第8卷 第5期　　高能物理与核物理　　Vol. 8, No. 5
1984 年 9 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Sept., 1984

$SU(3)$ 格点规范理论的变分分析*

陈天崙　周洪模　李铁忠　冼鼎昌
(南开大学)　(高能物理研究所)
郑希特
(成都科技大学)

摘　要

用拉氏形式的变分方法对格点规范理论中的 $SU(3)$ Wilson 模型进行了研究，结果没有发现相变点. 这与蒙特卡罗模拟得到的结论一致.

近几年来在格点规范理论中蒙特卡罗模拟给出了不少的结果，但为了对问题的物理实质有较清晰的了解并为朝着建立强相互作用理论的方法前进，对于格点规范理论进行解析的研究一直是一个非常重要的课题. 鉴于严格解的困难，曾发展了一些近似的解析方法，这里我们简单报告用拉氏变分法[1]对格点的 $SU(3)$ Wilson 模型所作的计算结果.

$SU(3)$ 的 Wilson 模型的作用量为

$$S = \frac{\beta}{2}\sum_P \mathrm{tr}\ (U_P + U_P^\dagger), \tag{1}$$

这里 U_P 是在一个元格四边上定义的 $SU(3)$ 元素的乘积，求和遍及所有的元格. β^{-1} 正比于耦合常数的平方. 对 (1) 所作的蒙特卡罗模拟表明：当 β 从强耦合区变到弱耦合区时，在四维情况下不存在相变点而在 $\beta = 6.31$ 时有一个较尖锐的比热峰[2]. 简单平均场计算的结果是在 $\beta = 6.19$ 或 $\beta = 5.84$ 存在着一个相变点[3,4].

拉氏变分法[1]在讨论 $SU(2)$ 格点理论中已表明它比简单平均场方法为佳，因而，值得用这个方法来讨论 $SU(3)$ 的情况.

按变分法的处理[1]，为简单计，选取试探作用量为

$$S_0 = \sum_l \mathrm{tr}\ (U_l J^+ + U_l^\dagger J), \tag{2}$$

式中求和是对所有的链进行，J 是对所有链都一样的一个 3×3 矩阵，其矩阵元作为变分参数. 相应的配分函数为

$$Z_0 \equiv e^{-W_0} = \int [dU] e^{S_0} = [f(J, J^+)]^{Md}, \tag{3}$$

Md 为链的总数，d 为维数，且

---

* 中国科学院科学基金资助的课题.

本文 1983 年 12 月 28 日收到.

$$f(J, J^{+}) = \int [dU] \exp\{\mathrm{tr}\,(UJ^{+} + U^{+}J)\}. \tag{4}$$

与(1)相应的配分函数为

$$Z \equiv e^{-W} = \int [dU] e^{S}. \tag{5}$$

由(5)有不等式

$$W \leqslant W_0 - \langle S - S_0 \rangle_0 \equiv W_{\mathrm{eff}}, \tag{6}$$

其中

$$\langle S - S_0 \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int [dU](S - S_0) e^{S_0}. \tag{7}$$

变分法的一个关键是要选这样的 S_0 以使 Z_0 能有严格的解析表达式. 有了此表达式后,式(7)便可通过对 Z_0 中的变分参数求导而算出,然后再求 W_{eff} 的极小而给出 W 的上界,而 W 是直接比例于系统的自由能的.

对 $SU(3)$ 的情况,由我们选取的 S_0 决定的 Z_0 已有过解析表达式[5,6]:

$$f(J, J^{+}) = \frac{i}{\pi} \oint \frac{dp}{p} \frac{1}{\sqrt{T(p)}} J_1\left(\frac{2}{p}\sqrt{T(p)}\right) e^{-Q/p}, \tag{8}$$

这里回路积分绕极点进行;

$$\begin{aligned} &T(p) = p^3 - Xp^2 + Yp - Z = \det\,(p\mathbb{1} - JJ^{+}), \\ &X = \mathrm{tr}\,(JJ^{+}), \quad Y = \frac{1}{2}[(\mathrm{tr}\,(JJ^{+}))^2 - \mathrm{tr}(JJ^{+})^2], \\ &Z = \det\,(JJ^{+}), \quad Q = \det J^{+} + \det J. \end{aligned} \tag{9}$$

现取如下特殊对角形式的变分矩阵

$$J = z e^{i\theta}, \tag{10}$$

式(8)作 $p \to 1/x$ 变换后有形式

$$f(J, J^{+}) = \frac{1}{2\pi i} \oint dx \sqrt{\frac{x}{P(x)}}\, I_1\left(2\sqrt{\frac{P(x)}{x}}\right) e^{xQ}, \tag{11}$$

这里 I_1 是修正的贝塞尔函数,

$$\begin{aligned} Q &= 2z^3 \cos 3\theta, \\ P(x) &= (1 + xz^2)^3. \end{aligned} \tag{12}$$

展开(11)的被积函数及完成迴路积分,得

$$f(J, J^{+}) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \cdot \frac{3^{n-i} z^{3k-n-i-j-3} (2\cos 3\theta)^{k-n-i-j-1}}{(k+1)!(k-n)!(n-i)!(i-j)!j!(k-n-i-j-1)!}, \tag{13}$$

式(7)的积分可按[1]中的方法算出. 定义单位链的自由能 $E = W/(Md)$, 对(6)变分求极值就可得到自由能的上界,原则上 S_0 选择得越好, E 就越接近真实值.

$$E = E_0 - \frac{\beta(d-1)}{32}\left[\left(\frac{\partial \ln f}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{z^2}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \theta}\right)^2\right]^2 + z\frac{\partial \ln f}{\partial z}, \tag{14}$$

$$E_0 = \frac{W_0}{Md} = -\ln f. \tag{15}$$

在式 (14) 中的 J、θ 由解极值条件

$$\partial E/\partial J = 0, \quad \partial E/\partial \theta = 0 \tag{16}$$

而定出. 由于 (13) 是个收敛的无穷级数, 当代入 (14)、(16) 计算时是切断有限项而逐步增大项数至获得稳定解为止.

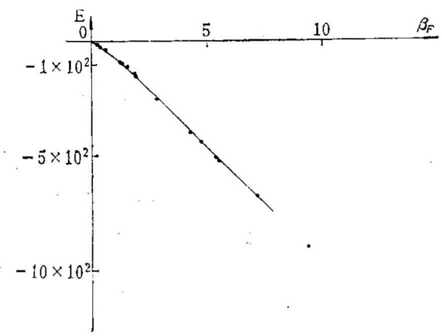

图 1　四维情况下单链自由能对 β 的关系

图 1 给出了四维情况下 $E(\beta)$ 曲线, 由于 θ 是以 $\cos 3\theta$ 的形式出现, 故变分参数的范围取 $0 \leqslant \theta \leqslant 60°$ 和 $0 \leqslant z \leqslant 20$. 除 $z=0$ 对应 $E=0$ 的平庸解外, 另一支非平庸解实际上是一条 $E<0$ 的光滑曲线. 忆及在 $SU(2)$ 等情况中[1], 当 β 由 0 逐渐增大时, 相应的自由能由平庸解的零值到出现一支新的解, 当新的一支解开始变为负能量时则标志着一个新的相出现. 现在非平庸的一支解总是负能量的解, 故 $E=0$ 的并不实现, 从而表明在 $SU(3)$ 的 Wilson 模型中在变分法计算中没有相变发生, 这与蒙特卡罗计算结果一致[2].

目前我们计算的结果中还不能确切判断比热峰的存在. 为判断比热峰是否存在, 需要作更细致的变分处理, 有待进一步的研究.

参　考　文　献

[1] X. -T. Zheng (郑希特). C. -I. Tan and T. -L. Chen(陈天崙), *Phys. Rev.*, **D26** (1982), 2843.
[2] R. C. Edgar and L. M. Crossen, *J. Phys.*, G7 (1982), L85.
H. Grosse and H. Kuhnelt, *Nucl. Phys.*, B**205**, (1982), 273.
C. P. Bachas and R. F. Dashen, *Nucl. Phys.*,B**210** [FS6] (1982), 583.
[3] P. Cvitanovic, J. Greensite and B. Lautrup. *Phys. Lett.*, **105**B (1981), 197.
[4] D. J. Pritchard. *Phys. Lett.*, **106**B (1981), 193.
[5] K. E. Eriksson, N. Svartholm and B. S. Skagerstam, CERN Preprint, TH-2974 (1980).
[6] R. Brower, P. Rossi and C. -I. Tan, *Nusl. Phys.*, **B190** [FS3] (1981), 699.

VARIATIONAL ANALYSIS OF THE $SU(3)$ LATTICE GAUGE THEORY*

CHEN TIAN-LUN ZHOU HONG-MO
(Nankai Uinversity)

LI TIE-ZONG XIAN DING-CHANG
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

ZHENG XI-TE
(Chengdu University of Science and Technology)

ABSTRACT

The variational method in Lagrangian formalism has been applied to investigate the $SU(3)$ Wilson model in lattice gauge theory. No phase transition point has been found. The result is in agreement with that obtained by Monte Carlo simulations.

* This work has been supported in part by the Science Fund of Academia Sinica.