第9卷 第6期　　高能物理与核物理　　Vol. 9, No. 6
1985年11月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Nov., 1985

$SO(10)$ 模型中的一类 Jackiw-Rebbi 零能束缚态

李新洲　　汪克林　　张鉴祖
（复旦大学）　（中国科学技术大学）　（山西大学）

摘　要

本文讨论了 $SO(10)$ 大统一模型的球对称磁单极以及在这个模型中的 Jackiw-Rebbi 型费米子-磁单极零能束缚态问题．结果表明，在这个理论中并不存在这样的零能束缚态．

一、引　言

’tHooft-Polyakov 磁单极[1] 的存在，是自发对称性破缺的非阿贝尔规范理论中最令人注目的事实之一．人们对于在 ’tHooft-Polyakov 型磁单极外势中或 Julia-Zee 双子[2]外势中费米子的束缚态问题表现出很大的兴趣[3-10]．文献[11]和[12]指出，对于 $SU(5)$ 球对称基本磁单极，并不存在 Jackiw-Rebbi 型[3]费米子-磁单极的零能束缚态．文献[11]采用的是 Dirac 旋量和磁单极的吴-杨 ansatz，文献[12]采用的是 Weyl 旋量和 Dokos-Tomaras 的 $SU(5)$ 磁单极[13]．

在本文中，我们打算考察 $SO(10)$ 大统一理论的球对称基本磁单极情形．结果发现，在这个模型中 Jackiw-Rebbi 型费米子-磁单极零能束缚态也不存在．

二、$SO(10)$ 模型的磁单极

考察一个 $SO(10)$ 规范理论，它被两个 Higgs 多重态的真空期望值自发破缺到 $SU(3)_c\times U(1)_{em}$．一个 Higgs 多重态 Φ 处于 $SO(10)$ 的 $\underline{45}$ 共轭表示，另一个 Higgs 多重态 H 处于 $SO(10)$ 的 $\underline{10}$ 维表示．Φ 和 H 的真空期望值是

$$\langle\Phi\rangle = a\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} &&&&& 2&&&& \\ &&&&& &2&&& \\ &&&&& &&2&& \\ &&&&& &&&-3& \\ &&&&& &&&&-3 \\ \hline -2&&&&& &&&& \\ &-2&&&& &&&& \\ &&-2&&& &&&& \\ &&&3&& &&&& \\ &&&&3& &&&& \end{array}\right],\quad \langle H\rangle = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\b\\0\\0\\0\\0\\b \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

本文 1984 年 2 月20日收到．

系统的拉格朗日密度是

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) + \mathrm{Tr}(\mathscr{D}_\mu\Phi)^2 + |D_\mu H|^2 - V(\Phi,H),$$

$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig[W_\mu,W_\nu],$$

$$W_\mu = \frac{1}{2}W_\mu^{ij}T^{ij}, \quad W^{ij} = -W^{ji}, \quad i,j = 1,2,\cdots,10,$$

$$D_\mu H = \partial_\mu H + igW_\mu H,$$

$$\mathscr{D}_\mu\Phi = \partial_\mu\Phi + ig[W_\mu,\Phi]. \tag{2.2}$$

$SO(10)$ 的生成元 T^{ij} 可以写成

$$T = \begin{pmatrix} A+C & B+D \\ B-D & A-C \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

此处，A、B、C 是 5×5 的反对称矩阵，而 D 是 5×5 的对称矩阵.

Wilkinson 和 Goldhaber[13] 曾证明了如下的定理：设大统一群 G 被破缺到一个子群 H. 令 $\boldsymbol{L}$ 是轨道角动量的生成元，$\boldsymbol{T}$ 是 G 的 $SU(2)$ 子群的生成元，而 $\boldsymbol{I}$ 是 H 的 $SU(2)$ 子群的生成元，此处，$\boldsymbol{I}$ 满足 $[\boldsymbol{I}, Q_M] = 0$. 于是，当且仅当 $Q_M = I_3 - T_3$ 时，弦位势可以被规范变换到在 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{T}$ 变换下是球对称的位势.

在磁单极核的外部，可通过 Dirac 弦位势 $\boldsymbol{A}_D$

$$\boldsymbol{A}_D = Q_M(1-\cos\theta)\frac{\hat{\phi}}{r\sin\theta}, \tag{2.4}$$

定义一个电荷算符 Q_M，这里 Q_M 是 $SO(10)$ 的某一表示中的矩阵。显然，Q_M 必定是电磁荷算符 Q_{em} 和色生成元 Q_c 的线性组合. 应用四个条件:

(i) 点磁单极的稳定性条件[14];

(ii) Dirac 量子化条件;

(iii) 层子电荷的 triplicity 条件;

(iv) Wilkinson 和 Goldhaber 定理,

容易求得最小磁荷是 $g = 1/2e$，最小的无色磁荷是 $g = 3/2e$.

将 $SU(2)$ 的三个生成元嵌入到 $SO(10)$ 中，我们的目的是要找到满足下列等式的一般 ansätz:

$$[L_i + T_i, W_j] = i\epsilon_{ijk}W_k, \quad W_0 = 0,$$

$$[L_i + T_i, \Phi] = 0, \quad (L_i + T_i)H = 0. \tag{2.5}$$

为了考察上述解的对称性，要求这些解在最大可能解下是不变的，同时要求这些解在 $SO(10)$ 的最大可能子群 S 的变换下也是不变的. 而且 S 应与球对称性 $\boldsymbol{L}+\boldsymbol{T}$ 相容. 这就是说，若 S_l 为 S 的生成元，则应有

$$[S_l, \Phi] = 0, \quad S_l H = 0, \quad [S_l, W_j] = 0,$$

$$[S_l, L_j + T_j] = 0. \tag{2.6}$$

对于 $eg = 1/2$ 磁单极情形，在将 $SU(2)$ 的表示嵌入到 $SO(10)$ 的 $\underline{10}$ 维表示时，存在两种情形：(a) $\underline{10} \to 2(\underline{2}) + 6(\underline{1})$; (b) $\underline{10} \to 4(\underline{2}) + 2(\underline{1})$. 显然，情形 (b) 的磁单极是不稳定的，并且会衰变到情形 (a).

考虑 $SU(2)$ 嵌入到 $SO(10)$ 的情形 $\underline{10}\to 2(\underline{2})+6(\underline{1})$ 由

$$
T_1=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&\tau_1&\\&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&-\tau_1&\\&&&0\end{matrix} & \end{array}\right],\quad
T_2=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&\tau_2&\\&&&0\end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&\tau_2&\\&&&0\end{matrix}\end{array}\right],
$$

$$
T_3=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&\tau_3&\\&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}0&&&\\&0&&\\&&-\tau_3&\\&&&0\end{matrix} & \end{array}\right]. \tag{2.7}
$$

给出，此处，$\tau_a(a=1,2,3)$ 为内禀 Pauli 矩阵．取 S 是由

$$
S_1=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}\sigma_1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-\sigma_1&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{matrix} & \end{array}\right],\quad
S_2=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}\sigma_2&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-\sigma_2&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{matrix} & \end{array}\right],
$$

$$
S_3=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}\sigma_3&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-\sigma_3&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{matrix} & \end{array}\right],\quad
S_4=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1&&&&\\&1&&&\\&&-1&&\\&&&-1&\\&&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-1&&&&\\&-1&&&\\&&1&&\\&&&1&\\&&&&0\end{matrix} & \end{array}\right],
$$

$$
S_5=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1&&&&\\&1&&&\\&&0&&\\&&&0&\\&&&&0\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}-1&&&&\\&-1&&&\\&&0&&\\&&&0&\\&&&&0\end{matrix} & \end{array}\right]. \tag{2.8}
$$

生成的 $SU(2)\times U(1)\times U(1)$.

球对称的、S 不变的、并且在 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 的同时反演下是不变的场位形的普遍形式是

$$
H(\boldsymbol{r})=\frac{1}{g}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\h(r)\\0\\0\\0\\0\\h(r)\end{bmatrix},
$$

$$
\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{g}\left[\begin{array}{cccc:cccc}
0 & & & & \phi_1(r) & & & \\
 & 0 & & & & \phi_1(r) & & \\
 & & \phi_3(r)(\hat{y}\tau_2) & & & & [\phi_2(r)+\phi_3(r)(\hat{x}\tau_1+\hat{z}\tau_3)] & \\
 & & & 0 & & & & -2[\phi_1(r)+\phi_2(r)] \\
\hdashline
-\phi_1(r) & & & & 0 & & & \\
 & -\phi_1(r) & & & & 0 & & \\
 & & -[\phi_2(r)+\phi_3(r)(\hat{x}\tau_1+\hat{z}\tau_3)] & & & & \phi_3(r)(\hat{y}\tau_2) & \\
 & & & 2[\phi_1(r)+\phi_2(r)] & & & & 0
\end{array}\right],
$$

$$
W_i(\boldsymbol{r})=(\boldsymbol{T}\times\hat{r})_i\,\frac{K(r)-1}{gr}. \tag{2.9}
$$

以上,函数 $K(r)$、$\phi_j(r)\,(j=1,2,3)$ 和 $h(r)$ 是实函数,沿 $\hat{z}$ 方向,Φ 和H在无穷远处分别趋于它们的真空期望值 $\langle\Phi\rangle$ 和 $\langle H\rangle$. 由此,得

$$
h(r)\to bg,\ \ \phi_1(r)\to 2ag,\ \ \phi_2(r)\to -\frac{1}{2}ag,\ \ \phi_3(r)\to\frac{5}{2}ag,
$$
$$
K(r)\to\exp(-cr).\ \ (r\to\infty) \tag{2.10}
$$

三、在 $SO(10)$ 磁单极位势中费米子的方程

洛仑兹群的旋量表示 $(1/2,0)$ 和 $(0,1/2)$ 由两分量的 Weyl 旋量实现. 容易看到,若 χ_L 的变换如同表示 $(1/2,0)$,则 $\chi_R^c=-\sigma^2\chi_L^*$ 的变换如同 $(0,1/2)$;类似地,若 χ_R 的变换如同 $(0,1/2)$,则 $\chi_L^c=\sigma^2\chi_R^*$ 的变换如同 $(1/2,0)$.

在 $SO(10)$ 大统一模型中,每一代层子和轻子填入 $SO(10)$ 的旋量表示. 在这个理论中,用左手 Weyl 场描述费米子是方便的.

在旋量表示中,$SO(10)$ 的 45 个生成元 $\Sigma_{ij}=-\Sigma_{ji}$ 可通过 32×32 的矩阵 $T_i\,(i=1,2,\cdots 10)$ 构造出来

$$
\Sigma_{ij}=\frac{1}{2i}(\Gamma_i\Gamma_j-\Gamma_j\Gamma_i), \tag{3.1}
$$

此处,

$$
\Gamma_1=\sigma_1\times\sigma_1\times 1\times 1\times\sigma_2,\quad \Gamma_2=\sigma_1\times\sigma_2\times 1\times\sigma_3\times\sigma_2,
$$
$$
\Gamma_3=\sigma_1\times\sigma_1\times 1\times\sigma_2\times\sigma_3,\quad \Gamma_4=\sigma_1\times\sigma_2\times 1\times\sigma_2\times 1,
$$

$$\Gamma_5=\sigma_1\times\sigma_1\times 1\times\sigma_2\times\sigma_1,\quad \Gamma_6=\sigma_1\times\sigma_2\times 1\times\sigma_1\times\sigma_2,$$
$$\Gamma_7=\sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_1\times 1\times 1,\quad \Gamma_8=\sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_2\times 1\times 1,$$
$$\Gamma_9=\sigma_1\times\sigma_3\times\sigma_3\times 1\times 1,\quad \Gamma_{10}=\sigma_2\times 1\times 1\times 1\times 1. \tag{3.2}$$

这些 Γ_i 遵守 clifford 代数，

$$\Gamma_i\Gamma_j+\Gamma_j\Gamma_i=2\delta_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots,10) \tag{3.3}$$

在以上各式中，$\boldsymbol{\sigma}$ 是自旋 Pauli 矩阵，1 是 2×2 单位矩阵．手征算符为：

$$\Lambda=-i\Gamma_1\Gamma_2\cdots\Gamma_{10}=\sigma_3\times 1\times 1\times 1\times 1. \tag{3.4}$$

它把32维旋量表示 ϕ 分解为 ϕ_L 和其共轭部份 ϕ_R

$$\phi_L=\frac{1}{2}(1+\Lambda)\phi,\quad \phi_R=\frac{1}{2}(1-\Lambda)\phi. \tag{3.5}$$

此处，

$$\tilde{\Phi}_L=(u_1,u_2,u_3,\nu_l,d_1,d_2,d_3,e^-,d_1^c,d_2^c,d_3^c,e^+,-u_1^c,-u_2^c,-u_3^c,-\nu_l)_L, \tag{3.6}$$

生成元 Σ_{ij} 满足代数

$$[\Sigma_{ij},\Sigma_{kl}]=2i(\delta_{ik}\Sigma_{jl}+\delta_{jl}\Sigma_{ik}-\delta_{il}\Sigma_{jk}-\delta_{jk}\Sigma_{il}), \tag{3.7}$$

在所选择的基上，32×32 的矩阵 Σ_{ij} 分解为在对角线上的两个 16 × 16 矩阵．在下面，我们将应用作用于 ϕ_L 上的 16×16 矩阵．在这个表象中，$\boldsymbol{T}$ 也是 16×16 的矩阵：

$$(T_1)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{若 } (i,j)=(2,13),(8,11),(11,8),(13,2);\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{若 } (i,j)=(1,14),(7,12),(12,7),(14,1);\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

$$(T_2)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{i}{2}, & \text{若 } (i,j)=(1,14),(8,11),(12,7),(13.2);\\ -\dfrac{i}{2}, & \text{若 } (i,j)=(2,13),(7,12),(11,8),(14,1);\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases} \tag{3.8}$$

$$(T_3)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \text{若 } (i,j)=(7,7),(8,8),(13,13),(14,14);\\ -\dfrac{1}{2}, & \text{若 } (i,j)=(1,1),(2,2),(11,11),(12,12);\\ 0, & \text{其他情形.}\end{cases}$$

Higgs 场与费米子 ϕ_L^c 的 Yukawa 耦合为

$$\mathscr{L}_{\text{Yukawa}}=G\phi_L^cH\phi_L+h\cdot c, \tag{3.9}$$

此处，ϕ_L 是左手场，而 ϕ_L^c 是右手场．

综合上面的结果，容易得出层子和轻子的运动方程为：

$$\bar{\sigma}_\mu D_\mu\phi_R-GH(\boldsymbol{r})\phi_L=0,\quad \sigma_\mu D_\mu\phi_L+GH(\boldsymbol{r})\phi_R=0. \tag{3.10}$$

以上，$\sigma_\mu=(1,\boldsymbol{\sigma})$，$\bar{\sigma}_\mu=(1,-\boldsymbol{\sigma})$．

四、Jackiw-Rebbi 型费米子-磁单极零能束缚态

Jackiw-Rebbi 型费米子-磁单极束缚态[3] 是将非常重的磁单极处理为外势（即略去费

米子对磁单极的反作用),并且对于零能束缚态,因子 $\exp(-iEt)=1$,可设费米子场与 t 无关,故(3.10)化为

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{T}\times\hat{r})\right]\phi_{R(L)}+GH(r)\phi_{L(R)}=0, \tag{4.1}$$

应用(2.9)和(3.8),求得

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\hat{r})\right]\begin{bmatrix}d_3\\ e^+\end{bmatrix}_{R(L)}+Gh(r)\begin{bmatrix}d_3\\ e^+\end{bmatrix}_{L(R)}=0,$$

$$\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla-\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\hat{r})\right]\begin{bmatrix}u_2^c\\ u_1\end{bmatrix}_{R(L)}+Gh(r)\begin{bmatrix}u_2^c\\ u_1\end{bmatrix}_{L(R)}=0. \tag{4.2}$$

若定义 2×2 矩阵 $\phi_{R,L}$

$$\phi_{R,L}=(d_3,e^+)_{R,L}\tau^2, \tag{4.3}$$

利用关系式 $\boldsymbol{\tau}^T\tau^2=-\tau^2\boldsymbol{\tau}$,由(4.2)可得 $\phi_{R,L}$ 的矩阵方程

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla\phi_{R(L)}+\frac{i}{2}\frac{K(r)-1}{r}\boldsymbol{\sigma}\cdot\phi_{R(L)}(\boldsymbol{\tau}\times\hat{r})+Gh(r)\phi_{L(R)}=0, \tag{4.4}$$

由此式可见,已不必再区分 $\boldsymbol{\sigma}$ 矩阵和 $\boldsymbol{\tau}$ 矩阵.

因为 2×2 的矩阵 $\phi_{R,L}$ 的一般形式为

$$\phi_L(\boldsymbol{r})=\sigma_\mu L_\mu(\boldsymbol{r}),\quad \phi_R(\boldsymbol{r})=\sigma_\mu R_\mu(\boldsymbol{r}), \tag{4.5}$$

故可将(4.4)改写为

$$\begin{aligned}
&\partial_j L_j+\frac{K(r)-1}{r}L_j\hat{r}_j+Gh(r)R_0=0,\\
&\partial_j L_0+i\epsilon_{ikj}\partial_i L_k-\frac{K(r)-1}{r}L_0\hat{r}_j+Gh(r)R_j=0,\\
&\partial_j R_j+\frac{K(r)-1}{r}R_j\hat{r}_j+Gh(r)L_0=0,\\
&\partial_j R_0+i\epsilon_{ikj}\partial_i R_k-\frac{K(r)-1}{r}R_0\hat{r}_j+Gh(r)L_j=0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

由方程组(4.6),容易得出下面的等式

$$\begin{aligned}
&\partial_j(L_0R_j^*+L_jR_0^*)-i\epsilon_{ikj}\partial_i(R_k^*L_j)\\
&\quad+Gh(r)(|R_0|^2+R_jR_j^*+|L_0|^2+L_jL_j^*)=0,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

将(4.7)式积分,得

$$\int d^3\chi h(r)(|R_0|^2+R_jR_j^*+|L_0|^2+L_jL_j^*)=0. \tag{4.8}$$

由于稳定磁单极应使总能量极小,应用基态波函数中不存在节点的一般论述,容易看到,$h(r)$ 应不改变符号. 所以,(4.8)给出 $L_\mu(\boldsymbol{r})$ 和 $R_\mu(\boldsymbol{r})$ 恒等于零.

综上所述,对于通常质量标度的费米子,我们证明了对于标准的 $SO(10)$ 大统一理论球对称基本磁单极不存在 Jackiw-Rebbi 型费米子-磁单极零能束缚态.

以上讨论中 Higgs 属于 $\underline{10}$ 和 $\underline{45}$ 表示起关键作用. 但我们指出,考虑 $\underline{120}$ 和 $\underline{126}$ Higgs 后,并不改变本文的结果.

致谢：作者非常感谢 D. Amati 教授、倪光炯教授和马中骐博士的有益讨论.

参　考　文　献

[1] G. 'tHooft, *Nucl. Phys.*, **B79** (1974), 276; A. M. Polyakov, *Pis'ma ZETF*, **20** (1974), 430 [*JETP Lett.*, **20** (1974), 194]
[2] B. Julia and A. Zee, *Phys. Rev.* **D11** (1975), 2227.
[3] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3398.
[4] 王明中、汪克林、郑希特、冼鼎昌、章正刚，高能物理与核物理，**1**(1978)，35。
[5] A. S. Blaer, N. H. Christ and Ju-Fei Tang, *Phys. Rev.*, **D25** (1982), 2128.
[6] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **A75** (1983), 87.
[7] 李新洲、汪克林、张鉴祖，科学通报，**28**(1983)，1231；英文版 **29**(1984)，1307。
[8] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **80A** (1984), 311.
[9] 汪克林、张鉴祖，高能物理与核物理，**9**(1985)，161。
[10] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, Comm. in Theor. Phys., to be published.
[11] T. F. Walsh, P. Weisz and Tai Tsun Wu, *Nucl. Phys.*, **B232** (1984), 349.
[12] Li Xinzhou, Wang Kelin and Zhang Jianzu, *Nuov. Cim.*, **82A** (1984), 377.
[13] D. Wilkinson and A. S. Goldhaber, *Phys. Rev.* **D16** (1977), 1221.
[14] R. Brandt and F. Neri, *Nucl. Phys.*, **B161** (1979), 253.

A KIND OF JACKIW-REBBI TYPE FERMION-MONOPOLE ZERO-ENERGY BOUND STATES IN AN $SO(10)$ MODEL

Li Xin-zhou
(*Fudan University*)

Wang Ke-lin
(*University of Science and Technology of China*)

Zhang Jian-zu
(*Shanxi University*)

Abstract

The spherically symmetric monopole of $SO(10)$ grand unification model is discussed. The Jackiw-Rebbi type fermion-monopole zero-energy bound states are also considered in this model. It is shown that there is no zero-energy bound state in this theory.