第7卷 第5期 高能物理与核物理 Vol. 7, No. 5
1983年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1983

与 Sine-Gordon 方程相关的 Riccati 方程的几何意义

吴詠时　　葛墨林
(中国科学院理论物理研究所)　(兰州大学)

摘　要

从空间结构方程出发，讨论了相关的 Riccati 方程的几何意义. 我们指出，测地投影所满足的 Riccati 方程本质上表示了空间的无挠性.

近年来，人们对于孤立子方程的研究越来越广泛，尤其是对二维 Sine-Gordon 方程的有关讨论已经相当地深入[1,2]. 而与 SG 方程有关的几何性质（例如与伪球面相关的问题）的讨论更进一步揭示出这类方程的内在几何属性. R. Sasaki 用简明的几何语言对孤立子类型的方程与伪球面的关系作了系统的阐述[3]，也指出了 Riccati 方程形式与线性方程之间的某些联系. 近来，我国侯伯宇等人对于手征模型中的 Bäcklund 交换（BT）的几何意义作了细致的研究，指出两个伪球面间的变换（BT）所相应的几何过程，包括其公切线与 Riccati 方程形式之间的关系[4]. 这些都是有兴趣的结果.

本文的目的在于讨论与 Sine-Gordon 方程相联系的几何中（或更大的几何框架中）存在 Riccati 方程的本质. 我们将指出，此处出现的 Riccati 方程的本质在于它表示了空间的无挠性.

设 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ 是 E^3 空间中的活动标架. 某坐标矢量 $\vec{x}$ 的平移与标架的转动满足

$$d\vec{x} = \sigma^i \vec{e}_i, \tag{1}$$

$$d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j, \qquad i, j, k \cdots = 1, 2, 3. \tag{2}$$

以及

$$\omega_i^j = -\omega_j^i. \tag{3}$$

其相应的空间结构方程为

$$d\sigma^i = \sigma^j \wedge \omega_j^i, \tag{4}$$

$$d\omega_i^j = \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \tag{5}$$

我们选择 $\vec{e}_3$ 为 E^3 中某个曲面 $\sum$ 上某点处的法向，而 $\vec{e}_1$ 与 $\vec{e}_2$ 则处于该点的切平面上. 当矢量 $\vec{x}$ 限制在曲面 $\sum$ 上移动，则

$$d\vec{x} = \sigma^1 \vec{e}_1 + \sigma^2 \vec{e}_2, \tag{6}$$

引入

本文 1982 年 7 月 20 日收到.

$$\|\omega_i^j\| = \begin{pmatrix} 0 & \omega & -\omega_1 \\ -\omega & 0 & -\omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

则由 (1) 与 (2) 两式有

$$d\vec{x} = \sigma^1\vec{e}_1 + \sigma^2\vec{e}_2, \quad d\vec{e}_1 = \omega\vec{e}_2 - \omega_1\vec{e}_3, \quad d\vec{e}_2 = -\omega\vec{e}_1 - \omega_2\vec{e}_3, \quad d\vec{e}_3 = \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2. \tag{8}$$

这时 (4) 与 (5) 式两个结构方程变为

$$d\sigma^1 = \omega\wedge\sigma^2, \quad d\sigma^2 = -\omega\wedge\sigma^1, \quad \sigma^1\wedge\omega^1 + \sigma^2\wedge\omega^2 = 0, \tag{9}$$

$$d\omega = -\omega^1\wedge\omega^2, \quad d\omega^1 = \omega\wedge\omega^2, \quad d\omega^2 = -\omega\wedge\omega^1. \tag{10}$$

对于高斯曲率 $\kappa = \pm 1$，可有[3]

$$d\omega = \mp\sigma^1\wedge\sigma^2. \tag{11}$$

对于单位实球(或虚球)，$|\vec{x}| = 1$，有

$$\vec{e}_3 = \vec{x}/|\vec{x}| = \begin{cases} \vec{x} & \text{对实球} \\ -i\vec{x} & \text{对虚球.} \end{cases} \tag{12}$$

将 $d\vec{x}$ 与 $d\vec{e}_3$ 表达式相比较，得

$$\omega^1 = \lambda\sigma^1, \qquad \omega^2 = \lambda\sigma^2, \tag{13}$$

其中对实球 $\lambda = 1$，对虚球 $\lambda = -i$. 当 $\kappa = -1$ 时，以上几何可以包含 SG 方程[3].

我们知道，任一球面（伪球面）均局域性地等距（isometric）于同一曲率的实球(虚球)[5]，故可将一个球面(伪球面)的讨论化为单位球(虚球)的问题.

对于 E^3 空间的固定坐标系，可引入

$$\vec{e}_1 = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{e}_2 = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{e}_3 = (c_1, c_2, c_3), \tag{14}$$

则由于 (8) 式，对任意下标 $i (i = 1, 2, 3)$ 成立

$$da = \omega b - \omega_1 c, \quad db = -\omega a - \omega_2 c, \quad dc = \omega_1 a + \omega_2 b. \tag{15}$$

注意，由于 e_j^i 与 i, j 指标均具有正交性，故对任意 i 均成立

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1/\lambda^2. \tag{16}$$

引入量

$$\Gamma = \frac{a + ib}{1 - \lambda c}, \tag{17}$$

由 (16) 式易知

$$\Gamma = \frac{1}{\lambda^2}\frac{1 + \lambda c}{a - ib}. \tag{18}$$

由 (17)、(18) 两式可以计算 $d\Gamma$，同时将 (15) 式代入，遂得如下的 Riccati 方程

$$d\Gamma = \frac{1}{2\lambda}(\omega_1 + i\omega_2) - i\omega\Gamma + \frac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)\lambda\Gamma^2, \tag{19}$$

或

$$d(\lambda\Gamma) = \frac{1}{2}(\omega_1 + i\omega_2) - i\omega(\lambda\Gamma) + \frac{1}{2}(\omega_1 - i\omega_2)(\lambda\Gamma)^2. \tag{20}$$

相反地，从方程 (8) 可以推知 (19) 或 (20) 式.

当 $\lambda = 1$，则由于 Γ 的复共轭

$$\bar{\Gamma} = \frac{a - ib}{1 - c}$$

即有

$$a=\frac{\Gamma+\bar{\Gamma}}{1+\Gamma\bar{\Gamma}},\ b=(-i)\frac{\Gamma-\bar{\Gamma}}{1+\Gamma\bar{\Gamma}},\ c=\frac{\Gamma\bar{\Gamma}-1}{1+\Gamma\bar{\Gamma}}. \tag{21}$$

将 Γ 代入(21)式后,我们就得到方程(15)的一组解,这是 $\kappa=+1$ 的情况. 对 $\kappa=-1$,不失一般性可令 $\lambda=-i$,同样可证(15)成立.

在用 σ^1,σ^2 表达时,这时 Riccati 方程为

$$d\Gamma=\frac{1}{2}(\sigma^1+i\sigma^2)-i\omega\Gamma\pm\frac{1}{2}(\omega_1-i\omega_2)\Gamma^2, \tag{22}$$

上式中的±号相应于 $\kappa=\pm1$. 对于 $\kappa=-1$,(22)式正是文献[3]中出现的 Riccati 方程. 但我们业已看到,此中的 Riccati 方程本质上是嵌入 E^3 中的球面(或伪球面)的结构方程之一——无挠方程. 因此,它并不与 Sasaki 的提法完全一致.

为了更清楚地看出此中的 Riccati 方程本质上是测地投影形式下的无挠方程,我们讨论一下更一般的情形.

利用对称空间的 O 群的基底,在内空间维数 $\leqslant 5$ 时,沿用文献[6]中的结果,我们可以将空间结构的挠率张量 $T_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ 同曲率张量 $F_{\mu\nu}^{(\rho\sigma)}$ 表示如下:

$$T_{\mu\nu}^{(\alpha)}=\partial_\mu e_\nu^{(\alpha)}-\partial_\nu e_\mu^{(\alpha)}-[e_\mu^{(\rho)}\theta_\nu^{(\rho\alpha)}-e_\nu^{(\rho)}\theta_\mu^{(\rho\alpha)}], \tag{23}$$

$$F_{\mu\nu}^{(\rho\sigma)}=\partial_\mu\theta_\nu^{(\rho\sigma)}-\partial_\nu\theta_\mu^{(\rho\sigma)}-[\theta_\mu^{(\rho\alpha)}\theta_\nu^{(\alpha\sigma)}-\theta_\nu^{(\rho\alpha)}\theta_\mu^{(\alpha\sigma)}], \tag{24}$$

其中 $\mu,\nu\cdots$ 为时空指标,$(\alpha,\beta\cdots)$ 为内空间指标. $e_\mu^{(\alpha)}$ 表示标架,$\theta_\mu^{(\alpha\beta)}$ 表示相应群的联络. 当空间具有常曲率时,有

$$F_{\mu\nu}^{(\rho\sigma)}=k(e_\mu^{(\rho)}e_\nu^{(\sigma)}-e_\mu^{(\sigma)}e_\nu^{(\rho)}),\quad k=\text{常数}. \tag{25}$$

例如当所有指标均只取 1, 2, 3 (表以 i,j,k) 时无挠、常曲率的条件变为

$$\partial_i e_j^{(a)}-\varepsilon_{abc}\Lambda_i^{(b)}e_j^{(c)}=0, \tag{26}$$

与

$$\partial_i\Lambda_j^{(a)}-\partial_j\Lambda_i^{(a)}+\varepsilon_{abc}\Lambda_i^{(b)}\Lambda_j^{(c)}=k\varepsilon_{abc}e_i^{(b)}e_j^{(c)}, \tag{27}$$

其中

$$\theta_i^{(ab)}=\varepsilon_{abc}\Lambda_i^{(c)}. \tag{28}$$

如果进一步在 E^3 中选择二维曲面,则(26)、(27)两式变为

$$\partial_i e_j^{(1)}+\Gamma_i e_j^{(2)}=0, \tag{29}$$

$$\partial_i\Gamma_j-\partial_j\Gamma_i=k(e_i^{(1)}e_j^{(2)}-e_i^{(2)}e_j^{(1)}), \tag{30}$$

上式中 $i,j=1,2$,且

$$\Gamma_i\equiv\Lambda_i^{(3)}. \tag{31}$$

按文献[3],令 $x^1\equiv x$, $x^2\equiv t$, 以及

$$e_1^{(1)}=e_2^{(1)}=\cos u/2,\quad e_1^{(2)}=-e_2^{(2)}=\sin u/2. \tag{32}$$

$$\Gamma_1=-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \Gamma_2=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

则(32)满足(29)式,且由(30)给出

$$u_{12}=k\sin u, \tag{33}$$

上式中 $u_{12}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}$, 当 $k=+1$ ($\kappa=-1$) 时为 SG 方程.

上面所讨论过的 Riccati 方程仅仅利用了方程(26)式，即挠度为零的方程，由于

$$T_{\mu\nu}^{(\alpha)} = D_\mu e_\nu^{(\alpha)} - D_\nu e_\mu^{(\alpha)}, \tag{34}$$

其中

$$D_\mu e_\nu^{(\alpha)} = \partial_\mu e_\nu^{(\alpha)} - \theta_\mu^{(\alpha\beta)} e_\nu^{(\beta)}. \tag{35}$$

故(26)式相当于取了较强的条件

$$D_\mu e_\nu^{(\alpha)} = 0. \tag{36}$$

我们可以将以上的讨论与过去的工作对比，从而可以更明显地了解它们的含义．选择所有指标均取 $i, j, k = 1, 2, 3$，则(36)变为(令 $\nu = 3$)

$$\partial_i \vec{n} - \vec{\Lambda}_i \times \vec{n} = 0, \tag{37}$$

此中 $\vec{\Lambda}_i$ 就是文献[7]中的 $\vec{W}$．将上式乘以 dx^i，且令 $\vec{\omega} = \vec{\Lambda}_i dx^i$ 为 1-形式发甫式，即有

$$d\vec{n} - \vec{\omega} \times \vec{n} = 0. \tag{38}$$

在文献[7]中的作法是将规范势 $\vec{\Lambda}_i$ 用 $\vec{n}$ 部分地表示出来．［注意现在矢量符号表示"同位旋"空间的矢量，而叉乘符号表示"同位旋"空间的矢积，而 i, j, k 表通常空间.］但是我们可以讨论上述的逆问题：对某一定的 $\vec{\Lambda}_i$（或 $\vec{\omega}$），如何由此而确定满足(38)的 $\vec{n}$ 呢？

引入 $\vec{n} = (a, b, c)$，且 $a^2 + b^2 + c^2 = 1/\lambda^2$，以及 $\vec{\omega} = (\omega_2, -\omega_1, -\omega)$，则(38)给出(15)式，从而给出如(17)所定义的 Γ 满足 Riccati 方程．换言之，这里的 Riccati 方程本质上是用平行位移为零的无挠条件给出了已知 ω 决定 $\vec{n}$ 的测地投影的方程，即为 Riccati 方程．

为了强调此间的 Riccati 方程的来源独立于曲率张量，我们再举出一个简单的例子．

对四维情况，挠度为零的方程为

$$\partial_\mu e_\nu^{(\alpha)} - \theta_\mu^{(\alpha\beta)} e_\nu^{(\beta)} = 0, \quad \mu, \nu(\alpha, \beta)\cdots = 1, 2, 3, 4. \tag{39}$$

式中 $\theta_\mu^{(\alpha\beta)}$ 对内指标 $(\alpha\beta)$ 是反对称的．对任意时空指标 ν 为固定时，引入

$$e_\nu^{(\alpha)} = (a, b, c, f),$$

以及 $de_\nu^{(\alpha)} = \partial_\mu e_\nu^{(\alpha)} dx^\mu$，$\omega^{(\alpha\beta)} = \theta_\mu^{(\alpha\beta)} dx^\mu$，则(39)式给出

$$\begin{aligned} da &= \omega^{12} b + \omega^{13} c + \omega^{14} f, \quad db = \omega^{21} a + \omega^{23} c + \omega^{24} f, \\ dc &= \omega^{31} a + \omega^{32} b + \omega^{34} f, \quad df = \omega^{41} a + \omega^{42} b + \omega^{43} f, \end{aligned} \tag{40}$$

或为与(15)式一致，引入记号 ω，ω_1 与 ω_2 使

$$\begin{aligned} da &= \omega b - \omega_1 c - \alpha_1 f, \quad db = -\omega a - \omega_2 c - \alpha_2 f, \\ dc &= \omega_1 a + \omega_2 b - \alpha f, \quad df = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha c. \end{aligned} \tag{41}$$

定义相应的投影

$$\Gamma' = \frac{a + ib}{c + if}, \tag{42}$$

当标架满足

$$a^2 + b^2 + c^2 + f^2 = 0, \tag{43}$$

时，亦即标架为零模时，对(42)式取微商，并以(41)式代入，重复以上运算，可得

$$\begin{aligned} d\Gamma' = &-\frac{1}{2}[(\omega_1 - i\alpha_1) + i(\omega_2 - i\alpha_2)] - i(\omega + \alpha)\Gamma' \\ &-\frac{1}{2}[(\omega_1 + i\alpha_1) - i(\omega_2 + i\alpha_2)]\Gamma'^2. \end{aligned} \tag{44}$$

在这个例子中，对应的几何结构已不再是描述 SG 方程的几何，但仍存在 Riccati 方程，因为它仅仅表示投影几何的无挠特性.

如何将本文所述及的观念扩大到更一般性的几何空间性质的讨论中去，是个很有兴趣的问题. 特别是如何将 Riccati 方程、二维可积系统以及规范理论更进一步地、有机地结合起来是值得考虑的问题.

参考文献

[1] 有关 Bäcklund 变换的总结见裔玲丽，广州基本粒子物理理论会议文集 (1980). 变换性质及与手征场的关系见: K. Pohlmeyer, *Commun. Math. Phys.*, **46**(1976), 207.
[2] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, JETP **34**(1972), 62.
[3] R. Sasaki, *Nucl. Phys.*, **B154**(1979), 343.
[4] 侯伯元，在上海广义相对论精确解讨论班上的报告 (1982).
[5] L. P. Eisenhart, ''A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces'' (1949).
[6] 葛墨林，段一士，高能物理与核物理，**4**(1980)，173.
[7] 侯伯宇、段一士，葛墨林，物理学报，**25**(1976)，514.

THE GEOMETRIC MEANING OF THE RICCATI EQUATION RELATED TO SINE-GORDON EQUATION

Wu Yong-shi

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing*)

Ge Mo-lin

(*Lanzhou University*)

Abstract

The geometric meaning of the Riccati equation related to the structure of space is discussed. It is shown that the Riccati equation satisfied by the stereographic projection is essentially the structure equation of space.