

原子核的 $U(6/20)$ 超对称性及其 $Spin(6)$ 极限

朱培豫 曹雨芳 吴佑实
(上海铁道学院) (华东师范大学) (安徽机电学院)

一、引言

相互作用玻色子近似 (IBA) 模型成功地描写了某些偶偶核的性质^[1-3]. IBA 模型有三种极限对称性: 1) $U(5)$ 极限^[1], 相当于几何振动核, 2) $U(3)$ 极限^[2], 相当于一种特殊的对称转动核, 3) $O(6)$ 极限^[3], 相当于 γ —非稳转动核. 在这三种极限对称性下, 可以求出 IBA 哈密顿量的解析解, 而三种极限之间的中间结构可用数值计算来求解.

近几年来, 许多人用相同方法致力于研究奇核的性质, 例如美国 Drexel 组在 1983 年 9 月苏州核集体激发态国际会议上就 $U(6/20)$ 超对称性曾作过报告. 相互作用玻色子-费米子近似 (IBFA) 模型可以求解奇质量核^[4]. 这时哈密顿量为

$$H = H_B + H_F + V_{BF}$$

式中 H_B 为通常的玻色子哈密顿量, H_F 为费米子哈密顿量, V_{BF} 为玻色子-费米子相互作用部分. 一般说来, 必须用数值计算, 但是, 当单粒子轨道跟任一 IBA 极限对称性耦合时, 问题就大大简化.

当偶质量核心可以由任一 IBA 极限对称性描写, 奇粒子角动量取特定数值, 而玻色子与费米子之间相互作用具有特定形式时, 奇质量核就具有一种对称性结构. 按群论的语言, 当玻色子群结构同构于费米子群结构, 且这两结构可统一为旋量群时, 原子核就具有旋量对称性.

文献[5]与[6]详细讨论了玻色子 $O(6)$ 对称性与一个 $j = 3/2$ 费米子的 $SU(4)$ 对称性统一为 $Spin(6)$ 旋量对称性.

在讨论旋量对称性时, 奇质量核与偶质量核是分开来考虑的, 当把奇质量核与偶质量核统一联系起来时, 就把玻色子对称性与费米子对称性统一而成为超对称性^[1]. 文献[6]详细讨论了 $U(6/4)$ 超对称性的 $Spin(6)$ 极限, 这是一种单 j 超对称性.

近来, 正在开展多 j 超对称性的研究. 本文以及随后的几篇文章, 我们详细讨论了原子核的 $U(6/20)$ 超对称性.

二、 $U(6/20)$ 及其群链

如果核中奇粒子占有 $j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ 轨道, 则须要考虑 $U(6/20)$ 超群.

设核中玻色子数为 N , 费米子数为 M , 则玻色子数和费米子数之和为

$$N = N + M \quad (2.1)$$

$U(6/20)$ 的一阶和二阶 Casimir 算符的本征值为

$$C_1 = \mathcal{N} \quad (2.2)$$

$$C_2 = -15/2N + 15/28N^2 \quad (2.3)$$

$U(6/20)$ 的表示 $[N]$ 可以分解为 $U^{(B)}(6) \otimes U^{(F)}(20)$ 的表示即

$$\begin{array}{c}
 U(6/20) \\
 \underbrace{\text{[Diagram: 6 boxes with diagonal lines]}}_N \\
 \\
 = \underbrace{\text{[Diagram: 6 boxes]}}_{N-1} \bullet \\
 \oplus \underbrace{\text{[Diagram: 6 boxes]}}_{N-2} \square \\
 \oplus \underbrace{\text{[Diagram: 6 boxes]}}_{\dots} \square \\
 \oplus \underbrace{\text{[Diagram: 6 boxes]}}_{N-k} \left. \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\}^k
 \end{array} \quad (2.4)$$

等式右边的末项为 $k = 20$ 或 $N - k = 0$. 我们可以写成

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{N}] = & ([N]\{0\}) + ([N-1], \{1\}) + ([N-2]\{2\}) + \dots \\
 & + ([N-k], \{k\}) + \dots + \begin{cases} ([N-20]\{20\}) & N \geq 20 \\ ([0]\{N\}) & N < 20 \end{cases} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

式中第一项相当于 $N = \mathcal{N}$, $M = 0$ 的偶偶核, 第 2 项相当于紧邻的 $N = \mathcal{N} - 1$, $M = 1$ 的奇偶核, 第 3 项相当于紧邻的 $\mathcal{N} = N - 2$, $M = 2$ 的偶偶核……依此类推.

若原子核中的偶质量核心具有 IBA 三种极限对称性, 则 $U(6/20)$ 超对称性有相应的三条群链, 我们写出这三条群链如下:

$$\begin{aligned}
 U(6/20) & \supset U^{(B)}(6) \otimes U^{(F)}(20) \supset U^{(B)}(5) \otimes U^{(F_k)}(5) \otimes U^{(F_i)}(4) \\
 & \supset U^{(B+F_k)}(5) \otimes U^{(F_i)}(4) \supset SO^{(B+F_k)}(5) \otimes SP^{(F_i)}(4) \\
 & \supset \text{Spin}(5) \supset \text{Spin}(3) \supset \text{Spin}(2) \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(6/20) & \supset U^{(B)}(6) \otimes U^{(F)}(20) \supset U^{(B)}(6) \otimes U^{(F_k)}(10) \otimes U^{(F_i)}(2) \\
 & \supset SU^{(B)}(3) \otimes SU^{(F_k)}(3) \otimes SU^{(F_i)}(2) \supset SU^{(B+F_k)}(3) \otimes SU^{(F_i)}(2) \\
 & \supset SO^{(B+F_k)}(3) \otimes SU^{(F_i)}(2) \supset \text{Spin}(3) \supset \text{Spin}(2) \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(6/20) & \supset U^{(B)}(6) \otimes U^{(F)}(20) \supset SO^{(B)}(6) \otimes U^{(F_k)}(5) \otimes U^{(F_i)}(4) \\
 & \supset SO^{(B)}(6) \otimes U^{(F_k)}(4) \otimes U^{(F_i)}(4) \supset SO^{(B)}(6) \otimes SO^{(F_k)}(6) \otimes U^{(F_i)}(4) \\
 & \supset SO^{(B+F_k)}(6) \otimes SU^{(F_i)}(4) \supset \text{Spin}(6) \supset \text{Spin}(5) \\
 & \supset \text{Spin}(3) \supset \text{Spin}(2) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

这三条群链约化的物理意义是: (1) 将超群 $U(6/20)$ 分解为玻色子群 $U^{(B)}(6)$ 和费米子群 $U^{(F)}(20)$, 前者对应于偶质量核心的对称性, 后者对应于单粒子的对称性. (2) 玻色子群 $U^{(B)}(6)$ 之约化完全遵循 IBA 三条群链之约化, 这就是说, 偶质量核心具有 IBA 三种极限对称性. (3) 费米子群 $U^{(F)}(20)$ 之约化, 由于单粒子角动量 $j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2,$

可以将 i 分成两部分, $j = k + i$, 其中 k 叫做膺轨道角动量, i 叫做膺自旋. k 不是真实的轨道角动量, i 不是内禀自旋. 一般说来, i 的值可以大于 $1/2$. 群链 (2.7) 和 (2.9) 中 $U^{(F)}(20) \supset U^{(F_k)}(5) \otimes U^{(F_i)}(4)$ 这一约化相当于 $k = 2, i = 3/2$, 而群链 (2.8) 中 $U^{(F)}(20) \supset U^{(F_k)}(10) \otimes U^{(F_i)}(2)$ 这一约化相当于 $k = 1, 3, i = 1/2$. (4) 在玻色子群和费米子群双方各自平行地约化的同时, 又随时将玻色子群的子群与费米子群的子群合并, 这是由于超对称性要考虑玻色子对称性和费米子对称性的统一.

三、 $U(6/20)$ 在 $\text{Spin}(6)$ 极限和 $M=1$ 情况下群链的约化

如果原子核是奇质量核, 其偶质量核心具有 $O(6)$ 极限对称性, 而奇粒子数为 1, 这时 $U(6/20)$ 超对称性群链为 (2.9) 式. 式中 $U^{(F)}(20)$ 的表示为 $\underbrace{[10 \cdots 0]}_{20}, SU^{(F_i)}(4)$ 的表示为 $[210]$, 由于 $SU(4)$ 同构于 $SO(6)$, 我们可以把 $SU^{(F_i)}(4)$ 指标 $[210]$ 换成 Murnaghan 指标 $(3/2 \ 1/2 \ 1/2)^{[10]}$.

1) $U^{(B)}(6)$ 到 $SO^{(B)}(6)$ 的约化. 文献[12]给出了 $U(6)$ 的全对称表示到 $SO^{(B)}(6)$ 的约化公式.

2) $SO^{(B)}(6) \otimes SU^{(F_i)}(4)$ 到 $\text{Spin}(5)$ 的约化. 由文献[11], 我们写出

$$\begin{aligned} (\sigma \ 0 \ 0) \otimes (3/2 \ 1/2 \ 1/2) &= (\sigma + 3/2 \ 1/2 \ 1/2) + (\sigma + 1/2 \ 3/2 \ 1/2) \\ &\quad + (\sigma + 1/2, \ 1/2, \ 1/2) + (\sigma - 1/2 \ 3/2 \ 1/2) \\ &\quad + (\sigma - 1/2 \ 1/2 \ 1/2) + (\sigma - 3/2 \ 1/2 \ 1/2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

3) $\text{Spin}(6)$ 到 $\text{Spin}(5)$ 的约化. 这由著名的 Gelfand 公式. $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) = \sum_{\tau_1 \tau_2} (\tau_1 \tau_2)$ 其中 $\sigma_1 \geq \tau_1 \geq \sigma_2, \sigma_2 \geq \tau_1 \geq \sigma_3$.

4) $\text{Spin}(5)$ 到 $\text{Spin}(3)$ 的约化. 我们在前文[11]中已经给出这一约化.

四、动力学对称性

偶质量核心具有 $O(6)$ 极限对称性, 奇粒子数为 1 的原子核的 $U(6/20)$ 超对称性波函数为

$$\left| \begin{array}{cccccccc} U(6/20) & U^{(B)}(6) & U^{(F)}(20) & SO^{(B)}(6) & SU^{(F_i)}(4) & \text{Spin}(6) & \text{Spin}(5) & \text{Spin}(3) & \text{Spin}(2) \\ \mathcal{N} & N & M & \sigma & (n_1 n_2 n_3) & (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) & (\tau_1 \tau_2) & \Delta & J & M_J \end{array} \right\rangle \quad (4.1)$$

由于 $M = 1$, 而 $n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 0$, 所以波函数(4.1)又可简化为

$$\left| \begin{array}{cccccccc} U(6/20) & U^{(B)}(6) & SO^{(B)}(6) & \text{Spin}(6) & \text{Spin}(5) & \text{Spin}(3) & \text{Spin}(2) \\ \mathcal{N} & N & \sigma & (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) & (\tau_1 \tau_2) & \Delta & J & M_J \end{array} \right\rangle \quad (4.2)$$

$$\text{哈密顿量} \quad H = H_B + H_F + V_{BF} \quad (4.3)$$

H 的本征值即能量为

$$\begin{aligned} E = E_0(\mathcal{N}N) - A_1 \sigma(\sigma + 4) - A_2 [\sigma_1(\sigma_1 + 4) + \sigma_2(\sigma_2 + 2) + \sigma_3^2] \\ + B[\tau_1(\tau_1 + 3) + \tau_2(\tau_2 + 1)] + CJ(J + 1) \end{aligned} \quad (4.4)$$

表 1 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 的激发能级

$(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$	$(\tau_1\tau_2)$	J^π	$E_{\text{理论}}(\text{keV})$	$E_{\text{实验}}(\text{keV})$	$\Delta(\text{keV})$
(17/2 1/2 1/2)	(1/2 1/2)	3/2 ⁺	0	0	0
		1/2 ⁺	61	73	-12
		5/2 ⁺	205	138.9	+66
	(5/2 1/2)	7/2 ⁺	331	357.7	-27
		3/2 ⁺	276	180.0	+96
		5/2 ⁺	366	361.8	+4
		7/2 ⁺	492	621.0	-129
		9/2 ⁺	654	521.8	+132
		11/2 ⁺	852	857	-5
(15/2 3/2 1/2)	(3/2 1/2)	1/2 ⁺	461	463	-2
		5/2 ⁺	605	562	+43
		7/2 ⁺	731	739	-8
	(3/2 3/2)	3/2 ⁺	584	596	-12
		5/2 ⁺	674	695.1	-21
		9/2 ⁺	962	1032	-70
(15/2 1/2 1/2)	(1/2 1/2)	3/2 ⁺	491	460.5	+30
	(3/2 1/2)	1/2 ⁺	561	557	+4

E 实验值底下划虚线者为该能级的 J^π 值在实验上尚未确定。

(4.2)式中的量子数 Δ 是由于 Spin(5) 到 Spin(3) 的约化不是完全可约的而引入的。 Δ 对能谱中能级数值的大小没有影响。

以 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核为例, 这时 $N = 7, M = 1, \mathcal{N} = 8, U(6/20)$ 的激发能级的理论计算值以及取自文献 [13—15] 的实验值列于表 1。在利用 (4.4) 式计算激发能级时, 我们取 $A_1 = 12.5\text{keV}, A_2 = 25.0\text{keV}, B = 23.0\text{keV}, C = 18.0\text{keV}$ 。 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核的理论与实验能谱图见图 1。表 1 中末栏列出 $\delta = E_{\text{理论}} - E_{\text{实验}}$ 值, 如同文献 [6] 那样, 引入

$$\phi = \frac{\sum_i |E_i^{\text{理论}} - E_i^{\text{实验}}|}{\sum_i E_i^{\text{实验}}} \quad (4.5)$$

作为超对称性破缺的度量。对于 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核, 我们算得 $\phi = 8\%$ 。同一核, $U(6/4)$ 超对

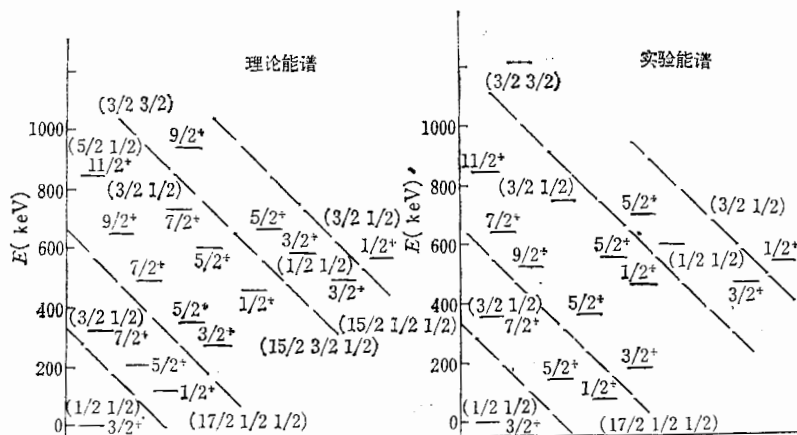


图 1 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核的理论与实验能谱

称性的计算表明^[6], $\phi = 18\%$, 这表明 $U(6/20)$ 比 $U(6/4)$ 更好地描述 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 的核。

由上可见, $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核中有存在 $U(6/20)$ 超对称性的可能, 但 $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核中是否存在 $U(6/20)$ 超对称性, 还得取决于 (1) $^{193}\text{Ir}_{116}$ 核的电磁性质, (2) 是否存在超 i 多重态。有关这两方面的问题, 我们将在以后的文章中予以阐述。

参 考 文 献

- [1] A. Arima and F. Iachello, *Ann Phys.*, (N. Y) 99(1976), 253.
- [2] A. Arima and F. Iachello, *Ann Phys.*, (N. Y) 111 (1978), 201.
- [3] A. Arima and F. Iachello, *Ann Phys.*, (N. Y) 123(1979), 468.
- [4] F. Iachello and O. Scholten, *Phys. Rev Lett.*, 43(1979), 679.
- [5] F. Iachello and S. Kuyucok, *Ann Phys.*, (N. Y) 136 (1981), 19.
- [6] A. B. Balantekin, I. Bars and F. Iachello, *Nuclear Phys.*, A370(1981), 284.
- [7] F. Iachello, *Phys. Rev Lett.*, 44(1980), 772.
- [8] A. B. Balantekin, I. Bars, R. Bijker and F. Iachello, *Phys Rev.*, C27 (1983), 1761.
- [9] Sun Hongzhou, A. Frank and P. Van Zsacker, *Phys. Lett.*, 124B (1983), 275.
- [10] F. D. Murnaghan *The Theory of group representation* (1938).
- [11] 朱培豫、曹雨芳、吴佑实, *高能物理与核物理*, 9(1985), 154.
- [12] M. Hamermesh, *group Theory and its Application to Physical Problems* 1962.
- [13] C. M. Lederer and V. S. Shirley ed *Table of Isotopes* 7th ed (1978).
- [14] M. B. Lewis, *Nucl. Data. Sheets.*, (1972), 389.
- [15] V. S. Shirley., *Nucl Data Sheets*, 32(1981), 593.

$U(6/20)$ SUPERSYMMETRY IN NUCLEI AND ITS Spin (6) LIMIT

ZHU PEI-YU

(Shanghai Institute of Railway Technology)

CAO YU-FANG

(East China Normal University)

WU YOU-SHI

(Anhui Institute of Mechanical and Electrical Engineering)

ABSTRACT

The $U(6/20)$ supersymmetry is discussed in this paper. Particularly we discuss its Spin (6) limit. First we discuss the reduction of the group chain of the Spin(6) limit. Secondly we derive the wave functions and excited energy formulas for the nuclei in which the Spin(6) limit of $U(6/20)$ supersymmetry exists. Thirdly we make comparison of the nuclear energy spectra between the theoretical calculation and experimental measurement in the case of nucleus $^{193}\text{Ir}_{116}$. The comparison shows that the Spin (6) limit of $U(6/20)$ supersymmetry possibly exists in nucleus $^{193}\text{Ir}_{116}$.