty\int_0^\tau \delta_{i\sigma}\cdot\delta_{jj}\delta(\tau-\tau_1)d\tau_1\left\langle\left[\int_0^{\tau_1}\tilde{\eta}_l(\tau_2)d\tau_2\cdots\right]_{\sigma k}\right\rangle_\eta \\
&= -2N\langle U^0{}_{l\,ik}(\tau)\rangle_\eta
\end{aligned}$$

同样的方法可以证明

$$\langle \tilde{\eta}_l(\tau)v_l'(\tau)\rangle_\eta = 0 \tag{B.3}$$

$$\langle \mathrm{Tr}\tilde{\eta}_l(\tau)U^0{}_{l\,jk}(\tau)\rangle_\eta = -2\langle U^0{}_{l\,jk}(\tau)\rangle_\eta \tag{B.4}$$

这分别是正文中的 (4.3) 第二式和 (4.9) 式.

有了 (B.1)、(B.3)，我们来证明正文中的 (4.4) 式.

$$\begin{aligned}
&\sum_{l\in c}\langle \mathrm{Tr}\{\tilde{\eta}_l(\tau)W_c(l)\}\rangle_\eta \\
&\qquad = \sum_{l\in c}\langle \mathrm{Tr}\{\tilde{\eta}_l(\tau)P_c(l)[W_c^0(l)V_c(l)]\}\rangle_\eta
\end{aligned} \tag{B.5}$$

取某一个 l 做为例子

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\langle \tilde{\eta}_l(\tau)P_c(l)[W_c^0(l)V_c(l)]\rangle_\eta \\
&\qquad = \mathrm{Tr}\langle \tilde{\eta}_l(\tau)U_l^0(\tau)v_l(\tau)U^0_{l+1}(\tau)v_{l+1}\cdots U^0_{l-1}(\tau)v_{l-1}(\tau)\rangle_\eta
\end{aligned}$$

利用上面的两个公式

$$= \mathrm{Tr}\{\langle \tilde{\eta}_l(\tau)U_l^0(\tau)\rangle_\eta\langle v_l(\tau)U^0_{l+1}(\tau)v_{l+1}(\tau)\cdots U^0_{l-1}(\tau)v_{l-1}\rangle_\eta\}$$

$$= \{-2N\langle U^0{}_{l_{ik}}(\tau)\rangle_\eta \langle v_l(\tau)U^0_{l+1}(\tau)v_{l+1}(\tau)\cdots U^0_{l-1}(\tau)v_{l-1}\rangle_\eta\}$$
$$= -2N\langle \mathrm{Tr}\{U^0_l(\tau)v_l(\tau)U^0_{l+1}(\tau)v_{l+1}(\tau)\cdots\}\rangle_\eta$$
$$= -2N\langle \mathrm{Tr} W_c(\tau)\rangle_\eta$$

于是:

$$\sum_{l\in c}\langle \mathrm{Tr}\{\tilde{\eta}_l(\tau)W_c(l)\}\rangle_\eta = -2N\sum_{l\in c}\langle \mathrm{Tr}W_c(\tau)\rangle_\eta \tag{B.6}$$

同理可得:

$$\left\langle \mathrm{Tr}\sum_{l\in\bar{c}}\tilde{\eta}_l^{+}W_{\bar{c}}^{+}(l)\right\rangle_\eta = -2N\sum_{l\in\bar{c}}\langle \mathrm{Tr}W_c(\tau)\rangle_\eta \tag{B.7}$$

两项相加，立即可得正文中的 (4.4) 式. 用类似的方法可以得到 $SU(N)$ 规范群的 (4.10) 式.

参　考　文　献

[1] G. Parisi, *Nucl. Phys.*, **B180** [FS2] (1981), 378.
[2] G. Parisi and Y. S. Wu, *Scientia Sinica*, **24**(1981), 483.
[3] G. Parisi et al., *Nucl. Phys.*, **B215** (1983), 256.
[4] A. Guha and S.-C. Lee, *Phys. Letts.*, **134B** (1984), 216.
[5] J. Greensite, *Phys. Letts.*, **121B** (1983), 169.
R. Jengo and N. Parga, *Phys. Letts.*, **134B** (1984), 221.
[6] C. Brower and M. Nauenberg, *Nucl. Phys.*, **B180** [FS2], (1981), 221.
[7] G. Aldazabal et al., *Phys. Letts.*, **125B** (1983), 305.

THE STOCHASTIC EQUATIONS IN THE LATTICE GAUGE FIELD THEORY AND THE SCHWINGER-DYSON EQUATION FOR THE WILSON LOOP VARIABLE

XUE SHE-SHENG　XIAN DING-CHANG

(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ABSTRACT

The method of stochastic quantization is applied to the lattice gauge field theory and the Langevin equations for the link and Wilson loop variables are established for the $U(N)$ and $SU(N)$ cases. The relation between the Langevin equation and the Schwinger-Dyson equation for the Wilson loop is discussed.