

偶偶变形核的集体激发能谱

II. 基带能谱的分析

吴崇试 曾谨言

(北京大学物理系)

摘 要

本文给出了偶偶变形核基带的能级公式。它可以近似地表示成一个二参数的简单的有限形式，便于分析实验数据。根据这个近似公式分析了几个典型偶偶核的基带，得到了令人满意的结果。还讨论了原子核形变随角动量的变化。

一、引 言

在前文^[1]中，我们从具有特定位能形式的 Bohr 哈密顿量出发，在放弃绝热近似的条件下，导出了偶偶变形核集体激发能谱的振动-转动带结构。在推导过程中，我们作了如下简化假设：

(1) 采用 β 可分离变数的集体位能，

$$V(\beta, \cos 3\gamma) = \frac{1}{2} C\beta^2 + \frac{\hbar^2}{2B\beta^2} x(\cos 3\gamma), \quad C > 0, \quad (1.1)$$

其中，参数 C 是原子核的表面刚度， B 是原子核表面振荡的质量参数，

$$x(\cos 3\gamma) = x_0 + 9x_2 \sin^2 3\gamma, \quad x_0, x_2 > 0, \quad (1.2)$$

x_0 和 x_2 是待定参数。

(2) 原子核的形状对于轴对称的偏离不大，因而当转动能按 $\sin 3\gamma$ 的幂次展开时，可以略去 $\mathcal{O}(\sin^4 3\gamma)$ 的项。

这样得到的原子核集体激发谱，可划分为一系列的振动-转动带。而在一个转动带中，原子核的形变和转动惯量都不再是一个常数，原子核的转动谱也将在不同程度上偏离 $I(I+1)$ 的规律。

本文将应用文献^[1]中得到的结果，来分析偶偶变形核的基带。在第二节中，我们给出了原子核基带能级的近似公式。公式只含有两个参数，便于分析实验数据。第三节中，应用这个公式分析了几个典型偶偶核的实验数据，结果相当满意。第四节讨论了基带中原子核形变随角动量的变化。最后，在附录中给出了本文近似公式合理性的讨论。

二、原子核的基转动带

根据文献[1]中的推导,原子核的集体激发能量为

$$E_I^{m n K} = \hbar\omega \left\{ 2m + \sqrt{x_0 + A_{nKI} + \frac{9}{4}} - \sqrt{x_0 + A_{000} + \frac{9}{4}} \right\}. \quad (2.1)$$

其中, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ 是标志 β 振动及 γ 激发的量子数, I 和 K 分别是原子核的总角动量及其在对称轴上的投影的量子数. 当转动能按 $\sin 3\gamma$ 的幂级数展开而略去 $\mathcal{O}(\sin^4 3\gamma)$ 项时, K 仍然是好量子数. 每一个转动带, 可以用三个量子数 $m n K$ 表征. $\omega = \sqrt{C/B}$ 是原子核的四极振荡频率.

$$A_{nKI} = \frac{11}{27} [I(I+1) - 3K^2] + 9x_2 + 9\lambda_{\frac{K}{2}, \frac{K}{2}+n} (C_{KI}), \quad (2.2)$$

$$C_{KI}^2 = \frac{2}{243} [I(I+1) - 3K^2] + x_2. \quad (2.3)$$

$\lambda_{\frac{K}{2}, \frac{K}{2}+n}$ 是椭圆坐标下波动方程

$$\left\{ \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dS}{d\eta} \right] + \left[\lambda - \frac{\left(\frac{K}{2}\right)^2}{1 - \eta^2} + C_{KI}^2 \eta^2 \right] S = 0, \right. \quad (2.4a)$$

$$S(-\eta) = \pm S(\eta), \quad (2.4b)$$

$$S(1) \text{ 有界} \quad (2.4c)$$

的第 n 个本征值.

对于基转动带, $m = n = K = 0$, 我们有

$$E_I^g = \hbar\omega \left\{ \sqrt{x_0 + A_{00I} + \frac{9}{4}} - \sqrt{x_0 + A_{000} + \frac{9}{4}} \right\}, \quad (2.5)$$

$$A_{00I} = \frac{11}{27} I(I+1) + 9x_2 + 9\lambda_{00}(C_{0I}), \quad (2.6)$$

$$C_{0I}^2 = \frac{2}{243} I(I+1) + x_2. \quad (2.7)$$

这样, 问题便归结为求解本征值问题 (2.4). 然而, 对于大量实验数据的分析表明, 对于变形核的基带, 在相当大的角动量范围内, 激发能可以相当好地近似表为

$$E_I^g = a \{ \sqrt{1 + bI(I+1)} - 1 \}, \quad (2.8)$$

其中 a 和 b 是两个参数. 参数 a 具有能量的量纲, 而 b 是一个无量纲量. 以后我们将看到, 参数 b 就决定了激发能 $I(I+1)$ 展开式的收敛半径, 而 $\frac{\hbar^2}{ab}$ 则是原子核的基态转动惯量^[2,3].

对于能级公式 (2.8), 我们可以理解为 (2.5) 式的简化. 这是因为, 当 x_2 不太大时, 对于方程 (2.4) 的最低本征值, 近似地有^[4]

$$\lambda_{00}(C_{0f}) \approx -\frac{1}{3} C_{0f}^2. \quad (2.9)$$

这相当于只保留 λ_{00} 的级数表达式^[4]中的第一项(关于这个近似的合理性, 我们将在附录中进一步讨论). 在这个条件下,

$$A_{00f} \approx \frac{31}{81} I(I+1) + 6x_2, \quad (2.10)$$

$$E_{I'}^g \approx \hbar\omega \sqrt{\bar{x} + \frac{9}{4}} \left\{ \sqrt{1 + \frac{31}{81} \frac{1}{\bar{x} + \frac{9}{4}} I(I+1)} - 1 \right\}, \quad (2.11)$$

其中,

$$\bar{x} = x_0 + 6x_2. \quad (2.12)$$

比较(2.11)及(2.8)式, 即得

$$a = \hbar\omega \sqrt{\bar{x} + \frac{9}{4}}, \quad (2.13)$$

$$b = \frac{31}{81} \frac{1}{\bar{x} + \frac{9}{4}}. \quad (2.14)$$

但是, (2.8) 式也许可以在更广泛的条件下成立. 事实上, 我们也曾经研究过某些其它形式的集体哈密顿量, 也可以导出类似的公式. 所以, 下面我们就从 (2.8) 式出发来讨论原子核的基带能级.

三、与实验的比较

由公式(2.8)可以看出, 原子核的基带激发能只依赖于两个参数, 即 a 和 b . 而且, 比值 $E_{I'}^g/E_{I-2}^g$ 只与 b 有关. 因此, 根据原子核基带中某两条能级的实验值, 就可以很方便地定出这两个参数的数值, 并进而计算出原子核的基带能谱.

我们用这个方法分析了偶偶变形核的基带. 表 1 中给出了几个典型的例子. 这几个原子核的基带能谱都比较完整, 实验上已经测量到相当高的自旋. 可以看出, 计算结果在相当大的角动量范围内和实验数据非常符合, 理论和实验值的相对偏差一般不超过 1%.

为了比较起见, 表 1 中还列出了常用的两个、三个和四个参数的 $I(I+1)$ 展开及 VMI 模型^[5]的计算结果. 显然, $I(I+1)$ 展开的计算结果是不能令人满意的. VMI 模型的计算结果也稍逊于本文的结果. 以后我们还将论证, 本文的基带能级公式 (2.8) 和 VMI 模型之间存在着密切的联系^[3].

对希土区及铜系区的一系列偶偶核基带的分析表明, 在带交叉区以下, 本文的近似公式(2.8)也都很好成立. 为了节约篇幅, 这里不再一一列出.

我们认为, 用这样一个二参数的能级公式去拟合实验数据, 之所以能获得如此满意的结果, 是由于恰当地考虑了振动(或形变)对基带的影响. 本文的公式适用于基带与超带(s 带)未发生交叉的区域. 在带交叉区, 在消除了带交叉的影响后, 可以预期, 本文的公

表 1 几个典型偶偶变形核的基带能级
(括号内的数字是计算中所用的输入值)

(a) ^{166}Er

I	$E_I(\text{keV})$					
	实验值 ^[6]	本文计算值 [*]	$I(I+1)$ 展开的计算值 ^{†)}			VMI 模型 计算值 ^[5]
			AB	ABC	ABCD	
2	80.57	(80.57)	(80.57)	(80.57)	(80.57)	(80.6)
4	264.98	(264.98)	(264.98)	(264.98)	(264.98)	(264.8)
6	545.4	545.4	544.6	(544.6)	(544.6)	544.6
8	911.2	911.2	905.8	912.2	(911.2)	910.6
10	1350	1350.9	1330.1	1356.8	1347.2	1354.2
12	1847	1853	1794	1877	1827	1867.3
14		2408	2269	2480	2293	2443.5
16		3006	2722	3195	2621	3077
18		3639	3115	4074	2556	
20		4303	3405	5207	1610	

*⁾ 计算中所用参数值为 $a = 6754.4\text{keV}$, $b = 0.0040$.

†) AB、ABC 及 ABCD 分别表示两个、三个及四个参数的 $I(I+1)$ 展开.

(b) ^{168}Yb

I	$E_I(\text{keV})$					
	实验值 ^[7]	本文计算值 [*]	$I(I+1)$ 展开的计算值			VMI 模型 计算值 ^[5]
			AB	ABC	ABCD	
2	87.7	(87.7)	(87.7)	(87.7)	(87.7)	(87.0)
4	286.6	(286.6)	(286.6)	(286.6)	(286.6)	(284.3)
6	585.3	585.2	582.9	(585.3)	(585.3)	581.2
8	970.1	968.7	955.1	974.9	(970.1)	966.1
10	1425.5	1422	1374	1460	1414	1428.7
12	1936	1932	1801	2072	1835	1960.1
14	2489	2486	2192	2895	2000	2553.3
16	3073	3077	2494	4079	1336	3202.5
18	3687	3696	2646	5879	-1383	
20	4337	4338	2579	8676	-8523	

*⁾ $a = 5081.5\text{keV}$, $b = 0.0058$.

(c) ^{172}Yb

I	$E_I(\text{keV})$					
	实验值 ^[8]	本文计算值 [*]	$I(I+1)$ 展开的计算值			VMI 模型 计算值 ^[5]
			AB	ABC	ABCD	
2	78.7	(78.7)	(78.7)	(78.7)	(78.7)	(78.9)
4	260.3	(260.3)	(260.3)	(260.3)	(260.3)	(260.3)
6	540.0	540.1	539.9	(539.9)	(539.9)	538.6
8	912.0	911.5	909.9	910.5	(912.0)	906.6
10	1369.8	1366	1360	1362	1377	1357.0
12	1907	1896	1876	1884	1958	1882.9
14	2518 (带交叉)	2493	2443	2463	2742	2477.8

*⁾ $a = 11446\text{keV}$, $b = 0.0023$.

续表 1

(d) ^{238}U

I	E_I (keV)					
	实验值 ^[9]	本文计算值 ^{*)}	$I(I+1)$ 展开的计算值			VMI 模型 计算值 ^[5]
			AB	ABC	$ABCD$	
2	44.7	44.76	44.73	(44.7)	(44.7)	(44.7)
4	148	(148)	(148)	(148)	(148)	(148.2)
6	307	307	307	(307)	(307)	308.4
8	518	(518)	(518)	518	(518)	522.5
10	776	777	775	763	785	787.6
12	1077	1078	1071	1031	1143	1100.3
14	1415	1418	1396	1289	1711	1457.7
16	1788	1790	1742	1494	2787	1856.6
18	2191	2191	2095	1582	5004	
20	2619	2618	2444	1464	9568	
22	3068	3066	2772	1020	18607	
24	3535	3533	3064	93.9	35650	
26	4019	4016	3302	-1517	66278	
28	4518	4513	3467	-4070	118969	
30	5036	5023	3537	-7880	206187	

*) $a = 6509\text{keV}$, $b = 0.0023$.

(e) ^{248}Cm

I	E_I (keV)					
	实验值 ^[9]	本文计算值 ^{*)}	$I(I+1)$ 展开的计算值			VMI 模型 计算值 ^[5]
			AB	ABC	$ABCD$	
2	43.4	(43.4)	(43.4)	(43.4)	(43.4)	(43.4)
4	143.6	143.8	143.9	(143.6)	(143.6)	(143.8)
6	298.2	299.1	299.5	(298.2)	(298.2)	299.8
8	505.1	506.4	507.3	503.9	(505.1)	509.1
10	760.9	761.9	763.1	757.0	768.5	769.1
12	1061.7	(1061.7)	(1061.7)	1055	1114	1077.1
14	1403	1402	1397	1395	1619	1430.2
16	1781	1777	1761	1780	2467	1826.0
18	2189	2185	2146	2214	4034	
20	2623	2621	2542	2710	7020	
22	3078	3081	2939	3288	12639	
24	3554	3564	3324	3977	22883	
26	4049	4066	3685	4819	40867	
28	4565	4586	4006	5873	71293	
30	5107	5120	4278	7215	121032	

*) $a = 8060\text{keV}$, $b = 0.0018$

式可能也还是合用的.

四、原子核形变随角动量的变化

在上面的能级公式中,转动能并不是 $I(I+1)$ 的线性函数,这意味着原子核的转动惯量并不是一个常数.与此相联系的是原子核的形变也不是一个常数,而要随角能量缓慢地、然而可以觉察地变化.

根据文献[1]中给出的原子核波函数,可以计算出基带中各状态下形变 β 的方均根值 β_I ,

$$\begin{aligned}\beta_I^2 &= \langle 000I | \beta^2 | 000I \rangle \\ &= \frac{\hbar}{B\omega} \left(\sqrt{x_0 + \Lambda_{00I} + \frac{9}{4} + 1} \right) \\ &= \frac{a}{C} \left(\sqrt{1 + bI(I+1)} + \sqrt{\frac{81}{31}b} \right).\end{aligned}\quad (4.1)$$

所以,随着角动量 I 的增大, β_I 也增大. 对于基态,

$$\beta_0^2 = \frac{a}{C} \left(1 + \sqrt{\frac{81}{31}b} \right).\quad (4.2)$$

因此,

$$\beta_I^2 = \beta_0^2 \frac{\sqrt{1 + bI(I+1)} + \sqrt{\frac{81}{31}b}}{1 + \sqrt{\frac{81}{31}b}}.\quad (4.3)$$

比值 β_I/β_0 只依赖于原子核的总角动量 I 及参数 b . 图 1 给出了几个典型的 b 值下 β_I/β_0 随 I 的变化. 随着 b 的减小, β_I 的上升速度逐渐减慢,换言之,原子核的形变就越稳定. 例如,对于 ^{168}Yb , $b = 0.0058$, $\beta_{I=10}$ 比 β_0 增大 12%, 而 $I = 20$ 时的形变则比基态形变增大约 1/3. 对于 ^{168}Er , $b = 0.00195$, $I = 10$ 和 $I = 20$ 时的形变值则分别比基态值增大约 5% 和 15%.

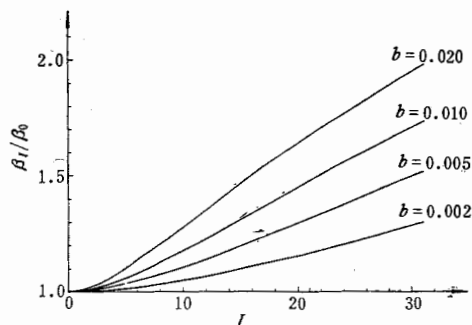


图 1 β_I/β_0 随 I 的变化

由(3.1)及(3.2)式,我们还能得到

$$\beta_I^2 - \beta_0^2 = \frac{a}{C} [\sqrt{1 + bI(I+1)} - 1],\quad (4.4)$$

或者,再利用(2.8)式,进一步得出

$$E_I^g = C(\beta_I^2 - \beta_0^2), \quad (4.5)$$

这就是说,偶偶核基带的激发能与 β_I^2 的增量成正比,比例常数就是原子核的表面刚度.

应当指出,这里计算出的 β_I 值,就可以用来衡量原子核在该状态下的形变. 事实上,当原子核处于基态时, β 振动的有效位能为

$$V_{\text{eff}}(\beta) = \frac{1}{2} C \beta^2 + \frac{\hbar^2}{2B\beta^2} (x_0 + A_{00I}). \quad (4.6)$$

其平衡位置在

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{\hbar}{B\omega} \sqrt{x_0 + A_{00I}} \\ &= \frac{a}{C} \sqrt{1 + b \left[I(I+1) - \frac{9}{4} \cdot \frac{81}{31} \right]}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

这和(3.1)式给出的 β_I^2 值非常接近. A_{00I} 的出现,反映了集体转动所产生的离心作用. 角动量愈大,离心作用愈强.

不仅如此,我们还可以由原子核的波函数求出几率密度的极值位置. 对于 β 振动部分,此极大值对应于

$$\beta^2 = \frac{a}{C} \left(\sqrt{1 + bI(I+1)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{81}{31} b} \right), \quad (4.8)$$

它介乎(3.1)式与(3.7)式给出的数值之间.

附录 关于 λ_{00} 近似值的讨论

在导出基带能级的近似公式(2.8)时,我们利用了方程(2.4)的最低本征值 λ_{00} 的近似结果,即只保留 λ_{00} 级数展开式^[4]

$$\begin{aligned} \lambda_{00}(C_{0I}) &= -\frac{1}{3} C_{0I}^2 - \frac{2}{135} C_{0I}^4 \\ &\quad - \frac{4}{243 \cdot 35} C_{0I}^6 + \frac{26}{3^7 \cdot 5^3 \cdot 7} C_{0I}^8 + \dots \end{aligned}$$

中的第一项. 实际计算表明,这个近似不失为一个好的近似.

表 2 椭球坐标下波动方程(2.4)的最低本征值(取 $\alpha_2 = 0$)

I	C_{0I}^2	$-\lambda_{00}(C_{0I})$	A_{00I}	$\frac{31}{81} I(I+1)$	I	C_{0I}^2	$-\lambda_{00}(C_{0I})$	A_{00I}	$\frac{31}{81} I(I+1)$
				A_{00I}					A_{00I}
0	0	0	0	1.0000	16	2.2387	0.8253	103.3874	1.0069
2	0.0494	0.0165	2.2960	1.0002	18	2.8148	1.0648	129.7497	1.0088
4	0.1646	0.0553	7.6507	1.0005	20	3.4568	1.3456	159.0010	1.0110
6	0.3457	0.1170	16.0580	1.0010	22	4.1646	1.6720	191.1002	1.0134
8	0.5926	0.2028	27.5079	1.0017	24	4.9383	2.0490	226.0038	1.0160
10	0.9053	0.3143	41.9864	1.0027	26	5.7778	2.4813	263.6683	1.0190
12	1.2840	0.4534	59.4754	1.0038	28	6.6831	2.9735	304.0530	1.0221
14	1.7284	0.6227	79.9516	1.0052	30	7.6543	3.5295	347.1231	1.0254

表2列出了 λ_{00} 以及 A_{00I} 的精确值。为了简单起见,我们取 $\alpha_2 = 0$ 。得到的 A_{00I} 精确值非常接近于它的近似值 $\frac{31}{81}I(I+1)$ 。可以估计,即使 $\alpha_2 \sim 10^\circ$, 上述结论也不会改变。

A_{00I} 的精确值略小于它的近似值,并且随着 I 的增大,偏差也逐渐增大。这说明在应用近似公式(2.8)分析实验数据时,如果让参数 b 随着 I 的增大而略有减小,可以得到更满意的结果。换句话说,由高激发态定出的 b 值应略小于由低激发态定出的 b 值。对实验数据的实际分析也的确表现出这样的趋势。

参 考 文 献

- [1] 吴崇试、曾谨言,高能物理与核物理,将发表。
- [2] 吴崇试、曾谨言,高能物理与核物理,将发表。
- [3] 吴崇试、曾谨言,高能物理与核物理,将发表。
- [4] A. N. Lowan, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, ed. M. Abramowitz and I. A. Stegun, p. 751.
- [5] M. A. J. Mariscotti, G. Scharff-Goldhaber and B. Buck, *Phys. Rev.*, **178** (1969), 1864
- [6] A. Buyrn, *Nuclear Data Sheets*, **14** (1975), 471.
- [7] L. R. Greenwood, *Nuclear Data Sheets*, **11** (1974), 385.
- [8] P. M. Walker, S. R. Faber, W. H. Bentley, R. M. Ronningen and R. B. Fireston, *Nucl. Phys.*, **A343** (1980), 45.
- [9] P. B. Piercey, J. H. Hamilton, A. V. Ramayya, H. Emling, P. Fuchs, E. Grosse, D. Schwalm, H. J. Wollersheim, N. Trantmann, A. Faessler and M. Ploszajczak, Proc. Intern. Conf. on Band Structure and Nuclear Dynamics (New Orleans, 1980), p. 57.

THE COLLECTIVE EXCITATION SPECTRA IN EVEN-EVEN DEFORMED NUCLEI II. ANALYSIS OF THE GROUND BAND

WU CHONG-SHI ZENG JIN-YAN
(Department of Physics, Peking University)

ABSTRACT

The vibrational-rotational band structure of the collective excitation spectrum in even-even deformed nucleus was established in previous paper. In this formulation the expression of the ground band spectrum can be written approximately in a closed form of two parameters. Using this new expression the ground bands of several typical even-even deformed nuclei are analyzed systematically. The calculation is in a agreement with the experiment. The variation of the nuclear deformation with the angular momentum is discussed in some detail.