第 8 卷 第 1 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 8, No. 1
1984 年 1 月　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Jan., 1984

共形协变非线性耦合方程的真空解

许 伯 威　　巴 路 特
(兰 州 大 学)　(科 罗 拉 多 大 学)

摘　　要

我们讨论了标量-旋量共形协变非线性耦合方程的 instantonlike 和 meronlike 真空解.

一、引　　言

近来对共形协变理论的经典真空解引起了广泛的兴趣[1-5],因为所得到的真空解是非微解,对应的总能量为零. 虽则目前这种解在粒子物理方面没得到实际的应用,但真空解本身的存在,在物理和数学二方面都是值得研究的. 我们曾讨论了最普遍形式标量场和旋量场的共形协变非线性耦合方程,并导出了 instantonlike 真空解[4,5]. 现在将对此方程作更为普遍的讨论,指出尚存在 meronlike 真空解. 在本文中我们先回顾共形协变动量-能量张量的一般性质,然后讨论标量场和旋量场共形协变的非线性耦合方程,导出了以上所述二种型式的真空解,并分析解的对称性质.

二、共形协变动量-能量张量

在讨论共形协变理论的真空解时,必须引进共形协变动量-能量张量 $\theta_{\mu\nu}$[1,4,5]. $\theta_{\mu\nu}$ 有以下重要的性质[6-9]

$$\partial^\mu\theta_{\mu\nu}=0 \quad \theta_{\mu\nu}=\theta_{\nu\mu} \quad \theta^\mu_\mu=0 \tag{1}$$

所以 $\theta_{\mu\nu}$ 可表示成以下普遍形式[10,11]

$$\theta_{\mu\nu}=(4\tau_\mu\tau_\nu-\tau_\lambda\tau^\lambda g_{\mu\nu})\theta(\tau) \tag{2}$$

$\theta(\tau)$ 为参量 τ 的标量函数. 取

$$\tau=\frac{1}{2}cx^2+dx+e, \quad \tau_\mu=\frac{\partial\tau}{\partial x^\mu}=cx_\mu+d_\mu{}^{[5]}.$$

由 $\theta_{\mu\nu}$ 的守恒性我们有

$$\tau_\lambda\tau^\lambda\dot{\theta}+6c\theta=0 \tag{3}$$

以上微商符号是对 τ 求微商. 很容易证明 (3) 式有以下二种型式的解

$$\theta(\tau)=0 \qquad \text{instantonlike} \tag{4}$$

$$\theta(\tau)=\text{常数}\ (\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-3} \qquad \text{meronlike} \tag{5}$$

本文 1982 年 10 月27日收到.

二者都有总能量 $E = \int d^3x\theta_{00} = 0$（对于 (5) 式要求 $\tau_0 \neq 0$），所以都称为真空解．很多共形协变的理论都有这样的真空解．

三、共形协变非线性耦合方程

现在我们来讨论标量场和旋量场耦合最普遍形式的共形协变拉氏量

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \lambda\phi^4 - \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\psi - \frac{3}{4}f(\bar{\psi}\psi)^{\frac{4}{3}} + g\bar{\psi}\psi\phi \tag{6}$$

以上 λ、f、g 都为无量纲的耦合常数．由 (6) 式得到的场方程为

$$\Box\phi = 4\lambda\phi^3 - g\bar{\psi}\psi \tag{7a}$$

$$\gamma^\mu\partial_\mu\psi = -f(\bar{\psi}\psi)^{\frac{1}{3}}\psi + g\phi\psi \tag{7b}$$

我们假定 ϕ 和 $\bar{\psi}\psi$ 是 τ 的函数，并假定 ψ 的形式为[4,5,12]

$$\psi = [A(\tau) + \gamma^\mu\tau_\mu B(\tau)]C_\psi \tag{8}$$

其中 $A(\tau)$、$B(\tau)$ 为 τ 的实函数，C_ψ 为旋量常数．由以上假设以及 (8) 式，所以场方程 (7) 式可化为

$$\tau_\lambda\tau^\lambda\ddot{\phi} + 4c\dot{\phi} = 4\lambda\phi^3 - g\bar{\psi}\psi \tag{9}$$

$$\tau_\lambda\tau^\lambda\dot{B} + 4cB = [-f(\bar{\psi}\psi)^{\frac{1}{3}} + g\phi]A \tag{10a}$$

$$\dot{A} = [-f(\bar{\psi}\psi)^{\frac{1}{3}} + g\phi]B \tag{10b}$$

与 (6) 式对应的共形协变动量-能量张量，在考虑了场方程 (9) 和 (10) 式后具有以下形式[5]

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{1}{12}(4\tau_\mu\tau_\nu - \tau_\lambda\tau^\lambda g_{\mu\nu})(2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi}) + \frac{1}{4}(4\tau_\mu\tau_\nu - \tau_\lambda\tau^\lambda g_{\mu\nu})\bar{c}_\psi c_\psi(A\dot{B} - \dot{A}B) \tag{11}$$

四、真　空　解

(i) Instantonlike 解

根据定义，由 (4) 和 (11) 式有

$$2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi} = 0 \tag{12a}$$

$$A\dot{B} - \dot{A}B = 0 \tag{12b}$$

由 (12a) 得

$$\phi = \frac{C_\phi}{\tau} \tag{13}$$

(13) 式代入 (9) 式有

$$\bar{\Phi}\phi = \frac{2C_\phi}{g}(2\lambda C_\phi^2 + 2ce - d^2)\tau^{-3} \tag{14}$$

将(13)、(14)式代入(10)式，可写成

$$(2c\tau + d^2 - 2ce)\dot{B} + 4cB = \frac{K}{\tau}A \tag{15a}$$

$$\dot{A} = \frac{K}{\tau}B \tag{15b}$$

其中

$$K = -f\left[\frac{2C_\phi}{g}(2\lambda C_\phi^2 + 2ce - d^2)\right]^{\frac{1}{3}} + gC_\phi \tag{16}$$

又由(12 b)式有

$$A(\tau) = DB(\tau) \tag{17}$$

其中D为常数．将(17)式代入(15)式，经过整理，最后有

$$B = \tau^{\frac{K}{D}} \quad A = D\tau^{\frac{K}{D}} \tag{18}$$

并有

$$D = \mp(d^2 - 2ce)^{\frac{1}{2}} \tag{19}$$

$$\frac{K}{D} = -2 \tag{20}$$

所以

$$\phi = \frac{D + \gamma^\mu\tau_\mu}{\tau^2}C_\phi \tag{21}$$

比较(14)和(21)式得

$$2C_\phi\left(\lambda C_\phi^2 + ce - \frac{1}{2}d^2\right) + cg\bar{C}_\phi C_\phi = 0 \tag{22}$$

又由(16)、(19)和(20)式可有

$$gC_\phi - f\left[\frac{2C_\phi}{g}(2\lambda C_\phi^2 + 2ce - d^2)\right]^{\frac{1}{3}} \mp 2(d^2 - 2ce)^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{23}$$

(22)、(23)式即为系数之间的关系式．当 $f \neq 0$ 时，C_ϕ(因之 $\bar{C}_\phi C_\phi$)有三个不同的根，真空解是三重退化的．另外，一种特殊情况是取参数 $c = -2$，$d_\mu = 0$、$e = a^2$，即 $\tau = a^2 - x^2$．这时ϕ和$\bar{\Phi}\phi$解具有 SO(3, 2) 对称性[4]．SO(3, 2) 的算子为

$$J_{\mu\nu} = -i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) - iI_{\mu\nu}$$
$$R_\mu = \frac{i}{2a}[(a^2 + x^2)\partial_\mu - 2x_\mu x^\lambda\partial_\lambda + 2lx_\mu - 2x^\lambda I_{\mu\lambda}] \tag{24}$$

其中l为场量的共形量度，$I_{\mu\lambda}$为自旋矩阵．

(ii) Meronlike 解

由(4)和(11)式有

$$2\dot{\phi}^2 - \phi\ddot{\phi} = \text{常数}\ (\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-3} \tag{25a}$$

$$A\dot{B} - \dot{A}B = \text{常数}\ (\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-3} \tag{25b}$$

由(25 a)有

$$\phi = C'_\phi(\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-\frac{1}{2}} \tag{26}$$

将(26)式代入(9)式则可得

$$\bar{\Phi}\phi = \frac{C'_\phi}{g}(4\lambda C'^2_\phi + c^2)(\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-\frac{3}{2}} \tag{27}$$

(27)式代入(10)式，可写成

$$\tau_\lambda\tau^\lambda\dot{B} + 4cB = H(\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-\frac{1}{2}}A \tag{28 a}$$

$$\dot{A} = H(\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-\frac{1}{2}}B \tag{28 b}$$

其中

$$H = -f\left[\frac{C'_\phi}{g}(4\lambda C'^2_\phi + c^2)\right]^{\frac{1}{3}} + gC'_\phi \tag{29}$$

由(25 b)和(28)式，最后给出

$$\phi = [1 \pm \gamma^\mu\tau_\mu(-\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-\frac{1}{2}}]\,(\tau_\lambda\tau^\lambda)^{-\frac{3}{4}}C_\phi \tag{30}$$

并有

$$H = \mp i\frac{3}{2}c \tag{31}$$

其中 $-\tau_\lambda\tau^\lambda > 0$，对应于类时空间.

比较(27)和(30)式给出

$$\frac{i}{2}C'_\phi(4\lambda C'^2_\phi + c^2) - g\bar{C}_\phi C_\phi = 0 \tag{32}$$

而由(29)和(31)式有

$$gC'_\phi - f\left[\frac{C'_\phi}{g}(4\lambda C'^2_\phi + c^2)\right]^{\frac{1}{3}} \pm i\frac{3}{2}c = 0 \tag{33}$$

当 $f \neq 0$ 时，meronlike 解也是三重退化的. 当 $f = 0$ 时，

$$C'_\phi = \mp i\frac{3}{2g}, \quad \bar{C}_\phi C_\phi = \pm\frac{3}{4g^2}\left(c^2 - \frac{9\lambda}{g^2}\right),$$

所以在类时空间，ϕ 和 $\bar{\Phi}\phi$ 为实数.

解(26)和(27)式可经过反演和平移变换变为[11,13]

$$\phi = 2C'_\phi\left[\frac{v_\lambda v^\lambda}{(\tau_\lambda - v_\lambda)^2(\tau_\lambda + v_\lambda)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

$$\bar{\Phi}\phi = 16\bar{C}_\phi C_\phi\left[-\frac{v_\lambda v^\lambda}{(\tau_\lambda - v_\lambda)^2(\tau_\lambda + v_\lambda)^2}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{35}$$

v_λ 为一常数矢量，如只取其时间分量(0,0,0,1)，可以证明(34)和(35)式具有 SO(4)×SO(2) 对称性[13].

参　考　文　献

[1] V. de Alfaro, S. Fubini, *Nuovo Cimento*, **34A** (1976), 521.
[2] V. de Alfaro, G. Furlan, *Nuovo Cimento*, **34A** (1976), 555.
[3] H. Inagaki, *Phys. Lett.*, **69B** (1977), 448.

[4] A. O. Barut, B. W. Xu 许伯威, *Phys. Lett.*, **102B** (1981), 37.
[5] A. O. Barut, B. W. Xu 许伯威, *Phys. Rev.*, **D23** (1981), 3076.
[6] C. G. Callan, S. Coleman, R. Jackiw, *Ann. Phys.*, **59** (1970), 42.
[7] B. W. Xu 许伯威, *Jour. Phys.*, **A14** (1981), L97.
[8] B. W. Xu 许伯威, *Jour. Phys.*, **A14** (1981), L125.
[9] B. W. Xu 许伯威, *Jour. Phys.*, **A15** (1982), L329.
[10] A. Actor, *Z. Phys.*, **C3** (1980), 353.
[11] A. Actor, *Ann. Phys.*, **131** (1981), 269.
[12] W. Heisenberg, *Z. Naturforsch*, **9A** (1954), 210.
[13] V. de Alfaro, S. Fubini, G. Furlan, *Phys. Lett.*, **65B** (1976), 163.

VACUUM SOLUTIONS OF CONFORMALLY COVARIANT NONLINEAR COUPLED EQUATIONS

XU BO-WEI
(*Lanzhou University*)

A. O. BARUT
(*University of Colorado*)

ABSTRACT

The instantonlike and meronlike vacuum solutions of conformally covariant nonlinear coupled scalar and spinor field equations are discussed.