第8卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 3
1984年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1984

玻尔-莫特逊模型与相互作用玻色子模型的比较

徐躬耦 杨亚天
(兰州大学)
顾金南
(中国科学院近代物理研究所)

摘要

本文分析了玻尔-莫特逊模型以及相互作用玻色子模型的基本论点,回顾了其他作者对这两种模型所作的比较,然后用生成坐标方法直接对这两种模型进行了全面的比较,指出了它们既基本相当又存在一定的差异,并简短地指出了判别这些差异的可能性.

一、引言

玻尔-莫特逊集体模型 (BMM)[1] 对阐明原子核的内部结构起了巨大的作用,在原子核物理的发展中至今仍起着深刻的影响. BMM 中的集体自由度是平均场的四极分量.这种自由度不携带核子数,故按规范空间转动变换的对称要求,应该用5个实变量 α_μ 及相应的集体动量 $-i\dfrac{\partial}{\partial\alpha_\mu^*}$ $(\alpha_\mu^*=(-)^\mu\alpha_{-\mu})$来表述.他们还认为这种集体运动的惯性比较大,集体运动哈密顿量可以用集体动量展开并截止于二次项.这样,BMM 哈密顿量的最普遍的形式可写为:

$$H_{\mathrm{BMM}}=V(\alpha)-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}B_{\mu\nu}(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha_\nu}. \tag{1}$$

$V(\alpha)$表示集体运动势能,是 α_μ 的标量函数; $B_{\mu\nu}(\alpha)$ 表示集体运动惯性参数,是由 α_μ 构成的二阶张量函数.

BMM 的不同极限情形主要由势能函数的性质来决定,并可区别为球形区、轴对称和非轴对称的变形区及 γ 不稳定区.通常在变形区,不用 α_μ 而用本体坐标 β,γ 及方位角 Ω,并在势能极小处将 $V(\beta,\gamma)$ 展开,取二次项;将 $B_{\mu\nu}(\alpha)$ 展开,取零次项,然后求解.原则上不论对于何种极限情形,上述 H_{BMM} 都可以在五维谐振子所构成的 Hilbert 空间求解.但实际计算时总是取一个截止的子空间,例如使五维谐振子的主量子数 $\sum_\mu N_\mu$ 限于某个

本文1983年1月21日收到.

最大值 N_m 以内. 以上所指出的这些可以认为是 BMM 的基本论点.

近年来，Arima-Iachello 提出相互作用玻色子模型 (IBM)[2]，也成功地解释了球形区、轴对称变形区以及 γ 不稳定区原子核的四极激发态. 他们认为，核的这种四极激发态性质可由相互作用着的表征 S 对的 s 玻色子和表征 D 对的 d 玻色子所构成的系统来描绘. 这种 s、d 玻色子都携带核子数 2，故总的玻色子数 N 等于参与激发的价核子数 $2N$ 的一半. 因为 S 对和 D 对有内部结构，用 s、d 玻色子来表述就会出现多玻色子间的相互作用. 他们认为 IBM 哈密顿量可按玻色子间相互作用展开，并截止于两玻色子相互作用. 所以对于某个具有 $2N$ 个价核子的原子核来说，IBM 哈密顿量的普遍形式为：

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{IBM}} = {} & \varepsilon_s N + \frac{1}{2} u_0 N(N-1) + \varepsilon'(d^+ \cdot \tilde{d}) \\ & + \sum_{l=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2l+1}\, C'_l \{[d^+ \times d^+]^{(l)} \times [\tilde{d} \times \tilde{d}]^{(l)}\}^{(0)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{v}_2 \{[d^+ \times d^+]^{(2)} \times [\tilde{d} \times \tilde{s}]^{(2)} + h.c.\}^{(0)} \\ & + \frac{1}{2} \tilde{v}_0 \{[d^+ \times d^+]^{(0)} \times [\tilde{s} \times \tilde{s}]^{(0)} + h.c.\}^{(0)}. \end{aligned} \tag{2}$$

IBM 的这种哈密顿量具有 $SU(6)$ 的性质. 可以按群链区分为 $U(5)$，$SU(3)$ 及 $O(6)$ 三种极限情形，相应于 BMM 中的球形、轴对称变形及 γ 不稳定三种极限情形. 以上这些可以认为是 IBM 的基本论点.

表面看来，BMM 与 IBM 之间似乎存在着很大的差异. 第一，BMM 是用 5 个实变量 α_μ 及其偏微商 $-i\dfrac{\partial}{\partial \alpha_\mu}$ 来表述的，而 IBM 则是由六个携带核子数的玻色子的产生(消灭)算子 s^+、d^+_μ(s、d_μ) 来表述的. 一个纯粹以连续变量来表述的薛定谔方程所描述的本是带整数角动量的玻色子的运动，特别对于谐振子可用相应的产生、消灭算子来表示. 不过从规范空间的转动性质考虑，以实的连续变量来表述的薛定谔方程只能用来描述不携带核子数的玻色子，而 IBM 中的玻色子却是带核子数的. 这一点或许会使人产生迷惑.

IBM 中有 6 种玻色子，但如果考虑到总玻色子数 N 确定的限制条件，也就是五个独立的集体自由度. 认真处理这个限制条件，对于 6 种玻色子体系的独立自由度可取为五种 s-d 玻色子转化. 而 s-d 玻色子转化是不改变核子数的，故这样的集体自由度可以用实变量来描述. 所以总玻色子数确定这一限制条件的消去，不仅解决了独立的集体自由度与受条件限制的集体自由度个数的表观差异问题，还同时解决了它们是否携带核子数的差异问题.

对于这两种模型的比较，已存在相当数量的工作. 第一类工作[3,4]并不消去 IBM 中总玻色子数确定这个条件，直接把六种玻色子的体系的状态用包含六个实变量 $\alpha_{\lambda\mu}(\lambda = 0, 2)$ 的微分方程在五维超曲面上的解来描述. 第二类工作则首先消去了这个条件. 不少作者[5-10]用本体坐标 β，γ 及方位角 Ω 作为五个独立自由度来表述. 有的工作[5-8]只考虑了相当于 BMM 的势能面的量，有的工作[9-10]进一步考虑了动效应，但除了 $U(5)$ 极限情形外，只给出了未厄密化的集体哈密顿量. 也有一些作者[11-13]迳采用实验室参考系中的

$\alpha_\mu(\alpha_\mu^* = (-)^\mu\alpha_{-\mu})$ 来表述，或者依赖于算子的代数结构的对应，或者依赖于相似变换来得到相应的集体哈密顿量．还有，以往的绝大多数工作是从 IBM 出发，来得到可以与 BMM 相比较的结果．仅个别工作[14]是从 BMM 出发来与 IBM 进行比较讨论的．

本文试图用生成坐标方法，直接从表象变换的观点，全面地对这两种集体模型进行比较讨论．

二、生成坐标方法与 Usui 算子

生成坐标方法是一种变换理论，既可用来讨论费密子系统的集体运动，也可用来讨论玻色子系统的运动．本节的讨论是普遍的．

设 $|\phi_0\rangle$ 是角动量等于零的态，$Q^+_{\lambda\mu}$ 是角动量及其投影分别为整数 λ_μ 的算子，这组算子 $\{Q^+_{\lambda\mu}\}$ 作用于 $|\phi_0\rangle$ 可产生一个子空间，这子空间中的任意态可通过连续变量 $\{q_{\lambda\mu}\}$ 来表述，

$$|\Psi\rangle = \int d\tau_q \exp\left[\sqrt{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}\right]|\phi_0\rangle f(q). \tag{3}$$

这里 $\sum\limits_\mu q^*_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}$ 对空间转动及时空反演不变，而且对规范空间的转动不变，所以 $Q^+_{\lambda\mu}$ 携带核子数时，$q^*_{\lambda\mu}$ 是复数，否则是实数．

因为 $|\Psi\rangle$ 是可归一化的，故 $f(q)$ 的渐近行为是 Gauss 函数．因此，我们使

$$f(q) = \frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)}} F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial q}\right)\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial q^*_{\lambda\mu}\partial q_{\lambda\mu}}\right]\exp\left[-\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]. \tag{4}$$

这里 $F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial q}\right)$ 是 $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial q_{\lambda\mu}}\right\}$ 的多项式，把它代入(3)式，得到

$$\begin{aligned}|\Psi\rangle = &\int d\tau_q \exp\left[\sqrt{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}\right] F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial q}\right)\\ &\times \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial q^*_{\lambda\mu}\partial q_{\lambda\mu}}\right]\frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)}}\exp\left[-\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right].\end{aligned} \tag{5}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\exp\left[\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]\exp\left[\frac{1}{4}\sum_\mu\frac{\partial^2}{\partial q^*_{\lambda\mu}\partial q_{\lambda\mu}}\right]\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,q^*_{\lambda\mu}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial q^*_{\lambda\mu}}\end{pmatrix}\\ &\times\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_\mu\frac{\partial^2}{\partial q^*_{\lambda\mu}\partial q_{\lambda\mu}}\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]\\ &=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(q^*_{\lambda\mu}+\frac{\partial}{\partial q_{\lambda\mu}}\right)\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_{\lambda\mu}-\frac{\partial}{\partial q^*_{\lambda\mu}}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{\lambda\mu}\\ b^+_{\lambda\mu}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{6}$$

这里

$$\left.\begin{aligned} b_{\lambda\mu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q^*_{\lambda\mu} + \frac{\partial}{\partial q_{\lambda\mu}}\right), \\ b^+_{\lambda\mu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_{\lambda\mu} - \frac{\partial}{\partial q^*_{\lambda\mu}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} &[b_{\lambda\mu}, b^+_{\lambda\nu}] = \delta_{\mu\nu}, \\ &[b_{\lambda\mu}, b_{\lambda\nu}] = [b^+_{\lambda\mu}, b^+_{\lambda\nu}] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(5)式可化为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = &\int d\tau_q \exp\left[-\frac{1}{4}\sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial q^*_{\lambda\mu}\partial q_{\lambda\mu}}\right]\frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]\right. \\ &\left.\cdot \exp\left[\sum_\mu b_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}\right]|\phi_0\rangle F(b^+)\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

把 $\exp\left[-\frac{1}{4}\sum_\mu \frac{\partial^2}{\partial q^*_{\lambda\mu}\partial q_{\lambda\mu}}\right]$ 展开，逐项积分，由于 Gauss 函数的存在，除第一项外，其他各项积分结果全为零．故

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = &\int d\tau_q \frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]\exp\left[\sum_\mu b_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}\right] \\ &\cdot |\phi_0\rangle F(b^+)\frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

注意到

$$\frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right] \equiv |0) \tag{11}$$

是谐振子的基态波函数，

$$b_{\lambda\mu}|0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q^*_{\lambda\mu} + \frac{\partial}{\partial \varphi_{\lambda\mu}}\right)\frac{1}{\pi^{(2\lambda+1)/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_\mu q^*_{\lambda\mu}q_{\lambda\mu}\right] = 0, \tag{12}$$

所以 $|0)$ 相当于玻色子真空态．(10)式可写为

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= (0|\exp\left[\sum_\mu b_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}\right]|\phi_0\rangle F(b^+)|0) \\ &= UF(b^+)|0). \end{aligned} \tag{13}$$

这里

$$U = (0|\exp\left[\sum_\mu b_{\lambda\mu}Q^+_{\lambda\mu}\right]|\phi_0\rangle, \tag{14}$$

U 就是 Usui 算子．(13)式表述了 $|\Psi\rangle$ 与 $F(b^+)|0)$ 之间的关系．这样，玻色子展开方法可归结为生成坐标方法的一种具体表达形式．

三、$SU(6)$ 群的 Schwinger 表示与 Holstein-Primakoff 表示的关系

IBM 实际上相当于 $SU(6)$ 群的 Schwinger 表示，总玻色子数确定为 N．一切可能的

状态可表为

$$F(\{d_\mu^+ s\})|\phi_0\rangle, \tag{15}$$

这里

$$|\phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}}(s^+)^N|0\rangle, \tag{16}$$

$F(\{d_\mu^+ s\})$ 为 $\{d_\mu^+ s\}$ 的多项式．因为 $|\phi_0\rangle$ 是角动量为零的态，$d_\mu^+ s$ 改变的角动量为 2，是整数，所以可引入另一种满足玻色统计的声子体系来表述原来的玻色子体系．声子的产生、消灭算子为 b_μ^+, b_μ

$$\left.\begin{aligned}&[b_\mu, b_\nu^+] = \delta_{\mu\nu},\\ &[b_\mu, b_\nu] = [b_\mu^+, b_\nu^+] = 0,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

声子的真空态为 $|0)$，

$$b_\mu|0) = 0. \tag{18}$$

相应的声子态用 $\{b_\mu^+\}$ 的多项式

$$F(\{b_\mu^+\})|0) = \sum_{\{n_\mu\}} C(\{n_\mu\}) \prod_\mu (b_\mu^+)^{n_\mu}|0) \tag{19}$$

来表示．其中 $C(\{n_\mu\})$ 是多项式系数．

根据前节的讨论，Usui 算子为

$$U \equiv (0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu d_\mu^+ s\right]|\phi_0\rangle. \tag{20}$$

经具体计算得到

$$UF(\{b_\mu^+\})|0) = F(\{d_\mu^+ s\})|\phi_0\rangle. \tag{21}$$

可见 $F(\{b_\mu^+\})|0)$ 与 $F(\{d_\mu^+, s\})|\phi_0\rangle$ 对应．

在 Schwinger 表示中，任意算子 O 的矩阵元转换到 Holstein-Primakoff 表示时为

$$\frac{\langle\phi_0|F_1^+(\{d_\mu^+ s\})OF_2(\{d_\mu^+ s\})|\phi_0\rangle}{\langle\phi_0|F_1^+(\{d_\mu^+ s\})\cdot F_1(\{d_\mu^+ s\})|\phi_0\rangle^{\frac{1}{2}}\,\langle\phi_0|F_2^+(\{d_\mu^+ s\})\cdot F_2(\{d_\mu^+ s\})|\phi_0\rangle^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(0|F_1^+(\{b_\mu^+\})U^+OUF_2(\{b_\mu^+\})|0)}{(0|F_1^+(\{b_\mu^+\})U^+UF_1(\{b_\mu^+\})|0)^{\frac{1}{2}}\,(0|F_2^+(\{b_\mu^+\})U^+UF_2\{(b_\mu^+)\}|0)^{\frac{1}{2}}}. \tag{22}$$

令

$$\mathscr{N}(b^+, b) \equiv U^+U, \tag{23}$$

$$\mathscr{O}(b^+, b) \equiv U^+OU, \tag{24}$$

$$F) \equiv F(b^+)|0), \tag{25}$$

于是上式可化为

$$\frac{(\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}F_1|\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{O}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}|\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}F_2)}{(\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}F_1|\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}F_1)^{\frac{1}{2}}\,(\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}F_2|\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}F_2)^{\frac{1}{2}}}. \tag{26}$$

可见 $N^{-\frac{1}{2}}\mathscr{O}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}$ 可作为 Holstein-Primakoff 表示中的等效算子．

因为

$$\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{O}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} = \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{O}\mathscr{N}^{-1})\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}, \tag{27}$$

$$\mathscr{O}\mathscr{N}^{-1} = U^+O(U^+)^{-1}, \tag{28}$$

所以可以先计算 $\mathscr{O}\mathscr{N}^{-1}$ 和 $\mathscr{N}$，再计算 $\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}\mathscr{O}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}$．利用玻色子空间的完备性，

$$1 = \sum_{\substack{\{n_\mu\}\\ \sum_\mu n_\mu \leqslant N}} \prod_\mu (d_\mu^+ s)^{n_\mu}|\phi_0\rangle \frac{1}{n_\mu!}\langle\phi_0|(s^+d_\mu)^{n_\mu}, \tag{29}$$

$\mathscr{O}$化为

$$\begin{aligned}\mathscr{O} &= \langle\phi_0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right]|0)\,O\,(0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu d_\mu^+ s\right]|\phi_0\rangle \\ &= \langle\phi_0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right] O \exp\left[-\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right] \\ &\quad\times \sum_{\substack{\{n_\mu\}\\ \sum_\mu n_\mu \leqslant N}} \prod_\mu (d_\mu^+ s)^{n_\mu}|\phi_0\rangle \frac{1}{n_\mu!}\langle\phi_0|(s^+ d_\mu)^{n_\mu} \\ &\quad\times \exp\left[\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right]|0)\ (0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu d_\mu^+ s\right]|\phi_0\rangle. \end{aligned}\tag{30}$$

注意到

$$(b_\mu)^{n_\mu}\mathscr{N} = \langle\phi_0|(s^+ d_\mu)^{n_\mu}\exp\left[\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right]|0)\ (0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu d_\mu^+ s\right]|\phi_0\rangle,\tag{31}$$

从(30)式得到

$$\begin{aligned}\mathscr{O}\mathscr{N}^{-1} = U^+ O (U^+)^{-1} &= \langle\phi_0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right] O \exp\left[-\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d\mu\right] \\ &\quad\times \sum_{\substack{\{n_\mu\}\\ \sum_\mu n_\mu \leqslant N}} \frac{1}{n_\mu!}(b_\mu d_\mu^+ s)^{n_\mu}|\phi_0\rangle.\end{aligned}\tag{32}$$

故 $SU(6)$ 群的 35 个生成算子为

$$\left.\begin{aligned} U^+(d_\mu^+ s)\,(U^+)^{-1} &= b_\mu^+\Big(N - \sum_k b_k^+ b_k\Big), \\ U^+(s^+ d_\mu)\,(U^+)^{-1} &= b_\mu, \\ U^+(d_\mu^+ d_\nu)\,(U^+)^{-1} &= b_\mu^+ b_\nu. \end{aligned}\right\}\tag{33}$$

现在再计算 $\mathscr{N}$

$$\begin{aligned}\mathscr{N} &= \langle\phi_0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu^+ s^+ d_\mu\right]|0)\ (0|\exp\left[\sum_\mu b_\mu d_\mu^+ s\right]|\phi_0\rangle \\ &= \sum_{\{n_\mu\}}\langle\phi_0|\prod_\mu \frac{1}{n_\mu!}(b_\mu^+ s^+ d_\mu)^{n_\mu}|0)\,(0|\frac{1}{n_\mu!}(b_\mu d_\mu^+ s)^{n_\mu}|\phi_0\rangle \\ &= \sum_{\substack{\{n_\mu\}\\ \sum_\mu n_\mu \leqslant N}} \prod_\mu \frac{N!}{\Big(N - \sum_\mu n_\mu\Big)!}\frac{(b_\mu^+)^{n_\mu}}{\sqrt{n_\mu!}}|0)\ (0|\frac{(b_\mu)^{n_\mu}}{\sqrt{n_\mu!}} \\ &= \frac{N!}{\Big(N - \sum_k b_k^+ b_k\Big)!}.\end{aligned}\tag{34}$$

这里利用了声子空间中的完备性，

$$1 = \sum_{\substack{\{n_\mu\}\\ \sum_\mu n_\mu \leqslant N}} \prod_\mu \frac{(b_\mu^+)^{n_\mu}}{\sqrt{n_\mu!}}|0)\ (0|\frac{(b_\mu)^{n_\mu}}{\sqrt{n_\mu!}}.\tag{35}$$

因此，$SU(6)$ 群的 35 个生成算子为

$$\left.\begin{aligned} N^{-\frac{1}{2}}U^{+}d_{\mu}^{+}s(U^{+})^{-1}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} &= b_{\mu}^{+}\sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}}, \\ \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}U^{+}s^{+}d_{\mu}(U^{+})^{-1}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}}\,b_{\mu}, \\ \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}U^{+}d_{\mu}^{+}d_{\nu}(U^{+})^{-1}\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}} &= b_{\mu}^{+}b_{\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

因为
$$U^{+}AB(U^{+})^{-1} = U^{+}A(U^{+})^{-1}\cdot U^{+}B(U^{+})^{-1}, \tag{37}$$

$$\mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}U^{+}AB(U^{+})^{-1}\mathscr{N}^{\frac{1}{2}} = \mathscr{N}^{-\frac{1}{2}}U^{+}A(U^{+})^{-1}\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}\cdot N^{-\frac{1}{2}}U^{+}B(U^{+})^{-1}\mathscr{N}^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

所以，对于由 $d_{\mu}^{+}s$, $s^{+}d_{\mu}$, $d_{\mu}^{+}d_{\nu}$ 等构成的等效算子，即可由相应的等效算子

$$b_{\mu}^{+}\sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}},\quad \sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}}\,b_{\mu},\quad b_{\mu}^{+}b_{\nu}$$

等构成.

四、IBM 与 BMM 的比较讨论

根据前述，我们可以将(2)式所示的 H_{IBM} 及电四极矩算子化到 Holstein-Primakoff 表示，得到

$$\begin{aligned} H_{\text{IBM}}(b^{+},b) = {}& \varepsilon_{s}N + \frac{1}{2}u_{0}N(N-1) + \varepsilon'(b^{+}\cdot\tilde{b}) \\ & + \sum_{l=0,2,4}\frac{1}{2}\sqrt{2l+1}\,C_{l}'\{[b^{+}\times b^{+}]^{(l)}\times[\tilde{b}\times\tilde{b}]^{(l)}\}^{(0)} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{v}_{2}\left\{b^{+}\sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}}\times[b^{+}\times\tilde{b}]^{(2)} + h.c.\right\}^{(0)} \\ & + \frac{1}{2}\tilde{v}_{0}\left\{b^{+}\sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}}\right. \\ & \left.\times\, b^{+}\sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}} + h.c.\right\}^{(0)}, \end{aligned} \tag{39}$$

$$T_{\text{IBM}}^{(2)}(b^{+},b) = q\left(b^{+}\sqrt{N-\sum_{k}b_{k}^{+}b_{k}} + h.c.\right) + q\chi[b^{+}\times\tilde{b}]^{(2)}. \tag{40}$$

上式相当于截止的四极声子模型的结果． 它只涉及五个独立的自由度，故可以由此对 IBM 与 BMM 进行比较研究.

把(7)式所示的结果

$$\left.\begin{aligned} b_{\mu}^{+} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_{\mu}-\frac{\partial}{\partial\alpha_{\mu}^{*}}\right), \\ b_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha_{\mu}^{*}+\frac{\partial}{\partial\alpha_{\mu}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

代入(39)式，并将 $\sqrt{N-(b^{+}\text{、}\tilde{b})}$ 展开，忽略高次项，就得到与(1)式所示的 H_{BMM} 基本相当的结果 $H_{\text{IBM}}\left(\alpha,\ -i\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\right)$. 不过在 $V(\alpha)$ 中只包含 α 的四次项，而在 $B_{\mu\nu}$ 中不仅包含 α

而且还包含 $\frac{\partial}{\partial\alpha}$. 由于 $V(\alpha)$ 只包含 α 的四次项，所以 IBM 不能很好地描述三轴不对称变形核. 由于 $B_{\mu\nu}$ 中还包含有 $-i\frac{\partial}{\partial\alpha}$，所以在较高激发态 IBM 有可能给出较好的结果.

反之，还可以从 BMM 出发考虑问题. 首先，对 BMM 哈密顿量

$$H_{\mathrm{BMM}}\left(\alpha,\ -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$

中的 α_μ 及 $-i\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu}$ 用(41)式的逆变换式，

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{\tilde{\mu}} + b_\mu^+),\\ -i\frac{\partial}{\partial\alpha_\mu^*} &= \frac{-i}{\sqrt{2}}(b_{\tilde{\mu}} - b_\mu^+),\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

来表述. 其次，引入截止因子，将 $b_\mu^+(b_{\tilde{\mu}})$ 换为

$$b_\mu^+\sqrt{N-(b^+、\tilde{b})}\ (\sqrt{N-(b^+、\tilde{b})}\,b_{\tilde{\mu}}).$$

因为 BMM 作为一个模型有它的适用界限. 例如角动量过大或激发能过高时，集体自由度与非集体自由度的耦合已不容忽略，BMM 已实际失效. 实际上，在模型的有效界限内，只需要在有限声子数的子空间内求解. 因此，可引入特定形式的截止因子. 如把截止因子的形式选为 $\sqrt{N_m-(b^+,\tilde{b})}$，可以得到与(39)式基本相当的 H_{BMM}. 两相比较，可见出现了多玻色子相互作用项. 这种项目在四极声子数较多的大变形核可能较为重要. 还应该指出，这里的 N_m 表述模型在有限界限内求解时实际需要的总声子数，与价核子数并不直接联系.

概括起来，这两种基本相当的模型之间主要存在以下两点差异：

(1) 在 IBM，$N=\frac{1}{2}$(核的价核子数)，而对 BMM，N_m 为求解时所需的最大声子数. 但是 N_m 取有限值的影响并不显著，主要表现在较高自旋和较高激发能的状态，此时，如转动排列效应等已经进入，模型本身已有不足之处，故难以判断二者之间的差异[15].

(2) $H_{\mathrm{BMM}}\left(\alpha,\ -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ 按集体动量展开，截止于二次项. H_{IBM} 按玻色子间相互作用展开，截止于两玻色子相互作用. 故在大变形核和球形核的较高激发态两种模型可能呈现差异. 例如 BMM 可能包括三轴不对称核，但 IBM 中则不能包括，不过目前还无明确迹象证实三轴不对称核的存在. 又例如在 $H_{\mathrm{IBM}}\left(\alpha,\ -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ 中包括集体动量的四次项，$H_{\mathrm{BMM}}\left(\alpha,\ -i\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$ 中只有集体动量的二次项，但有其它项目可资弥补，故在球形区核的较高激发态也不易对两种模型进行判别.

从目前情况看，局限在唯象分析的范围之内，很难对它们进行判别. 关键的问题是集体自由度的微观内容，以及相应的集体态子空间的选定. 只有在这样的基础上才能判断

哪一种模型更为合适．也只有在这种基础上才能用四极矩等以外的其它原子核性质来进行判别．

参 考 文 献

[1] A. Bohr, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, **26**(1952), No. 14; A. Bohr and B. R. Mottelson, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*. **27**(1953), No. 16.

[2] A. Arima and F. Iachello, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 1069; *Ann. Phys.*, (*N. Y.*), **99**(1976), 253; 111(1978), 201; **123**(1979), 468.

[3] O. Castanos, E. Chacon, A. Frank and M. Moshinsky, *J. Math. Phys.*, **20**(1979), 35. M. Moshinsky, *Nucl. Phys.*, **A338**(1980), 156.

[4] A. Weiguny, *Z. Physik*, **A301**(1981), 335.

[5] A. Bohr and B. R. Mottelson, *Physica Scripta*, **22**(1980), 468.

[6] A. E. L. Dieperink, F. Iachello and O. Scholten, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1747. A. E. L. Dieperink and O. Scholten. *Nucl. Phys.*, **A346**(1980), 125.

[7] R. Gilmore and D. H. Feng, in Interacting Bose-Fermi Systens in Nuclei, Plenum, (1981). D. H. Feng, R. Gilmore and S. R. Deans, *Phys. Rev.*. **C23**(1981), 1254.

[8] J. Q. Chen and P. Van Isacker, in Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei, Plenum (1981). P. Van Isacker and J. Q. Chen, *Phys. Rev.*, **C24**(1981), 681.

[9] J. N. Ginocchio, and M. W. Kirson, *Phys. Rev. Lett.*, **44**(1980), 1744; J. N. Ginocchio and M. W. Kirson, *Nucl. Phys.*, **A350**(1980), 31.

[10] J. N. Ginocchio, *Nucl. Phys.*, **A376**(1982), 438.

[11] A. Klein, C. T. Li and M. Vallieres, *Phys. Rev.*, **225**(1982), 24.

[12] 徐躬耦，高能物理与核物理，7(1983) 510.

[13] Y. T. Yang and J. M. Irvine, *J. Phys.* G (to be published)

[14] V. Paar, S. Brant, L. F. Cauts, G. Leander, and M. Vouk, *Nucl. Phys.*, **A378**(1982), 41.

[15] A. Faessler, Invited talk at the International Conference on Nuclear Structure, Amsterdam. (1982).

COMPARISON BETWEEN THE BOHR-MOTTELSON MODEL AND THE INTERACTING BOSON MODEL

Xu Gong-ou Yang Ya-tian

(*Lanzhou University*)

Gu Jin-nan

(*Institute of Modern Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The comparison between BMM and IBM is comprehensively discussed in the spirit of the transformation theory by using the generator coordinate method (GCM). Some differences existed between these two essentially equivalent models are pointed out on the phenomenological level, and the possibility of distinguishing them is briefly discussed.