

σ -模型的强耦合展开理论

张 忠 灿
(重 庆 大 学)

摘 要

我们研究并得到了 σ -模型强耦合展开的一般形式和 Feynman 规则, 进而又研究了强耦合展开式的约化, 最后就 Padé-type 外插技术处理发散问题作了一些有益的探讨.

一、引 言

量子场论中的微扰方法在处理弱耦合问题是非常成功的, 然而对于粒子物理中的强耦合问题却无能为力.

关于强耦合展开的早期研究工作^[1-5] 称为 the static ultralocal approximation, 以后在 Ward^[6] 和 Horl^[7] 工作基础上开始了强耦合展开问题的格点方法研究^[8-15]. 我们采用格点方法对粒子物理学中极为重要的 σ -模型作了系统的研究.

二、 σ -模型强耦合展开的一般形式

对 σ -模型中生成泛函作如下变换:

$$\begin{aligned} Z[J_\sigma(x), J_\pi(x)] &= \int D_\sigma D_\pi \exp \left\{ - \int dx \left[\frac{1}{2} ((\partial\sigma)^2 + (\partial\pi)^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{g}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + J_\sigma(x)\sigma + J_\pi(x)\pi \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ - \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 G^{-1}(x_1, x_2) \left[\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_1) \delta J_\sigma(x_2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_1) \delta J_\pi(x_2)} \right] \right\} \\ &\quad \cdot \int D_\sigma D_\pi \exp \left\{ - \int dx \left[\frac{g}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + J_\sigma\sigma + J_\pi\pi \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$G^{-1}(x_1, x_2) = (-\partial_{x_1}^2 + m^2)\delta(x_1 - x_2). \quad (2.2)$$

变换后的生成泛函积分属非高斯型, 采用格点可表为

$$\int D_\sigma D_\pi \exp \left\{ - \int dx \left[\frac{g}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 + J_\sigma \sigma + J_\pi \pi \right] \right\} \\ = \int \cdots \int \prod_x d\sigma_x d\pi_x \exp \left\{ - \frac{1}{\delta(0)} \sum_x \left[\frac{g}{4} (\sigma_x^2 + \pi_x^2)^2 + J_\sigma(x) \sigma_x + J_\pi(x) \pi_x \right] \right\}, \quad (2.3)$$

其中 $\delta(0) = 1/a^d$ (a 是 d 维空间格点长度), $\frac{1}{\delta(0)} \sum_x \rightarrow \int dx$.

首先计算出(2.3)式中关于 x 的积分, 然后将结果表为指数形式即得到强耦合展开的一般形式, 即

$$Z[J_\sigma(x), J_\pi(x)] = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 G^{-1}(x_1, x_2) \left[\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_1) \delta J_\sigma(x_2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_1) \delta J_\pi(x_2)} \right] \right\} \cdot \exp \left\{ \delta(0) \int dx \right. \\ \left. \cdot \ln \left(\sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{2^{m+n-1} \delta(0)^{-\frac{1}{2}(m+n)+\frac{1}{2}}}{(2m)!(2n)!} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} 2^l \right. \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \Gamma \left(\frac{m+l}{2} + \frac{1}{4} \right) \Gamma \left(\frac{n+l}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] J_\sigma(x)^{2m} J_\pi(x)^{2n} g^{-\frac{m+n+1}{2}} \right) \right\} \\ = N \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} g^{-k/2} C_k[J_\sigma(x), J_\pi(x)] \right\}; \quad N \text{ 为常数.} \quad (2.4)$$

取(2.4)的对数: $\ln Z[J_\sigma(x), J_\pi(x)] = N' + \sum_{k=1}^{\infty} g^{-k/2} E_k[J_\sigma(x), J_\pi(x)]$; N' 为常数. 通过对于此式求变分偏导运算即得到 Green 函数强耦合展开的一般形式.

三、强耦合展开式的泛函系数项的计算

计算 E_k (尤其 $K > 2$) 是相当复杂和困难的. 具体计算时比较方便的办法是采用极坐标计算出(2.3)式的积分, 然后将对数生成泛函表为

$$\ln Z[J_\sigma(x), J_\pi(x)] = M + \ln \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[- \frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 G^{-1}(x_1, x_2) \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_1) \delta J_\sigma(x_2)} + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_1) \delta J_\pi(x_2)} \right) \right]^m \right\} \\ \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\delta(0) \int dx \ln \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} A_l(x) g^{-l/2} \right) \right]^n \right\}. \quad (3.1)$$

式中 M 为常数, 另外 $A_l(x) = a_l \langle I_{2l}(x) \rangle$ 且

$$a_l = \frac{2^{l-1} \delta(0)^{-3l/2} \Gamma \left(\frac{l}{2} + \frac{1}{2} \right)}{\pi \Gamma \left(\frac{1}{2} \right) (2l)!}; \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \langle I_{2l}(x) \rangle = \int_0^{2\pi} (J_\sigma(x) \cos\theta + J_\pi(x) \sin\theta)^{2l} d\theta, \\ I_{2l}(x) = (J_\sigma(x) \cos\theta + J_\pi(x) \sin\theta)^{2l}. \end{cases} \quad (3.3)$$

符号 $\langle \rangle$ 代替了积分符号的意义, 可大量简化表述.

可以证明 $\left| \sum_{l=1}^{\infty} A_l(x) g^{-l/2} \right| < 1$, 因而可逐级展开. 首先计算出:

$$\begin{aligned} D_V[J_\sigma(x), J_\pi(x)] &= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[-\frac{1}{2} \iint dx_1 dx_2 G^{-1}(x_1, x_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot \left(\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_1) \delta J_\sigma(x_2)} + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_1) \delta J_\pi(x_2)} \right) \right]^m \right\} \cdot C_V[J_\sigma(x), J_\pi(x)], \end{aligned} \quad (3.4)$$

其中 C_V 是(3.1)式中第二个花括号里且按 g 的负幂次展开的 V 阶泛函系数项.

由(3.4)式即可计算出

$$D_1 = \delta(0) \int dx \{ a_1 \langle I_2(x) \rangle - 2\pi a_1 G^{-1}(x, x) \}. \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} D_2 &= \delta(0) \int dx \left\{ a_2 \langle I_4(x) \rangle - \frac{a_1^2}{2} \langle I_2(x) \rangle^2 - G^{-1}(x, x) [(6a_2 - 2\pi a_1^2) \langle I_2(x) \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2a_1^2 (\langle I_1(x) \cos\theta \rangle^2 + \langle I_1(x) \sin\theta \rangle^2)] + G^{-1}(x, x)^2 (6\pi a_2 - 4\pi^2 a_1^2) \right\} \\ &\quad + \delta(0)^2 \iint dx dy \left\{ \frac{1}{2} a_1^2 \langle I_2(x) \rangle \langle I_2(y) \rangle - 2\pi a_1^2 \langle I_2(y) \rangle G^{-1}(x, x) \right. \\ &\quad \left. - 2a_1^2 G^{-1}(x, y) \cdot [\langle I_1(x) \cos\theta \rangle \langle I_1(y) \cos\theta \rangle + \langle I_1(x) \sin\theta \rangle \right. \\ &\quad \left. \cdot \langle I_1(y) \sin\theta \rangle] + \pi^2 a_1^2 [2G^{-1}(x, y)^2 + G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, y)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

求 $V > 2$ 的 D_V 就相当复杂了, 但是如果我们能利用 σ 和 π 的对称性; $G^{-1}(x, y)$ 的对称性^[13]; 以及积分变量的脚标互换等, 则可大大减少许多计算手续. 现将 D_3 的计算结果表

出:

D_3 由以下四式组合而成, 即

$$\begin{aligned} (m=0): & \delta(0) \int dx \left[a_3 \langle I_6(x) \rangle - a_2 a_1 \langle I_4(x) \rangle \langle I_2(x) \rangle + \frac{a_1^3}{3} \langle I_2(x) \rangle^3 \right] \\ & + \delta(0) \iint dx dy a_1 \langle I_2(x) \rangle \left[a_2 \langle I_4(y) \rangle - \frac{a_1^2}{2} \langle I_2(y) \rangle^2 \right] \\ & + \frac{1}{6} \delta(0)^3 \iiint dx dy dz a_1^3 \langle I_2(x) \rangle \langle I_2(y) \rangle \langle I_2(z) \rangle, \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\begin{aligned} (m=1): & -\delta(0) \int dx G^{-1}(x, x) \{ (15a_3 - 2\pi a_1 a_2) \langle I_4(x) \rangle + (2\pi a_1^3 - 6a_1 a_2) \langle I_2(x) \rangle^2 \\ & - 8a_1 a_2 \cdot (\langle I_1(x) \cos\theta \rangle \langle I_3(x) \cos\theta \rangle + \langle I_1(x) \sin\theta \rangle \langle I_3(x) \sin\theta \rangle) \\ & + 4a_1^3 \langle I_2(x) \rangle (\langle I_1(x) \cos\theta \rangle^2 + \langle I_1(x) \sin\theta \rangle^2) \} \\ & - \delta(0)^2 \iint dx dy G^{-1}(x, x) \{ \pi a_1 [2a_2 \langle I_4(y) \rangle - a_1^2 \langle I_2(y) \rangle^2] + 2a_1 \langle I_2(y) \rangle \\ & \cdot [(3a_2 - \pi a_1^2) \langle I_2(x) \rangle - a_1^2 (\langle I_1(x) \cos\theta \rangle^2 + \langle I_1(x) \sin\theta \rangle^2)] \} \\ & + 4a_1 G^{-1}(x, y) \{ \langle I_1(x) \cos\theta \rangle [2a_2 \langle I_3(y) \cos\theta \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - a_1^2 \langle I_2(y) \rangle \langle I_2(y) \cos \theta \rangle] + \langle I_1(x) \sin \theta \rangle [2a_2 \langle I_3(y) \sin \theta \rangle \\
& - a_1^2 \langle I_2(y) \rangle \langle I_1(y) \sin \theta \rangle]] \\
& - \delta(0)^3 \iiint dx dy dz \{ 2a_1^3 G^{-1}(x, y) \langle I_2(z) \rangle [\langle I_1(x) \cos \theta \rangle \langle I_1(y) \cos \theta \rangle \\
& + \langle I_1(x) \sin \theta \rangle \langle I_1(y) \sin \theta \rangle] + \pi a_1^3 G^{-1}(x, x) \langle I_2(y) \rangle \langle I_2(z) \rangle \}, \quad (3.7b) \\
(m=2): & \frac{1}{8} \delta(0) \int dx G^{-1}(x, x)^2 \{ (360a_3 - 40\pi^2 a_1^3 - 210\pi a_1 a_2) \langle I_2(x_1) \rangle \\
& + 112\pi a_1^3 (\langle I_1(x_1) \sin \theta \rangle^2 + \langle I_1(x_1) \cos \theta \rangle^2) \\
& - 192a_1 a_2 (\langle I_1(x_1) \cos \theta \rangle \langle I_1(x_1) \cos^3 \theta \rangle + \langle I_1(x_1) \sin \theta \rangle \langle I_1(x_1) \sin^3 \theta \rangle) \\
& - 96a_1 a_2 (\langle I_1(x_1) \cos \theta \rangle \langle I_1(x_1) \cos \theta \sin^2 \theta \rangle \\
& + \langle I_1(x_1) \sin \theta \rangle \langle I_1(x_1) \cos^2 \theta \sin \theta \rangle) \\
& + \frac{1}{8} \delta(0)^2 \iint dx dy \{ 16a_1 G^{-1}(x, x)^2 \langle I_2(y) \rangle (3\pi a_2 - 2\pi^2 a_1^2) \\
& + [G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, y) + G^{-1}(x, y)^2] \cdot [32a_1(3\pi a_2 \\
& - \pi^2 a_1^2) \langle I_2(y) \rangle - 4a_1^2 (\langle I_1(y) \cos \theta \rangle^2 + \langle I_1(y) \sin \theta \rangle^2)] \\
& + 64a_1 G^{-1}(x, y)G^{-1}(y, y) [\langle I_1(x) \cos \theta \rangle (3a_2 \langle I_1(y) \cos^3 \theta \rangle \\
& + 3a_2 \langle I_1(y) \cos \theta \sin^2 \theta \rangle - 2\pi a_1^2 \langle I_1(y) \cos \theta \rangle) \\
& + \langle I_1(x) \sin \theta \rangle (3a_2 \langle I_1(y) \sin^3 \theta \rangle + 3a_2 \langle I_1(y) \cos^2 \theta \sin \theta \rangle \\
& - 2\pi a_1^2 \langle I_1(y) \sin \theta \rangle)] \} \\
& + \frac{1}{8} \delta(0) \iiint dx dy dz \{ 16\pi^2 a_1^3 \langle I_2(z) \rangle [G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, y) + G^{-1}(x, y)^2] \\
& + 32\pi a_1^3 (\langle I_1(y) \cos \theta \rangle \langle I_1(z) \cos \theta \rangle + \langle I_1(y) \sin \theta \rangle \langle I_1(z) \sin \theta \rangle) \\
& \cdot [G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, z) + G^{-1}(x, y)G^{-1}(x, z)] \}, \quad (3.7c) \\
(m=3): & - 2\delta(0) (15\pi a_3 - 18\pi^2 a_2 a_1 + 8\pi^3 a_1^3) \int dx G^{-1}(x, x)^3 \\
& - 4\delta(0)^2 (3\pi^2 a_1 a_2 - 2\pi^3 a_1^3) \iint dx dy \{ G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, y)^2 \\
& + 2G^{-1}(x, y)^2 G^{-1}(y, y) \} \\
& - \frac{4}{3} \pi^3 a_1^3 \delta(0)^3 \iiint dx dy dz \{ 3G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, z)^2 \\
& + G^{-1}(x, x)G^{-1}(y, y)G^{-1}(z, z) \\
& + 2G^{-1}(x, y)G^{-1}(x, z)G^{-1}(y, z) \}, \quad (3.7d)
\end{aligned}$$

由此可见 D_3 的表述已经是相当复杂的了。

计算出各 D_ν 以后,即可确定出各 E_K 。例如

$$E_1 = D_1; \quad E_2 = D_2 - \frac{1}{2} D_1^2; \quad E_3 = D_3 - D_2 D_1 + \frac{1}{3} D_1^3. \quad (3.8)$$

四、强耦合展开的 Feynman 规则

σ -模型中二点 Green 函数 $G_\sigma(X, Y) = G_\pi(X, Y)$ 强耦合展开式第 K ($K \geq 1$) 阶项可用二条外线 $K-1$ 条内线的所有 K 阶连通图之和来表示:

(i) 外线用一个端点的虚线表示, 且两条外线的端点分别标以 X 和 Y .

(ii) 内线用实线表示, 且每条内线有二个端点, 分别标以 x_i, x_{i+1} ($i = 1, 3, \dots, 2K-3$).

(iii) 端点作偶数目重合(构成顶角)后, 弃掉非连通图则得到所有 K 阶连通图, 且顶角值为

$$\lambda[l, 2n] = (2n)!(l-2n)!\delta(0)g^{-l/4} \sum_{j=1}^{l/2} \lambda_j^{(n)}, \quad (4.1a)$$

其中 l 为重合的端点数, n 为整数且 $0 \leq n \leq l/2$,

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(n)} = & -\frac{(-2\pi)^j}{j} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_j=1}^{l/2} \left\{ \left[\sum_{n_1=0}^{i_1} \sum_{n_2=0}^{i_2} \dots \sum_{n_j=0}^{i_j} \right] a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j} \right. \\ & \left. \left(\text{且 } i_1 + i_2 + \dots + i_j \equiv l/2 \right) \left(\text{且 } n_1 + n_2 + \dots + n_j \equiv n \right) \right. \\ & \cdot \frac{(2i_1-1)!!}{(2n_1)!! (2i_1-2n_1)!!} \frac{(2i_2-1)!!}{(2n_2)!! (2i_2-2n_2)!!} \\ & \left. \dots \frac{(2i_j-1)!!}{(2n_j)!! (2i_j-2n_j)!!} \right\}, \quad (4.1b) \end{aligned}$$

其中

$$a_{i_k} = \frac{2^{i_k-1} \delta(0)^{-\frac{1}{2}i_k}}{(2i_k)!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{i_k}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\pi \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad (K=1, 2, \dots, j).$$

(iv) 对于每个 K 阶连通图对应如下积分运算:

积分变量为内线端点指标. 积分因子包含各内线代表的函数 $G^{-1}(x_i, x_{i+1})$ ($i = 1, 3, \dots, 2K-3$); 各顶角对应的 δ -函数因子的积(例如 x_1, x_2, \dots, x_k 重合构成某一顶角, 对应的 δ -函数因子的积为 $\delta(x_1 - x_2) \cdot \delta(x_1 - x_3) \dots \delta(x_1 - x_k)$); 图形的整体对称数 $S_{\text{总}} = (-1)^D$ (D 为内线数); 以及各组顶角值 $\lambda[l_s, 2n_s]$ ($s = 1, 2, \dots, t$; t 为顶角个数) 连同该组顶角值所对应的图形局部对称数 $S_{\text{局}}$ 的乘积项之和. 关于最后这项可以从该连通图中求出, 方法是:

首先将每个顶角 ($s = 1, 2, \dots, t$) 均用左右二个连通的大圆来表示, 并依次在左端的大圆里画 $l_s/2$ ($s = 1, 2, \dots, t$) 个小圆且每个小圆里都包含二个点. 然后将这些大圆由上往下排成一列并依照展开图进行连线——原则是每个点都必须连接上一条线且连接内线时均只能在小圆自身所包含的二个点之间进行(构成圈图)或者在位于不同的大圆里的二个点之间进行(构成连线). 最后将圈图或由连线构成的连通网络移动到右端的大圆里并由所有这些不同的“移动方式”中的任何一种均可得到一系列位于右端各大圆里的小

圆个数——它们即给出了一组顶角值 $\lambda_{[l_1, 2n_1]} \lambda_{[l_2, 2n_2]} \cdots \lambda_{[l_r, 2n_r]}$ 中的 n_1, n_2, \cdots, n_r 的取值, 且此时所对应的局部对称数可按如下公式计算:

$$S_{\text{局}} = S_{\text{局}}^{(\sigma)} S_{\text{局}}^{(\pi)},$$

其中

$$S_{\text{局}}^{(\sigma)} = \left\{ 2^{(\text{位于左端大圆里的圈图数目})} \prod_{i=1}^l (\text{位于左端第 } i \text{ 个大圆里的圈图数目})! \cdot \prod_{\substack{i, j=1 \\ (且 i \neq j)}}^l (\text{位于左端第 } i, j \text{ 个大圆间的联线条数})! \right\}^{-1},$$

将上式中的“左”字换成“右”字即得到 $S_{\text{局}}^{(\pi)}$ 的计算公式。

由所有不同的与外线的连线方式中所能得到的所有“各组顶角值连同该组顶角值所对应的局部对称数的乘积项”之总和, 就是我们要求的这个积分因子项。

最后需要说明几点, 即与外线的连线部分不允许出现“返回”连线方式; 另外如果从上述方法中得到相同的 n_1, n_2, \cdots, n_r 取值时, 则只计一次; 如果出现多种均满足上述连线原则的内线连接方式时, 则采用能够获得圈图最多的连接方式。

由 Feynman 规则计算一个四阶展开图 (见图 1) 的结果为:

$$-\left\{ \frac{1}{8} \lambda[6, 0] \lambda[2, 0] + \frac{1}{8} \lambda[6, 4] \lambda[2, 0] + \frac{1}{4} \lambda[6, 2] \lambda[2, 0] \right\} G^{-1}(x, x) G^{-1}(X, Y).$$

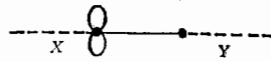


图 1 一个四阶展开图。

关于四点、六点、…等 Green 函数强耦合展开的 Feynman 规则要复杂得多。在它们的展开图中外线条数分别为四条、六条、…等等, 而内线条数仍为 $K-1$ 条 (K 为阶数), 此外关于顶角值和对称数的概念仍然从二点 Green 函数的有关讨论中推广过来, 但要复杂得多。

下面给出二点 Green 函数强耦合展开的 Feynman 规则的证明。

$$\begin{aligned} & \ln Z[J_\sigma(x), J_\pi(x)] \\ &= \sum_{E=1}^{\infty} \frac{(-1)^{E-1}}{E} \prod_{m=1}^E \left\{ \sum_{C_m=1}^{\infty} \sum_{D_m=0}^{\infty} \frac{\delta(0)^{C_m}}{C_m!} \right. \\ & \quad \cdot \left. \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{D_m}}{D_m!} \int \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{2D_{m-1}} dx_{2D_m} \right. \\ & \quad \cdot G^{-1}(x_1, x_2) \cdots G^{-1}(x_{2D_{m-1}}, x_{2D_m}) \left(\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_1) \delta J_\sigma(x_2)} + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_1) \delta J_\pi(x_2)} \right) \cdots \\ & \quad \cdot \left. \left(\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_{2D_{m-1}}) \delta J_\sigma(x_{2D_m})} + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_{2D_{m-1}}) \delta J_\pi(x_{2D_m})} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \prod_{l=1}^{C_E} \sum_{B_l=1}^{\infty} \sum_{A_1^{b_l}, A_2^{b_l}, \dots, A_{B_l}^{b_l}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{B_l-1}}{B_l} \\
& \cdot \left(\int dx \left[\prod_{j=1}^{B_l} a_{A_j^{b_l}} \int_0^{2\pi} (J_\sigma(x) \cos \theta + J_\pi(x) \sin \theta)^{2A_j^{b_l}} d\theta \right] \right) \\
& \cdot g^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{B_l} A_k^{b_l} \Big\}, \tag{4.2}
\end{aligned}$$

其中已弃掉了 M 且符号 Σ 和 Π 具有广义意义。

由(4.2)式得二点 Green 函数的强耦合展开式

$$G_\sigma(X, Y) = \frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(X) \delta J_\sigma(Y)} \ln Z[J_\sigma(x), J_\pi(x)] \Big|_{\substack{J_\sigma(x)=0 \\ J_\pi(x)=0}}. \tag{4.3}$$

由于是“对数生成泛函”(即非连通图已相互抵消掉),故(二点 Green 函数)只考虑(4.3)式中 $E=1$ 的情形^[15], 即

$$G_\sigma(X, Y) = G_\sigma(X, Y)_1 + G_\sigma(X, Y)_2 + \dots + G_\sigma(X, Y)_c + \dots, \text{ 且 } \tag{4.4a}$$

$$\begin{aligned}
G_\sigma(X, Y)_c &= \left\{ \frac{\delta(0)^c}{C!} \left(\left[\sum_{B_1=1}^{\infty} \sum_{A_1^{b_1}, A_2^{b_1}, \dots, A_{B_1}^{b_1}=1}^{\infty} \right] \cdots \left[\sum_{B_c=1}^{\infty} \sum_{A_1^{b_c}, A_2^{b_c}, \dots, A_{B_c}^{b_c}=1}^{\infty} \right] \right) \right. \\
& \cdot \left(\sum_{D=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^D}{D!} \int \cdots \int dx_1 dx_2 \cdots dx_{2D-1} dx_{2D} G^{-1}(x_1, x_2) \right. \\
& \quad \cdots G^{-1}(x_{2D-1}, x_{2D}) \frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(X) \delta J_\sigma(Y)} \\
& \quad \cdot \left[\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_1) \delta J_\sigma(x_2)} + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_1) \delta J_\pi(x_2)} \right] \\
& \quad \cdots \left[\frac{\delta^2}{\delta J_\sigma(x_{2D-1}) \delta J_\sigma(x_{2D})} + \frac{\delta^2}{\delta J_\pi(x_{2D-1}) \delta J_\pi(x_{2D})} \right] \\
& \quad \cdot \left[\left(\sum_{n_1^{b_1}=0}^{A_1^{b_1}} \cdots \sum_{n_{B_1}^{b_1}=0}^{A_{B_1}^{b_1}} \right) \cdots \left(\sum_{n_1^{b_c}=0}^{A_1^{b_c}} \cdots \sum_{n_{B_c}^{b_c}=0}^{A_{B_c}^{b_c}} \right) \right] \\
& \quad \cdot \left(\mathbf{F}_{n_1^{b_1}, \dots, n_{B_1}^{b_1}}^{A_1^{b_1}, \dots, A_{B_1}^{b_1}} \cdots \mathbf{F}_{n_1^{b_c}, \dots, n_{B_c}^{b_c}}^{A_1^{b_c}, \dots, A_{B_c}^{b_c}} \right) \\
& \quad \cdot \left(\int dy_1 J_\sigma(y_1)^{2(A_1^{b_1} + A_2^{b_1} + \dots + A_{B_1}^{b_1}) - 2(n_1^{b_1} + n_2^{b_1} + \dots + n_{B_1}^{b_1})} J_\pi(y_1)^{2(n_1^{b_1} + n_2^{b_1} + \dots + n_{B_1}^{b_1})} \right) \cdots \\
& \quad \cdot \left(\int dy_c J_\sigma(y_c)^{2(A_1^{b_c} + A_2^{b_c} + \dots + A_{B_c}^{b_c}) - 2(n_1^{b_c} + n_2^{b_c} + \dots + n_{B_c}^{b_c})} J_\pi(y_c)^{2(n_1^{b_c} + n_2^{b_c} + \dots + n_{B_c}^{b_c})} \right) \\
& \quad \cdot \left[\frac{(-1)^{B_1}}{B_1} a_{A_1^{b_1}} a_{A_2^{b_1}} \cdots a_{A_{B_1}^{b_1}} \right] \cdots \left[\frac{(-1)^{B_c}}{B_c} a_{A_1^{b_c}} a_{A_2^{b_c}} \cdots a_{A_{B_c}^{b_c}} \right] \\
& \quad \cdot g^{-\frac{1}{2}[(A_1^{b_1} + A_2^{b_1} + \dots + A_{B_1}^{b_1}) + (A_1^{b_2} + A_2^{b_2} + \dots + A_{B_2}^{b_2}) + \dots + (A_1^{b_c} + A_2^{b_c} + \dots + A_{B_c}^{b_c})]} \Big\} \Big|_{\substack{J_\sigma=0 \\ J_\pi=0}} \tag{4.4b}
\end{aligned}$$

其中

$$F_{\substack{A_1^{b_1}, \dots, A_{B_1}^{b_1} \\ n_1^{b_1}, \dots, n_{B_1}^{b_1}}} = (2\pi)^{B_1} \prod_{j=1}^{B_1} \frac{(2A_j^{b_j} - 1)!!}{(2n_j^{b_j})!! (2A_j^{b_j} - 2n_j^{b_j})!!}, \quad (l = 1, 2, \dots, c).$$

(4.4) 式中, 应继续弃掉那些与 X 和 Y 无关联的积分项 (非连通图)^[15], 而仅保留有关联的积分项, 且对于这些积分项里的积分因子, 考虑 K 阶展开项时均可以用二条外线 $K-1$ 条内线且端点作偶数目重合的连通图来表示.

关于 K 阶展开图的数值规则:

(i) 顶角值

由于对 y_i 的积分 (对应第 i 个顶角且 $i = 1, 2, \dots, c; c = 1, 2, \dots, k$) 可表为

$$\int dy_i J_\sigma(y_i)^{2(A_1^{b_i} + A_2^{b_i} + \dots + A_{B_i}^{b_i}) - 2(n_1^{b_i} + n_2^{b_i} + \dots + n_{B_i}^{b_i})} \cdot J_\pi(y_i)^{2(n_1^{b_i} + n_2^{b_i} + \dots + n_{B_i}^{b_i})}$$

$$= \int dy_i J_\sigma(y_i)^{l-2n} J_\pi(y_i)^{2n},$$

(l 为该顶角包含的端点数且为偶数, $n = 1, 2, \dots, l/2$). 因此对于某一确定的 n 值, 由 (4.4) 式即对应如下系数:

$$(2n)! (l-2n)! g^{-l/4} \sum_{B_i=1}^{l/2} \sum_{\substack{A_1^{b_i}, A_2^{b_i}, \dots, A_{B_i}^{b_i}=1 \\ (且 A_1^{b_i} + A_2^{b_i} + \dots + A_{B_i}^{b_i} \equiv l/2)}}^{l/2} \left(\left[\sum_{n_1^{b_i}=0}^{A_1^{b_i}} \sum_{n_2^{b_i}=0}^{A_2^{b_i}} \dots \sum_{n_{B_i}^{b_i}=0}^{A_{B_i}^{b_i}} \right] \right. \\ \left. \cdot F_{\substack{A_1^{b_i}, \dots, A_{B_i}^{b_i} \\ n_1^{b_i}, \dots, n_{B_i}^{b_i}}} \right) \cdot \frac{(-1)^{B_i-1}}{B_i} a_{A_1^{b_i}} a_{A_2^{b_i}} \dots a_{A_{B_i}^{b_i}},$$

它是顶角值的一个贡献因子. 另外通过考虑 B_i (取值均不同时) 的相互对换; 以及考虑 B_i (有相同取值时) 的相互对换和与此相关联的变分偏导运算方式的相互对换, 可以合并 (4.4) 式中完全相同的一些项——均属同一展开图, 并由此可以将 $\frac{\delta(0)^c}{c!}$ 中的 $c!$ 消掉而余下

$\delta(0)^c$. 故 $\delta(0)$ 是顶角值的另一贡献因子.

(ii) 对称数

(4.4) 式中, 变分偏导运算可以表为如下形式

$$\frac{\delta^2}{\delta J_i(x_1) \delta J_i(x_2)} \cdot \frac{\delta^2}{\delta J_j(x_3) \delta J_j(x_4)} \dots \frac{\delta^2}{\delta J_k(x_{2D-1}) \delta J_k(x_{2D})}$$

的一系列偏导运算之和 (其中 $i, j, \dots, k = \sigma, \pi$). 在 i, j, \dots, k 中, 如果等于 σ 和 π 的分别为 n_1 和 n_2 个 ($n_1, n_2 \geq 0$), 则这样一种变分偏导运算的算符式一共有 $\frac{D!}{n_1! n_2!}$ 项. 然

而在进行具体的偏导运算时, 由于对 J_σ 和 J_π 的变分偏导运算分别有 $2^{n_1} n_1! S_{\text{偶}}^{(\sigma)}$ 和 $2^{n_2} n_2! S_{\text{偶}}^{(\pi)}$ 种方法 (其中 $S_{\text{偶}}^{(\sigma)}$ 和 $S_{\text{偶}}^{(\pi)}$ 分别是 $2^{n_1} n_1!$ 和 $2^{n_2} n_2!$ 种变分偏导方式中排除那些具有相同的

偏导运算方式的系数) 而得到的展开项却是完全相同的. 考虑到这些因素并与 $\left(\frac{-1}{2}\right)^D$

相乘以后得到

$$\frac{D!}{n_1! n_2!} (2^{n_1} n_1! S_{\text{圈}}^{(\sigma)}) (2^{n_2} n_2! S_{\text{圈}}^{(\pi)}) \cdot \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^D}{D!} = (-1)^D S_{\text{圈}}^{(\sigma)} S_{\text{圈}}^{(\pi)}$$

其中 $(-1)^D$ 为整体对称数 (D 为内线数). 同时基于以上分析如果我们采用本部分第 (iv) 小节里所叙述的方法即可得出 $S_{\text{圈}}$ 的计算公式来; 另外注意到所叙方法中所论及的左右两端的大圆部分实际上已分别对应了 σ 和 π 的情形时, 也容易看出用此方法来确定各组顶角值中 n_i 的取值以及与此相关联的 $S_{\text{圈}}$ 是毫无问题的.

五、强耦合展开式的约化

考虑 K 处割断的可约连通图 (图 2).

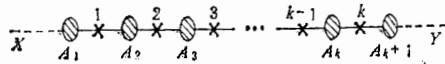


图 2

当 $A_i (i = 1, 2, \dots, k + 1)$ 为图 3 所示的各类不可约连通图时, 均可在动量空间里将该可约连通图计算出来, 结果为

$$\int d(X - Y) e^{-ip(X - Y)} \left\{ \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_{k-1} A_1 G^{-1}(X, x_1) A_2 G^{-1}(x_1, x_2) A_3 \dots A_k G^{-1}(x_{k-1}, Y) A_{k+1} \right\} \\ = A_1 (p^2 + m^2) A_2 (p^2 + m^2) A_3 \dots A_k (p^2 + m^2) A_{k+1} \quad (5.1)$$

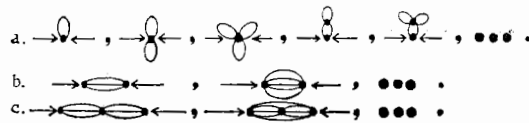


图 3 各类可约连通图 (a. b. c.)

考虑到 $S_{\text{圈}}$ 与内线数有关, 由 (5.1) 式即得

$$G_c(p) = \Lambda + \Lambda [-(p^2 + m^2)] \Lambda + \Lambda [-(p^2 + m^2)] \Lambda [-(p^2 + m^2)] \Lambda + \dots \\ = \frac{\Lambda}{1 + (p^2 + m^2) \Lambda} \quad (5.2)$$

其中 Λ 是在动量空间里所有不可约连通图之和. 在坐标空间里 Λ 为图 4 所示.

$$\Lambda = \begin{matrix} X \cdot Y + X \circ Y + X \otimes Y + X \oplus Y + X \ominus Y \\ + X \oplus Y + X \ominus Y + X \otimes Y + X \circ Y + \dots \end{matrix}$$

图 4

六、 $a \rightarrow 0$ 的强耦合展开式及其发散问题处理

采用 Padé-type 外插技术^[16-18] 可以消除格点 $a \rightarrow 0$ 的强耦合展开式中的发散困难, 但计算量较大. 我们研究一下处理发散问题时的收敛情形.

一维情况下所有不可约连通图之和 Γ 满足^[19]

$$\frac{1}{g} = \frac{m^2 \Gamma}{g} + \Gamma^2 [1 + \Gamma \partial_x^2 + \Gamma^2 (\partial_x^2)^2 + \Gamma^3 (\partial_x^2)^3 + \cdots] \delta(x-y) \Big|_{x=y}, \quad (6.1)$$

应用格点方式:

$$\partial_x^{2s} \delta(x-y) \Big|_{x=y} = (-1)^s a^{-2s-1} \frac{(2s)!}{(s!)^2}$$

可化成

$$\frac{1}{g} = \frac{m^2 \Gamma}{g} + \frac{\Gamma^2}{(4\Gamma + a^2)^{1/2}}. \quad (6.2)$$

下面我们研究质量很小可忽略 ($m = 0$) 的情形.

我们首先将(6.2)式中的 Γ 表成如下形式:

$$\Gamma = \beta \left(\frac{1}{ga^3} \right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{1}{ga^3} \right)^{n/2}; \quad (A_0 \neq 0),$$

采用待定法确定出 β 、 α 以及各 A_n 的值后, 得到

$$\Gamma = t g^{-2/3}; \quad t = x^{-1/3} \left\{ 1 + x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{8} x^4 - 2x^5 + \frac{39}{16} x^6 - \frac{1}{2} x^7 + \cdots \right\}, \quad (6.3)$$

其中 $x = \frac{1}{ga^3}$. 当 $a \rightarrow 0$ 时, t 前五个外插值为 1.442, 1.513, 1.537, 1.550, 1.557 和 t

精确值 $2^{2/3} = 1.587$ 比较收敛很好.

感谢王珮老师的指导以及彭宏安、高崇寿、宋行长三位老师的帮助!

参 考 文 献

- [1] E. R. Caianiello, *Nuovo Cimento*, **10**(1953), 1634; **11**(1954), 492.
- [2] E. R. Caianiello, and G. Scarpetta, *Nuovo Cimento*, **22A**(1974), 448; *Lett. Nuovo Cimento*, **11**(1974), 283.
- [3] W. Kainz, *Lett. Nuovo Cimento*, **12**(1975), 217.
- [4] S. Kövesi-Domokos, *Nuovo Cimento*, **33A** (1976), 769.
- [5] R. Menikoff and D. H. Sharp, *J. Math. Phys.*, **19**(1978), 135.
- [6] B. F. L. Ward, *Nuovo Cimento*, **45A** (1978), 1; **45A** (1978), 28.
- [7] S. Horl, *Nucl. Phys.*, **30**(1962), 644.
- [8] L. I. Schiff, *Phys. Rev.* **92**(1953), 766.
- [9] G. A. Baker, *J. Math. Phys.*, **16**(1975), 1324.
- [10] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
- [11] R. Balian, J. M. Drouffe, and C. Itzykson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3376; **11**(1975), 2098; (1975), 2104.

- [12] S. Drell, M. Weinstein, and S. Yankielowicz, *Phys. Rev.*, D14 (1976), 1627.
- [13] T. Banks, L. Susskind, and J. Kogut, *Phys. Rev.*, D13(1976), 1043.
- [14] R. Benzi, G. Martinelli, and G. Parisi, Frascati report, 1978.
- [15] Carl M. Bender, Fred. Cooper, G. S. Guralnik, and David H. Sharp, *Phys. Rev.*, D19(1979), 1865.
- [16] Russel E. Caflisch and Kevin C. Nunan, *Phys. Rev. Lett.*, 46(1981), 1.
- [17] Carl M. Bender, Fred Cooper, G. S. Guralnik, Ralph Roskies, and David H. Sharp, *Phys. Rev. Lett.*, 43(1979).
- [18] Carl M. Bender, Lawrence R. Mead, and L. M. Simmons, Jr. *Phys. Rev.*, D24(1981), 2674.
- [19] S. Coloman, R. Jackiw and H. D. Politzer, *Phys. Rev.*, D10(1974), 2491.

STRONG-COUPLING EXPANSION IN σ -MODEL

ZHANG ZHONG-CAN
(Chongqing University)

ABSTRACT

The general formulation and Feynman rules of strong coupling expansion in σ model are derived. Then the reduction of strong coupling expansion formulation is investigated. Finally, using Padé-type extrapolation technique, a useful research about dealing with divergences is presented.